數學傳播　44卷2期, pp. 95-104

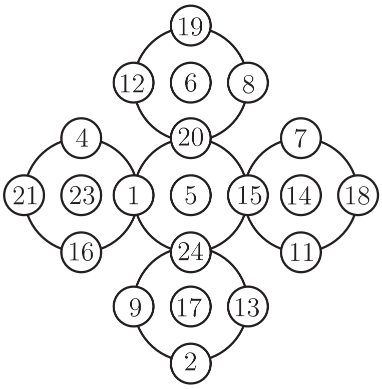
楊輝《續古摘奇算法》之聚五圖初探

梁培基

一、楊輝『聚五圖』

2017 年 10 月李信明教授發送郵件一則趣題 — 幻圖, 千奇百怪的圖形, 琳琅滿目。其中介紹了楊輝的『聚五圖』, 但不知道這個聚五圖是『非連續數』所組成的。此前, 在 1981 年到大連拜謁梁宗巨教授時, 在梁教授那裏看到過楊輝的幻方及幻圖。當時認爲是絕對經典的著作, 奉若神明, 不敢有絲毫疑惑與懈怠。而且只顧研究『和、積幻方』(雙重幻方) 也未曾深入研究聚五圖。李教授郵件發送了楊輝聚五圖, 並且謙虛的說 :『修改錯誤』。這個聚五圖是他出版書籍中所用的篇章, 這麼重要的事情, 交給了『半路出家』的無名之輩, 我誠惶誠恐, 不敢有絲毫謬誤。所以重新開始認識、研究『聚五圖』。這時, 才發現楊輝的聚五圖不是連續自然數所組成。由於年輪的增加, 現在對於文獻和經典書籍中所載的問題, 凡力所能及的都要探索一番, 以求真實, 不以訛傳訛, 不誤導後人。古人曰 :「學貴有疑, 小疑則小進, 大疑則大進。」

1275 年楊輝的《續古摘奇算法》成書, 至今已有七百多年的歷史, 楊輝在文中注『21 子作 25 子用』, 所使用的 21 個元素如下表:



楊輝聚五圖

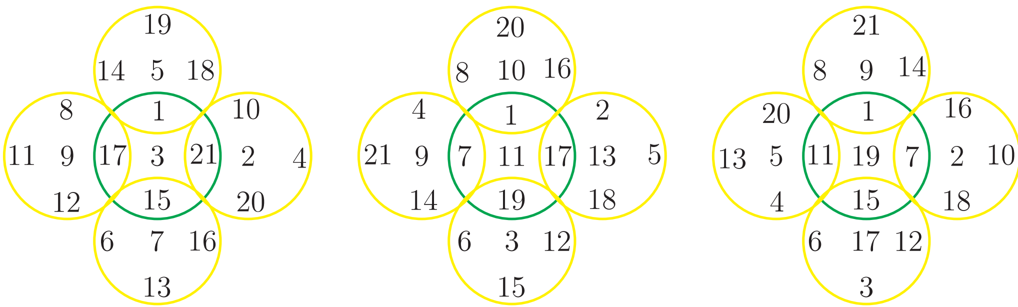
1	2	4	5	6	7	8	9	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	23	24	

楊輝爲什麼不用連續自然數呢? 筆者不便妄加揣測。

能不能用連續自然數 $1, 2, 3, \ldots, 21$ 構成這類圖, 並且滿足上述性質呢?

經過仔細揣摩, 造出 3 個聚五圖, 其幻和分別是 57、55、53 (圖 2、3、4)。

七百年來, 難道就沒有人發現嗎?



幻和 = 57　　幻和 = 55　　幻和 = 53

造出連續數聚五圖 (上面三個圖) 之後, 把這三個圖連同楊輝的聚五圖一併交給『Z 君』審閱, 求他找找『毛病』, 提提意見。『Z 君』文學水準較高, 筆鋒犀利, 伶牙俐齒, 素以『挑毛病』爲樂趣。發現報紙、雜誌、電視臺有錯別字, 立刻發函批評, 不留一點情面, 人送綽號『挑毛病』先生。筆者非常敬仰他一絲不苟、不徇私情的認真精神, 素有往來。遇到某些字句不理想的時候, 就找他挑毛病, 一般能如願以償。

二、Z 君提出第一次建議

『Z 君』在我的幻方氣氛薰陶下, 開始有些感染, 審核之後, 他提出, 楊輝聚五圖的中間行與中間列關於中心點對稱的 4 個數之和都相等。你的三個圖不具有這個性質。

很好! 能有人認真的提意見是非常難得的事情。

小時候很喜歡老師表揚, 很喜歡看老師批改作業的好批語。而現在呢, 只想找人提出不同的意見, 甚至相反的意見。直到現在才體會到古人的至理名言 :「道吾好者是吾賊; 攻吾惡者是吾師!」的深切含義。

於是, 把 3 個聚五圖, 修改爲下面的圖 4、圖 5、圖 6。

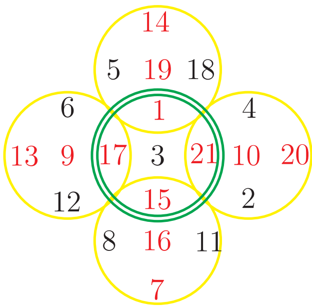
這 3 個聚五圖的性質如下 :

1. 每圓上 5 個元素之和都相等。
2. 中間行、中間列相對稱位置 4 數與中心數之和相等。

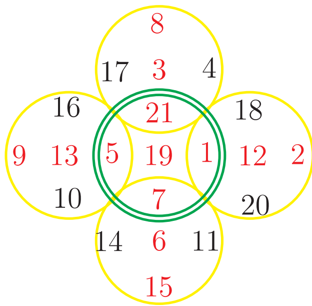
例如在下圖 (左) 中 : $14 + 20 + 7 + 13 + 3 = 57$; $19 + 10 + 16 + 9 + 3 = 57$。圖中與圖右

也都具有這種性質。

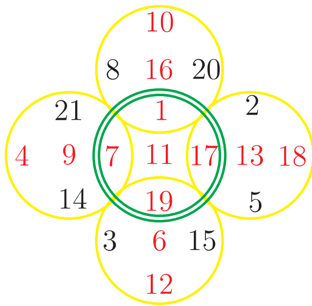
3. 中心圓 (雙線所圍) 5 個元素都是奇數。



幻和 $= 57$



幻和 $= 53$



幻和 $= 55$

三、Z 君的第二次建議

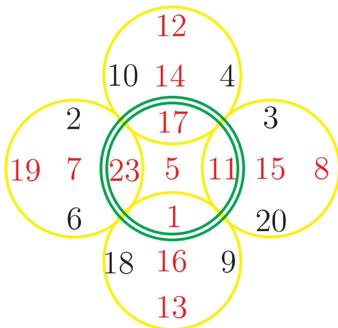
Z 君真是知心好友, 知無不言, 並且提出非常尖銳的問題。Z 君又提出 : 楊輝的聚五圖是把『5』排列在『中心點』的位置上, 其餘的數字以『5』爲中心而『聚攏』, 具有『朝拱』之勢, 所以叫『聚五圖』。而你的圖沒有把『5』排列在中心點上, 是否與古賢聖典相悖呢? 或者說你這個圖與楊輝『聚五圖』的定義不吻合。

好哇! 找到不足就是前進的動力!

根據連續自然數 $1, 2, 3, \ldots, 21$ 是不能構成『5』在中心點聚五圖的 (證明略), 所以楊輝利用加大數字的方法得到『聚五圖』, 難道楊輝的方法是唯一解嗎?

俗話說 :「聽話聽音, 出 (挖) 樹刨根」。

於是, 開始第三次修改, 下面是 5 在中心的聚五圖。



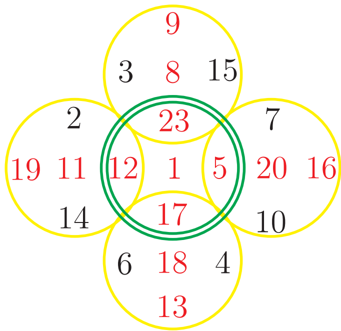
幻和 $= 57$

再交 Z 君挑毛病。

四、Z 君第三次建議

Z 君提出一個更加一般性的問題：既然5能在中心, 那麼『1』能否在中心呢?

再次修改。得到『1』在中心點位置上的聚五圖。



幻和 $=58$

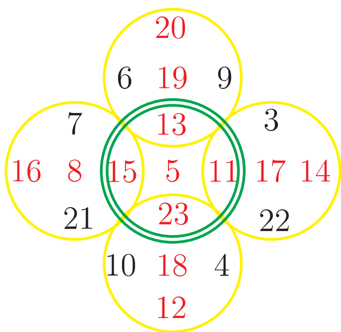
掌握了這個方法, 任意元素都可以排列在中心點的位置上, 從而解決了中心點排放任意元素的問題。

第 4 次交 Z 君挑毛病。

五、Z 君第四次建議

能否用 21 個不從 1 開頭的連續數, 並且組成『5 在中心點』的聚五圖呢?

我們用 $3,4,5,\ldots,23$ 構作聚五圖, 幻和為 67。



幻和 $=67$

利用上述改變元素值的方法, 我們可以得到 21 個連續數 (不從 1 開始) 組成的任意元素為中心點的聚五圖。

在這裏, 我們引入一個『共軛聚五圖』的定義：

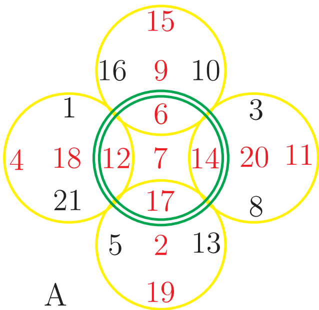
如果用一個數減去聚五圖 A 中的各個元素, 而得到另一個聚五圖 B, 我們稱 A 與 B 互為『共軛聚五圖』, 下面兩個幻和分別是 56 與 54 的就是一對『共軛聚五圖』。用 22 減去 A 圖

的各個元素, 就得到對應的圖 B。反之, 用 22 減去圖 B 的各個元素, 就得到 A。所以稱這樣的 A 與 B 互爲『共軛聚五圖』。前面列出的各個聚五圖, 都可以用這個方法得到他們的共軛聚五圖, 讀者不妨一試, 這是一種很簡捷的方法。這就好像『對偶解』一樣, 找到一個就立馬得到另一個。也難怪, 我國古代聖賢幾千年前就指出 : 有陰必有陽, 陰陽不可偏廢。『萬物負陰而抱陽。』

六、Z 君第五次建議

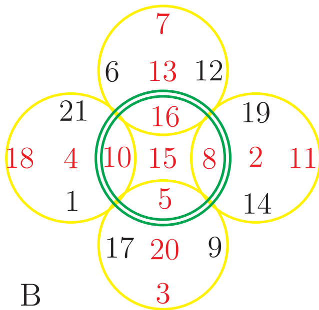
Z 君提出 : 除了連續數 1,2,3, . . . , 21 構成的 3 種幻和的聚五圖, 是否還有其他的解呢?

我們構作出幻和等於 56 的聚五圖, 中心點元素是 7 (下圖 A)。它的共軛聚五圖的幻和等於 54, 中心點元素是 15 (下圖 B)。



A

幻和 = 56



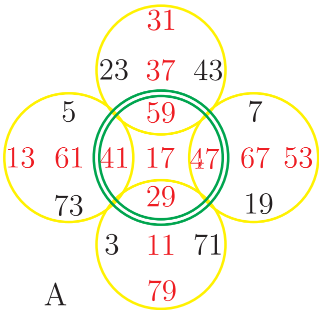
B

幻和 = 54

七、Z 君第六次建議

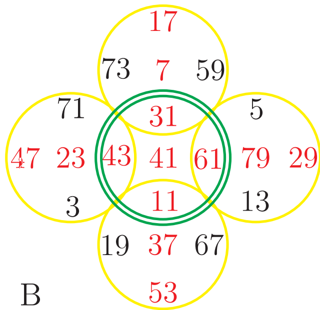
Z 君 : 據說質數在數論中的地位非常顯赫, 能否用質數構作聚五圖?

好一個 Z 君, 竟然進入數論中來了! 感謝您提出這個有趣的問題。我們使用了 21 個連續質數排列出兩個不同幻和的聚五圖如下。另外, 左圖的幻和 193 也是質數。



A

幻和 = 193



B

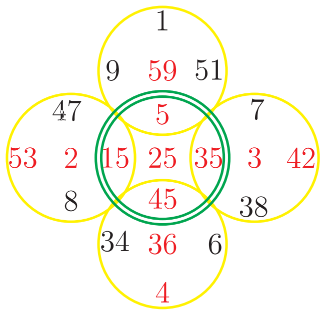
幻和 = 187

有興趣的讀者, 不妨排列出更多不同幻和的質數聚五圖, 祝你成功!

八、Z 君第七次建議

Z 君說: 能否造出性質最多, 而且中心圓全部是『5』爲尾數的元素?

要想解決這個問題, 就誕生了下面這個『優化聚五圖』(性質最多的聚五圖)。



幻和 $= 125$

在上圖中有 5 個尾數是 5 的元素：5, 15, 25, 35, 45 被全部收入『囊中』(中心圓)。

應當說明的是, 用 60 減去上圖各個元素所得到的共軛聚五圖, 同樣具有末位數是 5 的性質, 並且具有與上圖相同的其他性質。中心圓的 5 個元素分別是：55, 45, 35, 25, 15。所不同的是, 其幻和等於 175。

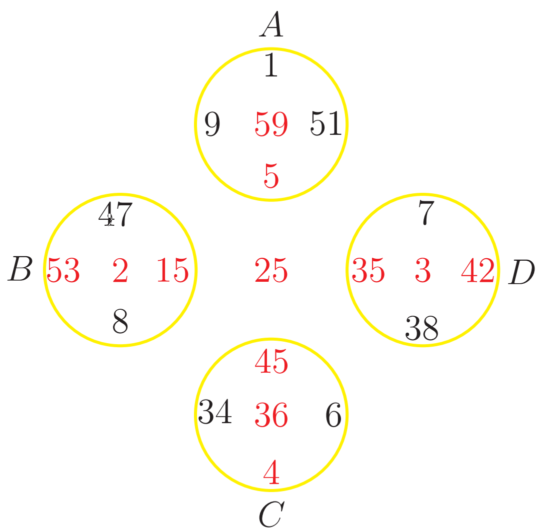
優化聚五圖的構造方法：

爲便於敘述, 我們把下圖 4 個基本圓 (上, 左, 右, 下) 依次稱爲 A, B, C, D 圓 (紅色字母所示)。

T_1　　4個基本圓的元素

A	1	9	5	51	59	125
B	2	8	15	47	53	125
C	3	7	35	38	42	125
D	4	6	45	34	36	125

T_2	1	53	42	4	100
	59	2	3	36	100
	5	15	35	45	100
	9	47	38	6	100
	51	8	7	34	100
	125	125	125	125	



構造方法：

步驟1：填寫 4 行 5 列矩陣 T_1, 使得每行 5 元素之和都等於定值 125。

步驟2：變換 T_1 元素的位置, 填寫 5 行 4 列矩陣 T_2, 把 T_2 的 1, 2, 3, 4 列上的元素, 填入 4 個基本圓 A, B, C, D 中。使得關於『中心點』對稱的 4 元素之和都等於 100。

優化聚五圖的性質如下：

性質 1：4 個基本圓 A, B, C, D 各圓 5 元素之和都等於 125。

	4個基本圓的元素					和
A	1	9	5	51	59	125
B	2	8	15	47	53	125
C	3	7	35	38	42	125
D	4	6	45	34	36	125

性質 2：從 A, B, C, D 每圓中各取 1 個元素, 這 4 元素之和都等於 100, 加上中心點元素 25, 其 5 元素之和都等於 125。我們把 4 元素之和等於 100 的列出來。

每圓各選1個元素				
1	4	53	42	100
59	2	3	36	100
5	15	35	45	100
9	47	6	38	100
51	7	8	34	100
1	45	47	7	100
5	45	47	3	100
5	45	8	42	100
8組				

性質 3：從 A, B, C, D 選取兩個圓, 從這兩個圓中各取 2 個元素, 這 4 元素之和等於 100, 加上中心點元素 25, 其 5 元素之和都等於 125。我們把 4 元素之和等於 100 的列出來。

每圓各選2個元素				
9	51	34	6	100
9	51	36	4	100
47	8	7	38	100
47	8	3	42	100
53	2	3	42	100
53	2	7	38	100
47	15	34	4	100
47	15	35	3	100
47	2	45	6	100
42	7	45	6	100
8	15	35	42	100
1	59	36	4	100
53	2	3	42	100
13組				

性質 4 : 由 5, 15, 25, 35, 45 組成的『中心圓』5 個元素, 全部由末位數是 5 的數字所組成。

至此, 已經滿足 25 組解, $25\times 5=125$, 也就是說 21 子可以作 125 子用。

另外, 還有從 A (或 B) 圓中選 2 個元素, 再從其他 2 個圓中各選 1 個元素, 其 4 元素之和等於 100, 加上中心點 25 之和等於 125 的例子 (略)。

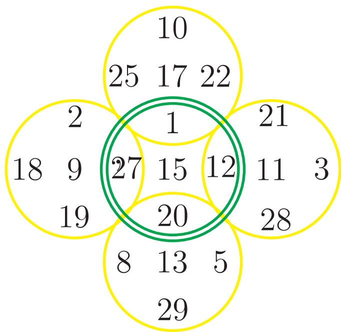
九、Z 君第8次建議 : 平方和相等的聚五圖

Z 君; 據說有平方數組, 能否造出 5 個圓的和及平方和分別相等的聚五圖呢?

問題越來越『刁鑽』, 難度越來越大。那就試一試吧 :

我們利用 [4] 得到下面的聚五圖。

中心點元素都是 15, 它們的 1 次幻和 $=75$; 2 次幻和 $=1499$。



$S_5=75,\ S_5^2=1499$

在上面這個圖中, 除了五個圓的平方和相等之外, 還有 5 元 2 次平方數組, 但是只滿足兩圈, 剩下 17, 11, 9, 13 與 15 的平方和不等於 1499, 實乃美中不足也。這個問題留給有興趣的讀者, 完成之後, 告訴我們, 將在《幻方與幻圖》一書中, 專題重點介紹。

十、Z 君第九次建議

看到你構作聚五圖非常輕鬆, 能否告訴大家到底這類聚五圖的謎底在哪裡?

聚五圖大揭秘

規律 : 其實楊輝聚五圖是由上、下、左、右 4 個 5 元組與 1 個中心數所組成的。中間圓的 5 個元素, 其外邊的 4 個數分別是上、下、左、右 4 個圓的公用元素。

所以, 我們先求出楊輝聚五圖其 21 個元素的總和等於 231, 而 231 不能被 4 整除。要想滿足被 4 整除均分爲 4 組的條件, 必須減去餘數, 有 5 種情形 :

1. $(231-3)\div 4=57$, 那麼, 3 就是中心數, 幻和是 57。
2. $(231-11)\div 4=55$, 那麼, 11 就是中心數, 幻和是 55。
3. $(231-19)\div 4=53$, 那麼, 19 就是中心數, 幻和是 53。
4. $(231-7)\div 4=56$, 那麼, 中心點數是 7, 幻和是 56。
5. $(231-15)\div 4=54$, 那麼, 中心點數是 15, 幻和是 54。

由於最大元素是 21, 所以只有這 5 種解。

1275 年楊輝的《續古摘奇算法》成書, 至今已有七百多年的歷史, 難道就沒有人發現嗎?

結語

寫完這篇文章之後, 感慨良多, 在 700 年前楊輝竟然做到這麼好的結果, 實屬不易, 況且當時沒有電腦, 只有人腦和算盤, 楊輝真是偉大的數學家! 我們在此提出這個問題, 絲毫沒有吹毛求疵, 貶低楊公的意思, 即使我們不提出這個問題, 日後一定會有人提出來, 所以既然發現了就告訴大家, 並告慰遙居極樂世界的楊公之靈, 此問題已經找到了答案, 並在他的基礎上移動了一步!

楊輝聚五圖真相大白

我們把楊輝聚五圖所使用的 20 個元素 (除了中心點元素之外, 剩下 20 個元素), 排列成 4 行 5 列的矩陣, 就立見分曉：

中心數= 5							中心數= 20					
12	19	6	20	8	65	共	13	6	19	5	17	60
4	21	23	1	16	65	軛	21	4	2	24	9	60
11	18	14	15	7	65		14	7	11	10	18	60
13	2	17	24	9	65		12	23	8	1	16	60
40	60	60	60	40			60	40	40	40	60	
幻和 = 65							幻和 = 60					

行文至此, 不禁想起兩個字『方, 法』:

君請看：把 20 個元素排列到上面的『方』陣裡, 辦『法』就出來了, 所以叫『方, 法』呀!

至此, 真相大白。

Z 君滿臉堆笑說：「哈哈, 受益匪淺, 承教了!」

看到 Z 君一反常態稀有的燦爛笑容, 筆者誠懇地說：「不敢當啊! 今後還有找您麻煩的時

候, 但願多挑毛病, 可不能打退堂鼓啊!」

Z 君高興的說：「挑毛病是我的老本行, 只要發現, 照『挑』不誤!」

附注：李信明教授筆名李學數, 生於新加坡, 在馬來西亞和新加坡讀中、小學, 高中進入中文學校。留學加拿大獲得數學博士學位, 又在美國哥倫比亞大學攻取電腦碩士學位, 1984年獲得史蒂文斯理工大學數學博士。之後, 師從 20 世紀最偉大的數學家格羅滕迪克 (A.Grothendieck, 1928～2014), 他的研究範圍橫跨數學、電腦、圖論、數學史等各個領域, 學識淵博, 文理兼優, 才貫中西, 發表論文 200 餘篇。李學數教授撰寫的《數學和數學家的故事》, 1-10 冊(上海科學技術出版社), 錄入了古今中外數學家攻克數學難題的故事, 並且深入淺出的介紹了數學家所使用的方法、技巧。為後人持續研究架起了橋樑, 提供了線索。是一本充滿正能量, 激勵後人從事數學研究, 不可多得的好書。

參考資料

1. 梁宗巨。世界數學史簡編。遼寧出版社。
2. 梁宗巨。數學家傳略辭典。遼寧出版社。
3. 李學數。數學和數學家的故事。第 7 冊, 上海科技出版社 2017 年 5 月。
4. 梁培基、顧同新。平方幻方與雙重幻方的構造。數學傳播季刊, 13(3), 65-69, 1989。
5. 梁培基。奇妙的平方數與四季數。數學傳播季刊, 41(3), 86-92, 2017。
6. 梁培基、張忠輔。雙重數組方程解。數學通報, 中國數學會, 北師大 1993.3。
7. 梁培基、張航輔、張俠輔。幻方的一種構作方法。雲南大學學報 1989.4。

—本文作者任職中國河南省封丘縣科協—