數學傳播　44卷2期, pp. 72-77

我的三次方程式公式解之旅

周伯欣

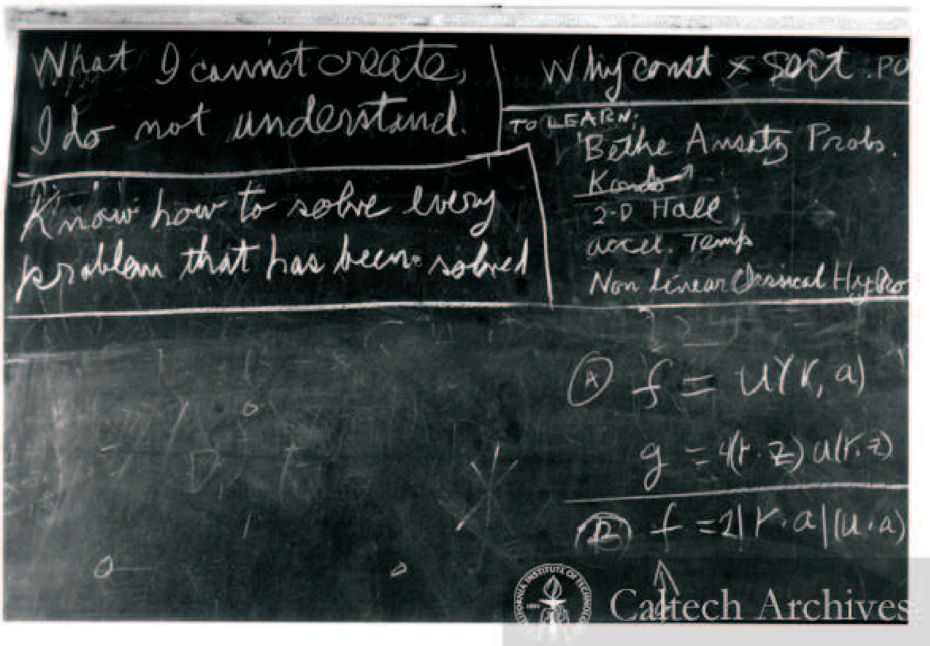

圖 1: 加州理工學院 Feynman[1] 研究室中的黑板。Feynman 在左上角寫著:

"*What I cannot create, I do not understand.*"

(我不能創造的東西, 我就不瞭解)

1. 一道因式分解題目

張海潮教授在 [1] 中回顧了他在初三時一起與父親分解 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的往事, 透過此文可窺見一位少年數學家的成長歷程。但在 [2] 中, 張海潮教授對於當年這個讓父子共同鑽研的式子的評價卻是「這個分解完全是基於偶然, 其實並沒有什麼教學的價值。」令人詫異的是, 楊維哲教授在 [3] 中對此式的評價則是「這幾乎是關於三元的需要熟悉的唯一的公式 !」[2]但

[1]Richard Phillips Feynman (1918∼1988), 美國理論物理學家, 量子電動力學創始人之一。由費曼提出或完善的費曼圖、費曼規則 (Feynman rules) 和重整化計算方法是研究量子電動力學和粒子物理學的重要工具。

[2]一個題外話, 楊維哲教授行文之時好用驚嘆號。如果看到一篇數學文章出現大量驚嘆號, 十之八九出自楊維哲教授之手。

未說明爲何需要熟悉。北一女中的陳建煒老師對於此式的見解與張教授不同, 在 [4] 中給出了此式所謂的「來龍」與「去脈」: 如何分解以及此式在算幾不等式的應用。

爲敘述方便, 在本文中我依循楊維哲教授的稱法, 將 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 稱爲「三元三次輪換式」。

這裡我也談談如何分解三元三次輪換式。與陳老師不同的地方在於, 他所著眼的出發點與張教授相同, 仍然繞著對稱多項式談。[4] 中給出的推導, 用到了三次方程式的根與係數關係。然而, 在高中數學教材中[3], 三元三次輪換式早早就會出現, 甚至在銜接課程中的因式分解單元就會遇到。而三次方程式的根與係數關係至少要到第 1 冊的第 2 章才會正式提到。如果學生的先備知識不足, 我們如何向一個只學了課內教材 $x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$ 的普通程度學生介紹此式的分解呢?

辦法仍然是有的, 而且應該也不會超出學生能力太多。

對於三元三次輪換式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

首先只看 x^3 與 y^3, 如果直接套用 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, 基本上無法帶給我們什麼進展。我們轉而考慮「配立方」, 也就是

$$(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+z^3-3x^2y-3xy^2-3xyz.$$

此時根據和的立方公式得

$$(x+y)^3+z^3-3x^2y-3xy^2-3xyz.$$

我們對前兩項使用立方和公式, 得

$$(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-zx-yz+z^2)-3x^2y-3xy^2-3xyz.$$

後頭的 $-3x^2y-3xy^2-3xyz$ 看起來不好處理, 但如果仔細觀察, 可以發現各項都有公因式 $-3xy$, 於是將之提出, 得到

$$(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-zx-yz+z^2)-3xy(x+y+z).$$

這時兩項都有公因式 $x+y+z$, 我們可以因式分解了! 那麼有

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

此式的一個應用是證明 3 元算幾不等式, 在 [4] 中已有充分的說明, 此處不再贅述。

然而, 三元三次輪換式的應用僅僅如此嗎? 不! 一個簡單的想法竟引領我走上一條得出三次方程式公式解的神奇捷徑。

[3]無論是 88 課綱、95 暫綱、99 課綱, 還是即將實施的 108 課綱皆然。

2. 三次方程式的 Cardano[4]公式

2.1. 少年 Mark Kac 的困惑

數學家 Mark Kac 曾在其自傳“*Enigmas of Chance: An Autobiography*”[5] 中回憶 16 歲時的他對於三次方程式的 Cardano 公式經典推導方式是怎樣的困惑:

> (我) 拿起一本暑期數學讀物, 打開在三次方程式這一節, 讀到第一行我就被打敗了。開頭這樣寫著:「令 $x = u + v$。」因爲我知道答案是兩個立方根之和, 所以令 $x = u + v$, 顯然是預期這樣的解答形式, 但是整體說起來, 我覺得這對學習者是不公平的。$\cdots$ 在不了解背後的動機之下, 我無法接受形式的推演。直接令, 而不說明爲什麼要這樣做, 這對我是一種冒犯。

Kac 這麼厲害的人物都對這樣的做法困惑, 我也不例外。依稀記得是高一上學期的時候翻了竹中數學科辦公室裡的教師手冊第 1 冊, 當時看完只覺得很神奇, 認定是天才的作法, 自認沒本事獨力想出來。

撰寫這篇文章前, 我問了幾個同樣也是學數學的朋友:「你當初學三次方程式公式解的時候, 不會覺得一開頭那招『令 $x = u + v$』太神奇了嗎?」得到的回答泰半是「不知道」、「老師說那樣算就可以解出來, 所以就學起來」、「確實覺得很神奇, 但是就(語塞) $\cdots$ 學起來」。而當我問到「那你知不知道當時 Cardano 怎麼想出來? 或是爲什麼要這樣做?」這話題就聊不下去了。其實早在當年, 還是高中生的我就下定決心要弄懂經典解法的動機, 或是給一個能說服自己的自然推導方式。然而十多年過去, 我自己還是沒有想出來, 雖然也看了許多相關書籍或文章, 但仍然沒有解答我本來的疑惑。

2.2. 可以繼續因式分解嗎?

請允許我暫且回到三元三次輪換式的分解來。人的思路不像數學推理是線性的, 但正是這樣的「於無聲處聽驚雷」才顯得數學有趣。

前面談了三元三次輪換式的分解爲

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

(此處改用 a,b,c 是爲了等等討論方程式時行文的方便) 我不太滿意這個分解, 因爲 $a+b+c$ 是一次式, 但 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 卻是二次式, 次數不大均衡, 看起來不美。不過我也明白, 在利用三元三次輪換式證明 3 元算幾不等式時, 是倚仗著 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

---

[4] Girolamo Cardano (1501∼1576), 義大利文藝復興時期的學者, 主要成就在數學、物理、醫學方面。

[5] 中譯本書名爲《機運之謎: 數學家 Mark Kac 的自傳》, 由蔡聰明教授翻譯, 三民書局出版。以下引文錄自蔡教授之中譯本。

在實數域上的正定性。所以想在實數的範疇中分解 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$, 是辦不到的。所以如果想繼續分解, 那就得到複數的世界去。

首先對 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 中的 a 硬配方,

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc\\&=\Big[a^2-2\cdot a\cdot\Big(\frac{b+c}{2}\Big)+\Big(\frac{b+c}{2}\Big)^2\Big]-\Big(\frac{b+c}{2}\Big)^2+b^2+c^2-bc\\&=\Big(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\Big)^2+\frac{3}{4}(b^2-2bc+c^2)\\&=\Big(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\Big)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2,\end{aligned}$$

爲了要在複數域上分解, 利用恆等式 $m^2+n^2=(m-ni)(m+ni)$ 得到

$$\begin{aligned}&\Big(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\Big)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2\\&=\Big(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\Big)^2-\Big[\frac{\sqrt{3}i}{2}(b-c)\Big]^2\\&=\Big[\Big(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\Big)-\frac{\sqrt{3}i}{2}(b-c)\Big]\Big[\Big(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\Big)+\frac{\sqrt{3}i}{2}(b-c)\Big]\\&=\Big[a+\Big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\Big)b+\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\Big)c\Big]\Big[a+\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\Big)b+\Big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\Big)c\Big].\end{aligned}$$

若記 1 的三次方根 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$, 於是就有

定理 1: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega^2b+\omega c)(a+\omega b+\omega^2c)$。

2.3. 從輪換式的分解式推出三次方程式的公式解

衆所皆知, 任意一個三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 都可以經一次變換 $x=z-\dfrac{b}{3a}$ 而化爲缺二次項之形式 (參考 [5]):

$$z^3+pz+q=0.$$

令此方程式的三根分別爲 z_0, z_1, z_2, 則由因式定理可知

$$z^3+pz+q=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2).$$

同時比較此分解式與三元三次輪換式的分解式, 兩者有高度的類似性:

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a+\omega^2b+\omega c)(a+\omega b+\omega^2c),\\z^3+pz+q&=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2).\end{aligned}$$

令 $a=z$, $-3bc=p$, $b^3+c^3=q$, 則方程式的三根就是

$$z_0=-b-c,\quad z_1=-\omega^2 b-\omega c,\quad z_2=-\omega b-\omega^2 c.$$

唯一的工作只剩將 b,c 以 p,q 表示出來, 這樣就解出三次方程式了! 同時, 我還要提請讀者留意, 透過這樣的對比, 某種程度來說側面反映出經典解法「令 $x=u+v$」這一步是合宜的。當我做到這邊時, 剎那間, 十多年來的疑惑一掃而空!

將條件式

$$\begin{cases}-3bc=p\\ b^3+c^3=q\end{cases}$$

改寫爲

$$\begin{cases}bc=-\dfrac{p}{3}\\ b^3+c^3=q\end{cases},$$

但我更偏好聯立方程式中各項未知數的次數都相同(大概出自於美的協調性), 所以將其中的第一條左右同時立方, 得到

$$\begin{cases}b^3\cdot c^3=-\dfrac{p^3}{27}\\ b^3+c^3=q\end{cases}.$$

看到兩數相加 (和) 與相乘 (積), 不難聯想到二次方程式的根與係數關係, b^3 與 c^3 就是二次方程式

$$t^2-qt-\frac{p^3}{27}=0$$

的兩根。利用二次方程式的公式解可輕易求出兩根

$$t=\frac{-(-q)\pm\sqrt{(-q)^2-4\cdot 1\cdot\Big(-\dfrac{p^3}{27}\Big)}}{2\cdot 1}=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2+\Big(\frac{p}{3}\Big)^3}.$$

基於 b^3 與 c^3 在原來條件式中的對稱性, 逕取

$$b^3=\frac{q}{2}+\sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2+\Big(\frac{p}{3}\Big)^3},\quad c^3=\frac{q}{2}-\sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2+\Big(\frac{p}{3}\Big)^3}.$$

從而解出

$$b=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2+\Big(\frac{p}{3}\Big)^3}},\quad 或\quad \omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2+\Big(\frac{p}{3}\Big)^3}},\quad 或\quad \omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2+\Big(\frac{p}{3}\Big)^3}},$$

$$c=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2+\Big(\frac{p}{3}\Big)^3}},\quad 或\quad \omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2+\Big(\frac{p}{3}\Big)^3}},\quad 或\quad \omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\Big(\frac{q}{2}\Big)^2+\Big(\frac{p}{3}\Big)^3}}.$$

根據原來條件式中的 $bc=-\dfrac{p}{3}$, 可知 b 與 c 的適當搭配應該是

$$
\begin{aligned}
(b,c)&=\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right),\\
\text{或}\quad&\left(\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right),\\
\text{或}\quad&\left(\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right).
\end{aligned}
$$

而不論我們選哪一組, 都可以得到三次方程式 $z^3+pz+q=0$ 的三個根。即

定理 2: (Cardano) 三次方程式 $z^3+pz+q=0$ 的三個根分別爲

$$
\begin{aligned}
&-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\\
&-\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\\
&-\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.
\end{aligned}
$$

而我的三次方程式公式解之旅也到此暫時告一段落。

儘管旅程相當漫長, 中途似乎逗留不少時間。但回首整個過程, 從義大利出發, 接著欣賞了不少法蘭西風光: Lagrange 的預解式、Vandermonde 的根的置換以及最壯麗的 Galois 理論, 令人回味無窮! 從前總覺得 Cardano 公式的來由很神奇, 如今似乎也沒那麼困難了。

致謝: 本文撰寫過程中, 感謝連威翔先生對計算草稿的審閱與討論。

參考文獻

1. 張海潮。父親幫我因式分解。教育部高中數學學科中心電子報, 第44期。
2. 張海潮。數學放大鏡 — 暢談高中數學, 〈$x^3+y^3+z^3-3xyz$ 因式分解的故事〉。三民書局, 2013。
3. 楊維哲。湖濱高中數學講義之二　代數。五南出版, 2012。
4. 陳建燁。也談「$a^3+b^3+c^3-3abc$ 因式分解」的教學。教育部高中數學學科中心電子報, 第105期。
5. L. E. Dickson, *First Course in the Theory of Equations*, John-Wiley & Sons, 1921.
6. Dan Kalman, *Uncommon Mathematical Excursions: Polynomia and Related Realms*, The Mathematical Association of America, 2009.

—本文作者現任教於台北鵬展文理補習班, 並主持「宇宙數學教室」部落格—