數學傳播 44卷2期, pp. 58-61

費氏數列與等比數列的交會處

張鎮華

你我相逢在黑夜的海上,
你有你的, 我有我的, 方向;
你記得也好,
最好你忘掉,
在這交會時互放的光亮!

— 徐志摩《偶然》

1. 偶然的交會

費波那契 (Fibonacci) 引進的費氏數列現在已經家喻戶曉。這個數列 $\langle F_n\rangle$ 用遞迴的方式定義爲 $F_0=0$、$F_1=1$、當 $n\geq 2$ 時 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$。它的前面 12 項是 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89。張進安老師 [1] 發現一個可愛的結果:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{10^{n+1}}=\frac{1}{89}, \tag{1}$$

其中 89 是一個費波那契數。

他的這個發現, 有一段歷程。洪萬生教授翻譯理查·菲利普 (Richard Phillips) 著的《數字邏輯 101》一書, 對 89 的介紹 :「89 是一個質數, 也是一個費波那契數。八十九分之一的十進位小數爲 $0.01123595\cdots$, 很奇特的, 這個數以費波那契數爲開端, 但是此一模式被 9 破壞。這是一個循環小節有 44 位$\cdots$」可是進安老師不認爲費氏數列的規則有被破壞, 原來出現的 8 加上下一項 13 進位過來的 1, 就剛好是 9。他猜測, 以下的每一項也都遵循這個規則, 也就是 (1) 式成立。

他先做了一些實驗, 確認加到 38 項都對, 因此相信這個結果會對。然後他在網路上找到 Robert Minor 用矩陣的方法確實證明了 (1) 式成立。事實上, 這個結果 Stancliff [2] 在 1953 年就證明過了。他並用手機計算了一些類似的計算, 猜想可以有更進一步的公式 (這裡的寫法略異, 但等價於原式):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{10^{k(n+1)}}=\frac{1}{10^{2k}-10^k-1}. \tag{2}$$

他也用高中生常用的求級數和的方法算出 (這裡的寫法略異, 但等價於原式):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^{n+1}} = 1. \tag{3}$$

他最後問道, 是否下面的式子也會對 (這裡的寫法略異, 原寫法筆誤):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{r^{n+1}} = \frac{1}{r^2 - r - 1}. \tag{4}$$

對哪一些 r 會對?

他並指出 $r = (\sqrt{5} \pm 1)/2$ 時是發散的, $r = -2$, $r = -3$ 是收斂的。

2. 費氏數列 vs 等比數列

其實, 利用他計算 (3) 式所用「高中生常用的求級數和的方法」, 就可以算出 (4) 式, 說明如下。假設 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{r^{n+1}}$ 收斂到 S, 則有

$$S = \frac{F_0}{r} + \frac{F_1}{r^2} + \frac{F_2}{r^3} + \frac{F_3}{r^4} + \cdots + \frac{F_n}{r^{n+1}} + \cdots,$$

等式兩邊同乘以 r 得

$$rS = \frac{F_0}{1} + \frac{F_1}{r} + \frac{F_2}{r^2} + \frac{F_3}{r^3} + \frac{F_4}{r^4} + \cdots + \frac{F_{n+1}}{r^{n+1}} + \cdots,$$

第二式減去第一式, 並利用初始值 $F_0 = 0$、$F_1 = 1$ 得

$$\begin{aligned}(r-1)S =& \frac{1}{r} + \frac{F_2 - F_1}{r^2} + \frac{F_3 - F_2}{r^3} + \frac{F_4 - F_3}{r^4} + \cdots + \frac{F_{n+1} - F_n}{r^{n+1}} + \cdots \\ =& \frac{1}{r}\Big(1 + \frac{F_0}{r} + \frac{F_1}{r^2} + \frac{F_2}{r^3} + \cdots + \frac{F_{n-1}}{r^n} + \cdots\Big) = \frac{1}{r}(1+S).\end{aligned}$$

遂有 $(r^2 - r)S = 1 + S$, 也就是 $(r^2 - r - 1)S = 1$, 從而 $S = \frac{1}{r^2 - r - 1}$。

很容易可以看出來, 當 r 很小, 例如 $r = 0.1$ 時, $\frac{F_n}{0.1^{n+1}} \geq 10^{n+1}$。因爲無窮等比級數 $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{n+1} = \infty$, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{r^{n+1}} = \infty$。也就是說, (4) 式對於某些 r 並不成立, 要記得前述的推導是基於 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{r^{n+1}}$ 收斂的假設。

剩下的問題是, 對於那些 r, (4) 式會成立?

解決問題的基本方法是先求出無窮級數的部分和, 再看部份和是否會有極限。這只要將前述的推導略爲修改, 求和時只求部分和即可。也就是:

$$S_n = \frac{F_0}{r} + \frac{F_1}{r^2} + \frac{F_2}{r^3} + \frac{F_3}{r^4} + \cdots + \frac{F_n}{r^{n+1}},$$

等式兩邊同乘以 r 得

$$rS_n=\frac{F_0}{1}+\frac{F_1}{r}+\frac{F_2}{r^2}+\frac{F_3}{r^3}+\frac{F_4}{r^4}+\cdots+\frac{F_n}{r^n},$$

第二式減去第一式, 並利用初始值 $F_0=0$、$F_1=1$ 得

$$\begin{aligned}(r-1)S_n=&\frac{1}{r}+\frac{F_2-F_1}{r^2}+\frac{F_3-F_2}{r^3}+\frac{F_4-F_3}{r^4}+\cdots+\frac{F_n-F_{n-1}}{r^n}-\frac{F_n}{r^{n+1}}\\=&\frac{1}{r}\Big(1+\frac{F_0}{r}+\frac{F_1}{r^2}+\frac{F_2}{r^3}+\cdots+\frac{F_{n-2}}{r^{n-1}}-\frac{F_n}{r^n}\Big)\\=&\frac{1}{r}\Big(1+S_n-\frac{F_{n-1}}{r^n}-\frac{F_n}{r^{n+1}}-\frac{F_n}{r^n}\Big),\end{aligned}$$

遂有 $(r^2-r)S_n=1+S_n-\dfrac{F_{n-1}}{r^n}-\dfrac{F_n}{r^{n+1}}-\dfrac{F_n}{r^n}$, 也就是

$$(r^2-r-1)S_n=1-\frac{F_{n-1}}{r^n}-\frac{F_n}{r^{n+1}}-\frac{F_n}{r^n},$$

從而可以知道

$$S_n=\frac{1}{r^2-r-1}\Big(1-\frac{F_{n-1}}{r^n}-\frac{F_n}{r^{n+1}}-\frac{F_n}{r^n}\Big).$$

所以問題的關鍵是 $\dfrac{F_n}{r^n}$ 的極限到底是多少?

幸運的是, 其實我們可以算出 F_n, 也就是可以用 n 表示出 F_n。這有很多種方法, 底下是一種降階法。

我們希望找到兩個數 a 和 b 使得遞迴式 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ 可以寫爲

$$F_n-aF_{n-1}=b(F_{n-1}-aF_{n-2}),\tag{5}$$

能這樣做的好處是, 如果令$G_n=F_n-aF_{n-1}$, 那麼費氏數列的遞迴關係就等價於一階遞迴關係

$$G_1=1、\quad G_n=bG_{n-1}$$

這其實是以 b 爲公比的等比數列, 也就是 $G_n=b^{n-1}$, 其中 $n\geq 1$。所以就知道

$$F_n=aF_{n-1}+b^{n-1},\ \text{其中 } n\geq 1。$$

反覆使用此遞迴關係就能得到

$$\begin{aligned}
F_n =& aF_{n-1} + b^{n-1} \\
=& a(aF_{n-2} + b^{n-2}) + b^{n-1} = a^2F_{n-2} + ab^{n-2} + b^{n-1} \\
=& a^2(aF_{n-3} + b^{n-3}) + ab^{n-2} + b^{n-1} = a^3F_{n-3} + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1} \\
& \vdots \\
=& a^nF_0 + a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} \\
=& \frac{a^n - b^n}{a - b}.
\end{aligned}$$

回到一開頭, 我們想要找到兩個數 a 和 b 使得 (5) 式成立, 將式子整理就得到 $F_n = (a+b)F_{n-1} - abF_{n-2}$, 所以我們只要使得 $a+b=1$、$ab=-1$就可以了。也就是說, 其實 a 和 b 是方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ 的兩個根, 不妨假設 $a \geq b$, 則

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\text{、}\quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618,$$

也就是說

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

這個公式一般稱為 Binet 公式, 雖然更早之前 Abraham de Moivre 和 Daniel Bernoulli 就已經知道這個公式 [3]。

這顯示, 費氏數列其實是兩個等比數列的差, 第一個等比數列的首項是 $1/\sqrt{5}$、公比是 $a \approx 1.618$, 所以逐漸上升到無窮大, 第二個等比數列的首項是 $1/\sqrt{5}$、公比是 $b \approx 0.618$, 所以逐漸趨近於 0, 而可忽略。

因此, $\langle F_n/r^{n+1}\rangle$ 也是兩個等比數列的差, 第一個等比數列的首項是 $1/\sqrt{5}r$、公比是 a/r, 第二個等比數列的首項是 $1/\sqrt{5}r$、公比是 b/r。由無窮等比級數的知識, 可以知道 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{r^{n+1}}$ 收斂若且唯若 $|r| > a$, 而收斂時的值是

$$\frac{1/\sqrt{5}r}{1-a/r} - \frac{1/\sqrt{5}r}{1-b/r} = \frac{1}{\sqrt{5}(r-a)} - \frac{1}{\sqrt{5}(r-b)} = \frac{(r-b)-(r-a)}{\sqrt{5}(r-a)(r-b)} = \frac{1}{r^2-r-1},$$

這就得到 (4) 的答案。

參考文獻

1. 張進安。$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i}{10^i} = \frac{10}{89}$ 的探究與推廣。數學傳播季刊, 44(1), 89-93, 2020。
2. Fenton Stancliff, A curious property of a_{ii}, *Scripta Mathematica* 19 (1953), 126.
3. Eric W. Weisstein, *Binet's Fibonacci Number Formula*, MathWorld.

—本文作者為台灣大學數學系名譽教授—