

行列式計算與幾何定理自動發現

彭翕成 · 陳起航

基於一個幾何圖形，給出若干條件，可推出哪些較深層次的結論？有沒有什麼通用的方法，而不是依靠數學家的奇思妙想或是靈機一動。這是很多人都有興趣的問題。

數學家吳文俊先生認為，有些幾何定理的證明，不單是傳統的歐式方法難以措手，即便是解析法也因計算繁複而無法解決。如果能找到一種機械化的方法比較快捷地證明幾何定理，那麼有了這種手段之後，我們真正的創造力就能專注在新定理的發現。可通過種種途徑，嘗試各種猜想，然後機器驗證，若屬實，則獲得了一條定理。電腦作為計算工具，本質上與紙筆並無差別，但效率上則大有不同。這種借助於電腦發現定理的方法，可稱為機器發明或自動發現。

我們最近發現了一種自動發現幾何定理的方法。這種新方法，首先是採用向量與複數的語言，列方程逐條描述幾何關係，然後利用線性方程組的基礎知識消去向量，得到若干行列式，最後基於行列式計算所得的等式，消去一些我們不感興趣的變數，從而發現一些幾何關係式。這種方法的好處是可以按部就班進行，可用電腦完成，也可人工作業，無需挖空心思去想各種技巧，所以能稱得上機械化的自動發現。下面通過一些具體案例，來介紹這一方法。

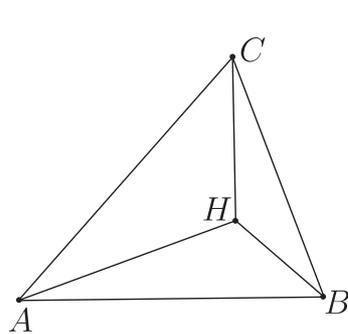


圖 1

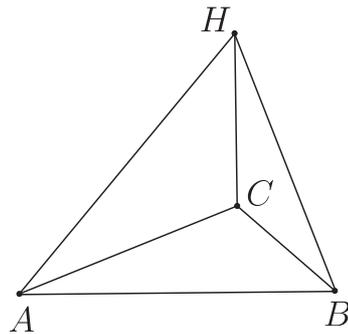


圖 2

例 1: 如圖 1, H 是 $\triangle ABC$ 平面上一點, 且 $AH \perp BC$, $BH \perp CA$, 下面進行自動發現。

步驟 1: 首先採用向量與複數的語言, 列方程逐條描述幾何關係, 並寫成方程組的形式。

設 $\overrightarrow{BC}i = x\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{CA}i = y\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AB}e^{i\theta} = \overrightarrow{HC}z$,

其中 $\frac{|BC|}{|HA|} = x$, $\frac{|CA|}{|HB|} = y$, $\frac{|AB|}{|HC|} = z$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, θ 為 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{HC} 的夾角,

則
$$\begin{cases} x\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}i - \overrightarrow{HC}i = 0 \\ -\overrightarrow{HA}i + y\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}i = 0 \\ \overrightarrow{HA}e^{i\theta} - \overrightarrow{HB}e^{i\theta} + z\overrightarrow{HC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{pmatrix} x & i & -i \\ -i & y & i \\ e^{i\theta} & -e^{i\theta} & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{HA} \\ \overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{HC} \end{pmatrix} = 0.$$

步驟2: 利用線性方程組的基礎知識消去向量 \mathbf{X} , 得到行列式並計算。

得到關於變數 $\mathbf{X} = \{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\}^T$ 的向量方程組
$$\begin{pmatrix} x & i & -i \\ -i & y & i \\ e^{i\theta} & -e^{i\theta} & z \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0,$$
 其

中有 3 個變數 $\{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\}$, 3 個方程; 寫成 $\mathbf{AX} = 0$ 的形式, 根據齊次線性方程組有非零解的充要條件是其係數行列式為零, 所以計算 $|\mathbf{A}| = 0$, 可得 $-x\sin\theta - y\sin\theta - z + xyz = (x + y)\cos\theta = 0$ 。

步驟3: 基於行列式計算結果, 消去若干變數, 得到一些幾何關係式。

因為 $x + y \neq 0$, 所以 $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = \pm 1$, 於是 $CH \perp AB$ 。

若 $\sin\theta = 1$ (如圖1), $\theta = 90^\circ$, H 在 $\triangle ABC$ 內部, $x + y + z = xyz$ 。

若 $\sin\theta = -1$ (如圖2), $\theta = 270^\circ$, H 在 $\triangle ABC$ 內部, $x + y + xyz = z$ 。

說明: 作者本意是希望證明三角形的垂心定理。但不料卻證明了一個三角恒等式。

在銳角 $\triangle ABC$ 中, $x + y + z = xyz$ 等價於 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ 。從作者的實踐來看, 時常會得到一些預想不到的結論。這也是本方法的魅力所在。

例2: 如圖 3, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AB \perp AC$, D 、 E 、 F 分別在 AB 、 AC 、 BC 上, 且 $AD = CE$, $AF \perp BC$, 下面進行自動發現。

設 $\overrightarrow{AF}i = z\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EC} = x\overrightarrow{AC}$, 則 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = (1-x)\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB} = \frac{1}{z}\overrightarrow{AF}i$, $\overrightarrow{BF} = y\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AF} = (1-y)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}i = \overrightarrow{AC}$, 於是

有關於 $\mathbf{X} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}\}^T$ 的向量方程組
$$\begin{pmatrix} 1-y & y & -1 \\ -x & 1-x & -\frac{i}{z} \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0,$$
 其中有 3 個變數, 3

個方程; 寫成 $\mathbf{AX} = 0$ 的形式, 計算行列式 $|\mathbf{A}| = 0$, 可得 $-x + \frac{y}{z} = 1 - x - \frac{1}{z} + \frac{y}{z} = 0$,

所以 $z = 1, x = y$, 於是 $AF = DE, \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|EC|}{|AC|} = \frac{|BF|}{|BC|}$ 。

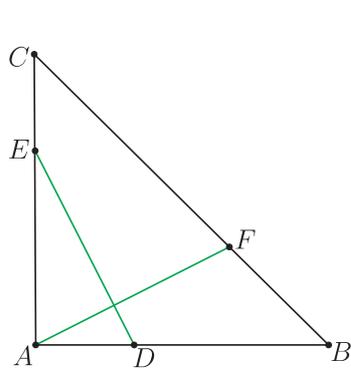


圖3

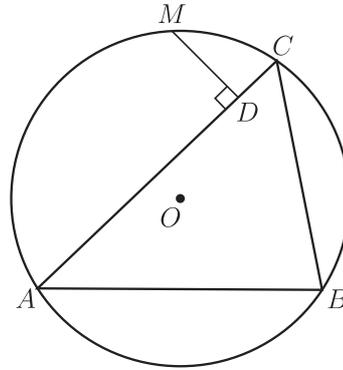


圖4

例3: 如圖4, $\triangle ABC$ 的外接圓弧 ACB 的中點為 M , 自 M 向 AC, CB 中較長的一條引垂線, 設垂足為 D , 下面進行自動發現。

設 $r_1 = e^{iC} = \cos C + i \sin C = u_1 + v_1 i, CD = x, \frac{\overrightarrow{AC}}{b} i = \frac{\overrightarrow{DM}}{m}, \frac{\overrightarrow{CA}}{b} r_1 = \frac{\overrightarrow{CB}}{a}, \overrightarrow{MA} r_1 = \overrightarrow{MB}$, 即 $(\overrightarrow{MD} + \frac{b-x}{b} \overrightarrow{CA}) r_1 = \overrightarrow{MD} + \frac{x}{b} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, 於是關於 $\mathbf{X} = \{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{MD}\}^T$ 的方程組

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{b} & -\frac{1}{m} \\ \frac{1}{a} & \frac{r_1}{b} & 0 \\ 1 & \frac{r_1(b-x)}{b} + \frac{x}{b} & r_1 - 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0,$$

將 \mathbf{X} 看作變數, 有 3 個變數, 3 個方程, 看成 $\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ 的形式, 計算行列式 $|\mathbf{A}| = 0$, 可得 $au_1 - bu_1 + mv_1 - x + u_1x = m - mu_1 + av_1 - bv_1 + v_1x = 0$ 。分別解得

$$v_1 = \frac{-au_1 + bu_1 + x - u_1x}{m}, v_1 = \frac{m(u_1 - 1)}{a - b + x}, \text{ 代入}$$

$$u_1^2 + v_1^2 - 1 = u_1^2 + \frac{-au_1 + bu_1 + x - u_1x}{m} \cdot \frac{m(u_1 - 1)}{a - b + x} - 1 = \frac{(u_1 - 1)(a - b + 2x)}{a - b + x} = 0$$

得 $a - b + 2x = 0$, 所以 $AD = DC + CB$ 。

說明: 這一性質最早是數學大師阿基米德 (約西元前 287~212) 發現, 因此又稱為阿基米德折線定理。作者並不知道當年阿基米德是如何發現這一定理。但通過本文的方法, 普通人也能重新發現。事實上, 利用此方法, 我們還重新發現了十餘條數學家發明的定理。

例 4: 如圖 5, 四邊形 $ABCD$, $BC = CD = DA = \frac{1}{2}AB$ 。下面進行自動發現。

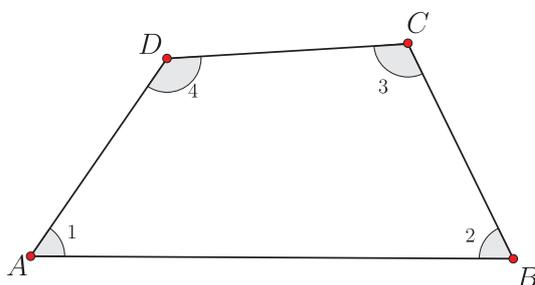


圖 5

設 $|AB| = 2, |BC| = |CD| = |DA| = 1, \frac{\overrightarrow{AB}}{2}r_1 = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}r_2 = \frac{\overrightarrow{BA}}{2},$
 $\overrightarrow{CD}r_3 = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}r_4 = \overrightarrow{DC}, r_i = e^{i\alpha_i} = \cos \alpha_i + i \sin \alpha_i = u_i + v_i i, \text{ 其中 } i = 1, 2, 3, 4,$
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0。$

於是有关于 $\mathbf{X} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}\}^T$ 的方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_4 \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0,$$

其中有 4 個變數, 5 個方程; 從 5 個方程中任取 4 個, 有 5 種可能, 每種可能都寫成 $\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ 的形式, 分別計算行列式 $|\mathbf{A}| = 0$, 可得 $-1 + r_3 - 2r_2r_3 + r_1r_2r_3 = -1 + 2r_2 - r_1r_2 + r_1r_2r_4 = -2 + r_1 - r_1r_4 + r_1r_3r_4 = -1 + r_4 - r_3r_4 + 2r_2r_3r_4 = -1 + r_1r_2r_3r_4 = 0。$

根據複數性質, 由 $-1 + r_4 - r_3r_4 + 2r_2r_3r_4 = 0$ 得 $-1 + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3r_4} + 2\frac{1}{r_2r_3r_4} = 0,$
 即 $2 - r_2 + r_2r_3 - r_2r_3r_4 = 0。$ 將 $r_4 = \frac{1}{r_1r_2r_3}$ 代入得 $1 - 2r_1 + r_1r_2 - r_1r_2r_3 = 0,$
 解得 $r_3 = \frac{1 - 2r_1 + r_1r_2}{r_1r_2}。$ 代入 $-1 + r_3 - 2r_2r_3 + r_1r_2r_3 = 0$
 得 $1 - 2r_1 - 2r_2 + 5r_1r_2 - 2r_1^2r_2 - 2r_1r_2^2 + r_1^2r_2^2 = 0,$ 即 $\frac{1}{r_1r_2} - 2\frac{1}{r_1} - 2\frac{1}{r_2} + 5 - 2r_1 - 2r_2 + r_1r_2 =$
 $0,$ 即 $4\left(\frac{\frac{1}{r_1} + r_1}{2} + \frac{\frac{1}{r_2} + r_2}{2}\right) - 2\frac{r_1r_2}{2} = 5,$ 即 $4(\cos A + \cos B) - 2\cos(A+B) = 5。$

由行列式計算得到 5 個等式, 有多種消元的可能。因此可得到更多的結論, 留與讀者證明。

(1) $1 - r_3 - r_4 - r_3r_4 - r_3^2r_4 - r_3r_4^2 + r_3^2r_4^2 = 0,$ 即 $2\cos(C+D) - 2(\cos C + \cos D) = 1。$

- (2) $2-r_1-2r_4+5r_1r_4-2r_1^2r_4-r_1r_4^2+2r_1^2r_4^2=0$, 即 $4 \cos A + 2 \cos D - 4 \cos(A + D) = 5$ 。
 (3) $r_2-2r_4+3r_2r_4-2r_2^2r_4+r_2r_4^2=0$, 即 $2 \cos D - 4 \cos B + 3 = 0$ 。
 (4) $-r_1+2r_3-3r_1r_3+2r_1^2r_3-r_1r_3^2=0$, 即 $2 \cos C - 4 \cos A + 3 = 0$ 。

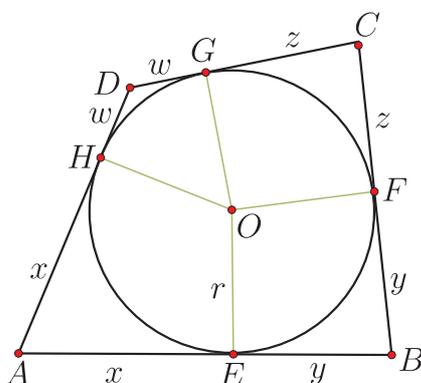


圖 6

例 5: 如圖 6, 圓 O 內切於四邊形 $ABCD$, 圓 O 半徑為 r , 與 AB 、 BC 、 CD 、 DA 分別切於 E 、 F 、 G 、 H , 下面進行自動發現。

$$\text{設 } \vec{OE} = \frac{y\vec{OA} + x\vec{OB}}{x+y}, \frac{\vec{OE}}{r} \cdot i = \frac{\vec{AB}}{x+y} = \frac{\vec{OB} - \vec{OA}}{x+y}, \frac{y\vec{OA} + x\vec{OB}}{r} \cdot i = \vec{OB} - \vec{OA},$$

即 $(yi + r)\vec{OA} + (xi - r)\vec{OB} = 0$, 同理 $(zi + r)\vec{OB} + (yi - r)\vec{OC} = 0$, $(wi + r)\vec{OC} + (zi - r)\vec{OD} = 0$, $(xi + r)\vec{OD} + (wi - r)\vec{OA} = 0$, 於是有關於 $\mathbf{X} = \{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}\}^T$

的方程組
$$\begin{pmatrix} r+iy & -r+ix & 0 & 0 \\ 0 & r+iz & -r+iy & 0 \\ 0 & 0 & r+iw & -r+iz \\ -r+iw & 0 & 0 & r+ix \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0$$
, 將 \mathbf{X} 看作變數, 有 4 個變數, 4 個方程,

看成 $\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ 的形式, 計算行列式 $|\mathbf{A}| = 0$, 可得 $r^2x + r^2y + r^2z + r^2w - wxy - wxz - wyz - xyz = 0$, 即 $r = \sqrt{\frac{wxy + wxz + wyz + xyz}{w + x + y + z}}$ 。

本文所給方法既能發現, 同時也證明了該幾何性質。本文所舉例子都是手工操作完成, 若採用電腦輔助, 效率會大大提高, 特別是借助電腦的消元方法, 可得到更多的定理。事實上, 我們已經程式設計實現了這一演算法, 發現了幾百個性質。即使是一些經典幾何問題, 使用這一方法, 又有新的發現。

—本文作者彭翕成任教中國華中師範大學國家數字化學習工程技術研究中心, 陳起航任教中國武漢信諾教育光谷校區—