數學傳播 44卷2期, pp. 32-57

理論與計算的結合 — 迭代法

林琦焜

謹將此文獻給李育嘉教授 70 歲生日

1. 前言

『眞正有效率的高速計算, 不論在非線性偏微分方程領域或是其他很多困難尚無法探索的領域, 都提供了推動數學各方面進步所需要的啓發。』

『計算可以提示我們到底眞相是甚麼。』

— John von Neumann (1903~1957) —

逐步逼近法 (method of successive approximation) 或疊 (迭) 代法 (method of iteration[1]) 是數學中重要的組成部分。古希臘人 (阿基米德) 用它來逼近圓面積, 牛頓根據它來找函數的零點 (就是一般熟悉的牛頓法)。Cauchy, Liouville 與 Picard 運用它來構造微分方程的解, 而計算數學則是天天都在用。迭代法的意義在於提供了一個系統步驟的演算法[2], 藉此得到一個確定的答案。歷史上最著名 (也是最悠久) 的演算法就屬歐幾里得輾轉相除法 (Euclidean algorithm) 以求得兩個自然數的最大公約數。儘管這個特殊的演算法已經有悠久的歷史但一般的演算法卻是等到 20 世紀 30 年代由於計算機的發明才有明確的定義與記載。

所謂迭代, 簡單而言就是對某個初始值 x_0 反復地將函數 (算子或變換) T 作用上去從而得出一串數列 (將 T 視爲公比就可以想像成等比數列!)

$$x_0, \quad x_1 = T(x_0), \quad \cdots \quad x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \quad \cdots \tag{1}$$

對數學家而言他們關心的是這一串數列是否收斂到一固定值, 也就是定點或不動點 (fixed point) 是否存在的問題, 而這正是數學分析最核心的主題。如果 T 略爲複雜我們很快就發現傳統的分析方法不敷使用。這也是爲什麼 John von Neumann 提倡要讓電子計算機變得更加有效率、快速且更有彈性, 如此使用這些新的電子計算機的關鍵技術便是有可能, 而且最終可以促進數

[1] 疊 (迭) 代 (iteration), 字源是拉丁文 iterare 意思是《再造》。

[2] 演算法或算法 (algorithm) 這個字源於第九世紀波斯數學家兼天文學家花拉子模 (Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, 780 ~850), 這個字是從同一個 al-Khwarizmi 的名字而來。他在公元 825 年左右寫了一本影響深遠的《代數對話錄》。這個字現在被拼寫爲“algorithm” 而不是更精確的“algorism”, 可能是由於和“算術 (arithmetic)”相關而來的。另外值得一提的是“代數 (algebra)” 這個字就是源自這本書的書名 (阿拉伯文, al jabr)。

學分析的重要進展。高速計算機可以出色地完成大量的重複運算, 這使得原先那些由於太過複雜而難以處理的問題現在都可以由計算機直接給出其數值解。計算機的這一用途幫助所有的應用數學取得了引人注目的成就, 並且還意義深遠地改變了我們對甚麼是 (令人滿意的) 數學的解之概念。我個人深刻體會一個進步的數學系 (特別是應用數學系) 應該將計算的能力之培養引入到我們的教學。例如, 微積分搭配 (0學分) 微積分軟體、其他的基礎課 (線性代數、微分方程, $\cdots$) 也是如此, 訓練我們數學系的學生熟悉 Maple, Mathematica, Wolfram Alpha $\cdots$ 等套裝軟體。

逐步逼近法可追朔到 Liouville (1938) 處理二階線性微分方程, 而後有 J. Caqu'e (1864)、L. Fuchs (1870)、G. Peano (1888)。但最成功的則是 Emile Picard (1890) 將之推廣至非線性微分方程, 因此特別將之稱爲 Picard 方法。爾後將 Picard 的方法加以一般化將逐次逼近抽象化爲算子的迭代則是波蘭數學家 Stefan Banach (1892∼1945) 之貢獻, 我們稱之爲 Banach 定點定理 (Banach Fixed Point Theorem)。這個定理是數學美的典型代表; 假設條件簡潔、結論重要、證明直接不拐彎抹角而且有廣泛的應用。愛因斯坦曾經提出 :『一切科學的偉大目標是要從盡可能少的假設或公理出發, 通過邏輯的演繹, 涵蓋盡可能多的經驗事實。』一個有品味的數學家會感覺一個領域比另一個領域更具吸引力, 那是因爲他們發現它更美, 並且會尋求漂亮的方法而竭力避免那些笨拙或醜陋的論證方式。

一戰期間 (1916) 還在服役中的 Hugo Steinhaus (1887∼1972) 有一天在去大學取郵件的路上, 碰巧 (實際上是刻意的) 聽到兩個數學系的學生談論《*Lebesgue 測度*》於是 Steinhaus 主動向前自我介紹, 而這兩個學生正是 Stefan Banach 與 Otto Nikodym (1887∼1974)。之後他們就有固定的聚會並決定成立數學社, 最終在 1920 年成爲波蘭數學會。在首次見面之後沒多久 Steinhaus 將他正在思索卻無法克服的問題告訴 Banach, 過幾日 Banach 就把如何找到反例 (counterexample) 的想法解釋給 Steinhaus, 雖然戰爭延緩了這篇文章的發表但卻開啟了兩人長期合作與友誼。而見證他們的友誼就是泛函分析 (Functional Analysis) 四大定理中的 Banach-Steinhaus 定理或一致有界定理 (Uniform Boundedness Theorem) 另外著名的期刊 Studia Mathematica 就是他們兩人創辦的, 這是泛函分析草創時期最重要的期刊之一。除了學術研究之外, 事實上也是 Steinhaus 的緣故, Banach 才遇見他生命中的另一半。

Stefan Banach 是二十世紀上半葉波蘭數學輝煌歷史的創始人之一, 他同時也是泛函分析的開拓者, 這可由 Banach 空間、Hahn-Banach 定理、Banach-Alaoglu 定理, 還有 Banach 定點定理 $\cdots$ 等視出一些端倪。1930∼1940年間 Stefan Banach 大部分的工作都是在咖啡廳完成的, 隨著 Banach、Steinhaus、Nikodym 等人在數學上的貢獻, 也使得他們聚會的地點蘇格蘭人咖啡廳 (Scottish Coffee) 成爲數學史上最著名的咖啡廳, 而他們討論之後所記錄下來的筆記本就是 The Scottish Book [6]。

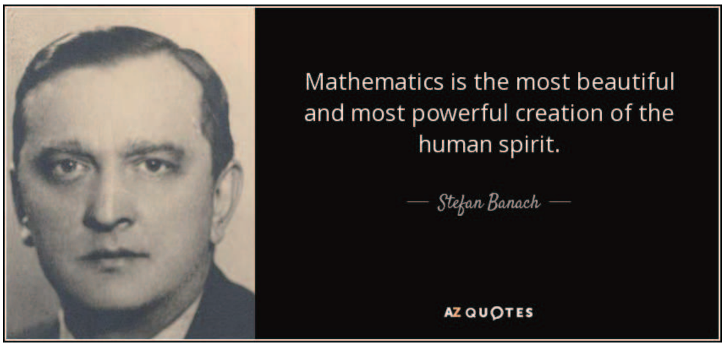

圖 1: Stefan Banach (1892∼1945).

2. 從牛頓法談起

談迭代法當然要從牛頓法 (Newton's method) 或 Newton-Raphson's method 開始, 這可說是逐步逼近法之濫觴, 幾乎所有的計算數學與數值方法都是從這個例子出發。既然要求解首先必須確定解的存在性。

定理 2.1 (**勘根定理**): 若 $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ 爲一連續函數且滿足 $f(a)f(b)<0$, 則由連通性知必存在 c 介於 a、b 之間使得 $f(c)=0$, 也就是說 c 爲函數$f(x)$ 的一個零根。

將 x-軸上下平移, 很容易看出勘根定理相當於以下的中間值定理 (Intermediate value theorem) 也稱爲 Bolzano[3] 中間值定理。

定理 2.2 (Bolzano **中間值定理**): 若 $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ 爲一連續函數且 $f(a)\neq f(b)$, k 爲介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的任意數, 則存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=k$。

Bolzano 中間值定理與微積分基本定理一樣其內在本質是連通性 (connectedness), 這是一個拓樸性質：一個連通集經過連續變換之後仍然是一個連通集。

勘根定理只告訴我們存在性 (existence)。但到底解是什麼呢? 是否有具體的表現式呢?[4] 這就是牛頓法所要談的。我們從任一點 x_0 開始, 則通過 $(x_0,f(x_0))$ 之切線方程式爲

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\,,$$

[3]Bernard Bolzano(1781∼1848) 的故事很有趣, 他出生於奧匈帝國相當於現在的捷克 (波希米亞省), 是一個接受經院哲學教育的天主教神父, 他是最早將嚴格的概念引進數學分析的拓荒者之一。雖然 Bolzano 的觀點已明確指出數學分析(特別是微積分) 嚴格化的方向, 但由於與主流數學界的隔離, 他的著作基本上無人注意, 直到半個世紀之後才被 Hermann Hankel (1839∼1873) 發現。其中主要原因是他在世時是以神學家與哲學家的身分爲人所知。

[4]例如; 圓周率 π, 它只是一個符號代表圓周與直徑的比率。雖然我們將之視爲精確值, 對純數學家而言這已經是完美了, 但在實用上必須表示爲可操作的範圍之內。這個差異也正是純數學與應用數學 (或工程) 的差別。

此切線與 x-軸之交點爲 (令 $y=0$)

$$x_1 = T(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,. \tag{2.1}$$

同理再由 x_1 開始仿前步驟; 可得

$$x_2 = T(x_1) = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\,,$$

如此下去得

$$x_{n+1} = T(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.2}$$

如果數列 $\{x_n\}$ 收斂到 x^* (這裡需默認實數 $\mathbb{R}$ 是完備的!) 則由連續性知

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \quad \Longrightarrow \quad f(x^*) = 0\,.$$

由 (2.2) 式可定義新的函數

$$T(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,. \tag{2.3}$$

因此牛頓法可視爲函數 T 之迭代, 而原函數 f 之根 (root) 則成爲新函數 T 之定點 (fixed point)。

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = T(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,. \tag{2.4}$$

方程式求解的問題等價於函數) 是否有定點 (或不動點) 的問題, 而且由 (2.4) 也可猜出來定點的存在與曲線 $f(x)$ 的斜率 $f'(x)$ 有關, 這現象會一再出現例如 : 反 (隱) 函數定理。

例題 2.3: 試利用牛頓法計算無理數 $\sqrt{2}$ 之值至小數點第九位。

[**解**]: 令 $x=\sqrt{2}$, 因此 $\sqrt{2}$ 相當於是 $f(x) = x^2 - 2$ 之根。此時 $f'(x) = 2x$, 由牛頓法 (2.2) 或 (2.3) 可定義數列 x_n 如下

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right). \tag{2.5}$$

取 $x_0 = 1$ 則經計算可知

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{2}{x_4}\right) \approx 1.41421135562.$$

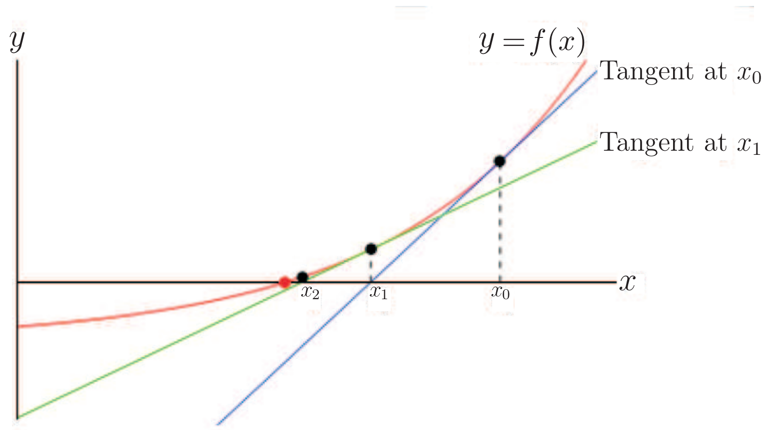

圖 2: 牛頓法。

這個數列的收斂值得在此談一談。根據遞迴關係 (2.5) 得

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n^2-2}{2x_n}<0,\qquad x_n\geq\sqrt{2}\,.$$

如果不計 $x_0=1$ 則 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一遞減數列, 另外

$$x_{n+1}-x_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x_nx_{n-1}}\right)(x_n-x_{n-1})\,,$$

迭代得

$$|x_{n+1}-x_n|\leq\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\quad\Longrightarrow\quad|x_{n+1}-x_n|\leq\frac{1}{2^n}|x_1-x_0|=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

因爲 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一遞減數列, 級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 每一項都是負數而且可以被等比級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$ 所控制 (dominate) 因此級數收斂 (我們已默認實數的完備性)

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_{n+1}-x_n=\lim_{n\to\infty}x_n-x_1=x_\infty-x_1\,,$$

且極限 x^* 滿足

$$x^*=\frac{1}{2}\left(x^*+\frac{1}{x^*}\right)\quad\Longrightarrow\quad x^*=\sqrt{2}.$$

另外也可以這麼看, 根據 (2.4) 定義

$$T(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\quad\Longrightarrow\quad|T'(x)|=\frac{1}{2}\left|1-\frac{1}{x^2}\right|\leq\frac{1}{2}<1\,,$$

則利用第三節的 Banach 定點定理也可結論極限 $x^*\in\mathbb{R}$ 的存在。 □

如此得到的近似解序列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ 好到超乎想像：它們收斂到『眞』解的速度出奇地快, 只需要四、五步就可以得到精確度很高的近似解。據說巴比倫人在四千年前就用這個方法計算平方根, 但除了平方根之外牛頓的方法可以用來計算任意 (適當) 函數的根。

牛頓法之所以可用是在於函數 f 本身之性質 (如連續性、可微性) 相當好, 此時

$$T'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\,, \tag{2.6}$$

因此由均值定理 (Mean Value Theorem) 可知存在 $\xi \in (x, y)$

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= \left| x - \frac{f(x)}{f'(x)} - y + \frac{f(y)}{f'(y)} \right| \\ &= \left| (x-y) - \left(1 + \frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2}\right)(x-y) \right| \\ &= \left| \frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} \right| |x-y|\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

如果能要求 $\left|\frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2}\right| \le \alpha < 1$則

$$|T(x) - T(y)| \le \alpha |x - y|\,,$$

這就是縮像 (contraction mapping) 之雛形。其實牛頓法提供了定點定理 (fixed point theorem) 之靈感與第一個例子。爾後也幫助我們明白隱函數定理、反函數定理, 甚至是解微分方程 (線性或非線性) 的內涵。關於牛頓法我們並不詳細在此討論, 有興趣之讀者可參閱相關材料。我們是以此例子做爲我們整個思考的依據, 到目前爲止可確定的是 $\left|\frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2}\right|$ 之大小直接影響到解之存在與否? 我們看個例子

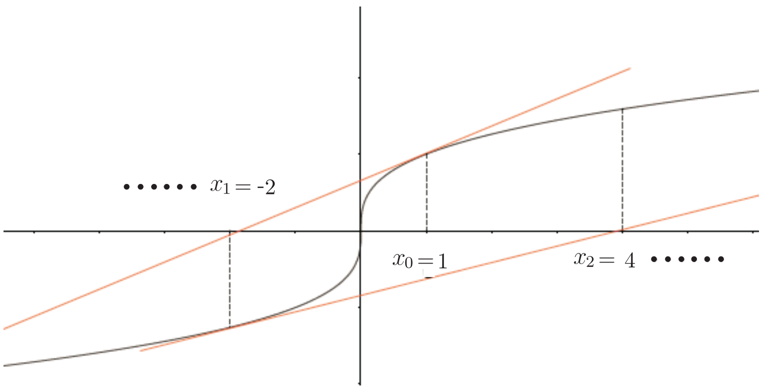

圖 3: $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

例題 2.4: 試以牛頓法探討 $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = 0$ 之根。

[解]: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}=0$ 之根爲 $x=0$, 由牛頓法知

$$x_{n+1}=x_n-\frac{3x_n^{\frac{1}{3}}}{x_n^{-\frac{2}{3}}}=x_n-3x_n=-2x_n\,.$$

若取 $x_0=1$ 則

$$x_1=-2,\quad x_2=4,\quad \ldots$$

顯然數列 $\{x_n\}_n$ 並不收斂, 而其原因就在於 $\left|\frac{f(\xi)f''(\xi)}{f'(\xi)^2}\right|$ 這個值不夠小, 直觀而言就是函數 $y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 不夠陡。 □

[註解]:

(i) 牛頓法或一般的迭代法在本質上是非常符合牛頓的機械論：即『宇宙像時鐘那樣運行, 某一時刻宇宙的完整信息能夠決定它在未來和任意時刻的狀態。』只要給定了法則 (這裡的 T) 然後就讓它機械地運轉得到下一刻的狀態。

(ii) 由 (2.2) 看的出來整個迭代行爲除了 f' 的大小有影響之外也與 f' 的正負符號有關。以圖 4, 5 爲例, 若 $f(x)>0$, $0<f'(x)<1$, 則迭代數列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 形成一遞減數列往定點即 $y=f(x)$ 與 $y=x$ 交點之 x^* 逼近。若 $f>0$, $-1<f'(x)<0$, 則由於 $f'(x)<0$ 的緣故, 迭代數列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 形成以定點 x^* 爲中心交錯形成一遞減與一遞增數列往定點,

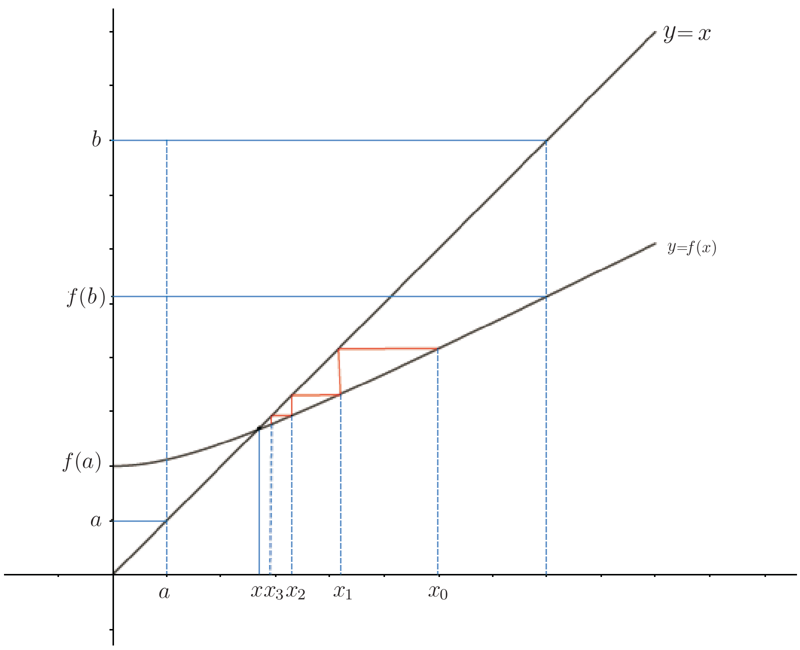

圖 4: $0<f'(x)<1$ 之迭代。

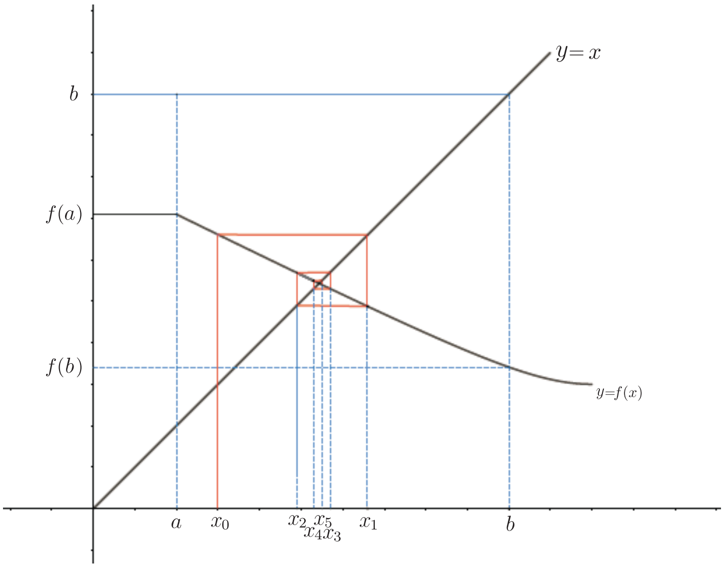

圖 5: $-1 < f'(x) < 0$之迭代。

即 $y = f(x)$ 與 $y = x$ 交點之 x^* 逼近

$$x_0 \le x_2 \le x_4 \le \cdots \le x_{2n} \le \cdots\cdots \to x^*\,,$$
$$x_1 \ge x_3 \ge x_5 \ge \cdots \ge x_{2n+1} \ge \cdots \to x^*\,.$$

3. Banach 定點定理

『*A mathematician is a person who can find analogies between theorems; a better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories. One can imagine that the ultimate mathematician is one who can see analogies between analogies.*』

— Stefan Banach (1892∼1945) —

要談 Banach 定點定理, 我們先定義何謂縮像 (contraction map)[5]。

定義 3.1: T 爲從度量空間 (X, d) 映射到它自身的算子;

$$T : (X, d) \mapsto (X, d)\,.$$

[5]縮像有時也稱爲壓縮函數, 但是我個人比較偏愛縮像這個翻譯。

若存在常數 α, $0\leq\alpha<1$, 使得任意 $x,y\in X$ 都滿足

$$d(T(x),T(y))\leq\alpha d(x,y)\,, \tag{3.1}$$

則稱 T 是 X 之縮像而 α 則稱爲縮像常數。

直觀而言, 縮像是將距離縮短至少 α 倍, 顯然一個縮像必定是連續函數。

定理 3.2 (Banach **定點定理**): (X,d) 爲完備度量空間 (complete metric space) 而

$$T:(X,d)\mapsto(X,d)$$

爲一縮像常數爲 α 之縮像, 則必存在唯一 $x^*\in X$ 滿足 $T(x^*)=x^*$, 即 x^* 爲 T 之唯一定點。

[**證明**]: 我們從任意點 $x_0\in X$ 開始, 根據迭代法定義

$$x_{n+1}=T(x_n),\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{3.2}$$

我們希望所得數列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一 Cauchy 數列。先看相鄰兩點 x_n,x_{n+1} 之關係

$$d(x_{n+1},x_n)=d(T(x_n),T(x_{n-1}))\leq\alpha d(x_n,x_{n-1}),\qquad n=1,2,\ldots.$$

利用此式可得

$$d(x_{n+1},x_n)\leq\alpha d(x_n,x_{n-1})\leq\alpha^2d(x_{n-1},x_{n-2})\leq\alpha^nd(x_1,x_0),\ n=1,2,\ldots, \tag{3.3}$$

再由三角不等式與 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}d(x_m,x_n)&\leq d(x_m,x_{m-1})+\cdots\cdots+d(x_{n+1},x_n)\\&\leq(\alpha^{m-1}+\cdots\cdots+\alpha^n)d(x_1,x_0)\\&=\frac{\alpha^n-\alpha^m}{1-\alpha}d(x_1,x_0)\\&\leq\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)\,.\end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}_n$ 爲一 Cauchy 數列。由 X 之完備性知存在 $x^*\in X$ 使得

$$d(x_n,x^*)\longrightarrow 0,\quad \text{當}\quad x_n\longrightarrow x^*$$

這個極限點 x^* 就是所要的定點

$$\begin{aligned}d(x^*,T(x^*))&\leq d(x^*,x_n)+d(x_n,T(x^*))\\&=d(x^*,x_n)+d(T(x_{n-1}),T(x^*))\\&\leq d(x^*,x_n)+\alpha d(x_{n-1},x^*)\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

因此 $T(x^*) = x^*$。現在證明唯一性, 假設有兩個定點 x^*、y^* $T(x^*) = x^*, T(y*) = y^*$ 則

$$d(x^*, y^*) = d(T(x^*), T(y^*)) \leq \alpha d(x^*, y^*).$$

但 $0 \leq \alpha < 1$ 故 $x^* = y^*$。 □

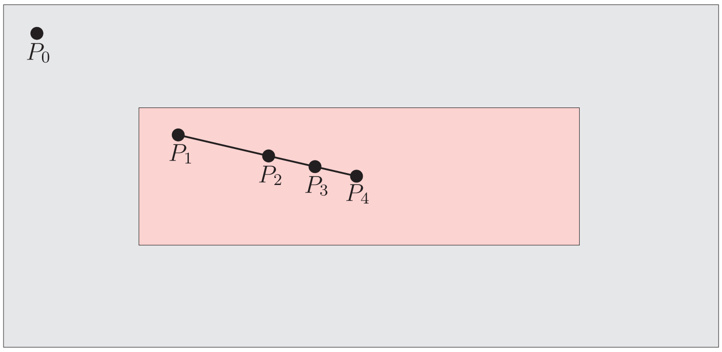

圖 6: 縮像。

這個定理不難想像 (參考圖 6)。當壓縮產生時原來平面上任意的點 P_0 會變換到 P_1, 而 P_1 則跑到 P_2、P_2 則占據了原來 P_3 的位置; $\cdots$ 等等。因爲我們考慮的是一個縮像, P_1 與 P_2 之間的距離必定小於 P_0 與 P_1 之間的距離, 同理 P_2 與 P_3 之間的距離必定小於 P_1 與 P_2 之間的距離 $\cdots$ 等等。於是我們就得到一串的點 $P_0, P_1, P_2, \ldots$ 彼此間越來越近, 它蘊涵著這個序列必定有一個極限, 而這極限點就是這個變換的定點 (不動點)。

[**註解**]: **:**

(i) 由證明過程中可知空間 X 之完備性 (completeness) 保證了定點 x^* 之存在性 (existence), 而縮像則保證所取的數列 $\{x_n\}$ 是一個 Cauchy 數列與定點的唯一性。此一定理不但指出這個迭代法是收斂的充分條件, 而且也給出所需迭代的次數, 也就是說 n 到底要多大使得 x_n 逼近 x^* 到期待的精度。由不等式

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)\,,$$

取 $n = 0$ 可知定點 x^* 之範圍爲

$$d(x^*, x_0) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x_1, x_0)\,.$$

(ii) 除了存在、唯一性之外, Banach 定點定理還給出實際的方法來構造 方程式 $T(x) = x$ 的解, 也就是迭代法 (3.2)。在證明的過程中由 (2.2) 所定義 (構造) 的 $\{x_n\}$ 也確實收斂到 $T(x) = x$ 的解, 這也是爲什麼通常稱 Banach 定點定理爲逐步逼近法 (method of successive approximation)。

(iii) 在應用 Banach 定點定理時除了要考慮一個適當的空間 X (完備度量空間) 之外, 還得構造出縮像 T, 而且兩者必須巧妙地結合。X 不能太小以至於 $T(X)$ 不落在 X 之內, 但 X 也不能太大以至於算子 T 無法成爲一個縮像。這都是 Banach 定點定理在應用上的困難。另一個著名的定點定理是由荷蘭數學家 L. E. Brouwer (1881∼1966) 提出; 它不曾指出那個點保持不動, 而只是保證必然存在至少有一點是不動的。Banach 定點定理雖然限制較大, 但如果可用時我們可以同時得到存在性與唯一性, 而 Brouwer 定點定理則只有存在性而已。

(iv) 由迭代法所構造出來的數列本質上是等比數列, 只是公比推廣爲一個算子 T,

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

雖然 $\{x_n\}$ 不見得是等比數列, 但可以被以 $\alpha < 1$ 爲公比的等比數列所控制, 因此保證定點的存在性。

(v) 關於這個定理我們有直觀的詮釋。假設有一張撲克牌或照片在桌上而你手上有一張完全一樣的縮小版本, 隨便將手上這張丟入桌上的撲克牌或照片內 (不能超過邊界) 那麼根據 Banach 定點定理這兩張牌或照片一定有一點 (定點) 是重疊的。

圖 7: Banach Fixed Point Theorem on Polish Gold Coin.

4. 應用一：反函數與隱函數定理

反函數與隱函數定理本質上就是方程式求解的問題

$$\begin{aligned} f(x) = y \qquad &\Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y)\,, \\ F(x,y) = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad y = f(x)\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

這裡 F 與 f 可以是函數更可以是算子 (operator)。由 (4.1) 直觀來看將 $x \mapsto y$ 視爲變數變換, 則反函數定理提供了座標變換的條件, 而隱函數定理則給了方程式解的表現之條件。以一階偏微分方程而言, 根據 Lagrange 的理論, 是透過特徵線 (characteristic) 將一階偏微分方程

轉換成常微分方程組 (假設是兩個變數則會有兩個常微分方程!)。解決常微分方程組之後再利用隱函數定理得到原先一階偏微分方程的解, 如果有初始值的話則由反函數定理可以將特徵線與初始值這兩個變數轉換成原先的兩個變數, 並由此結論一階偏微分方程的解。

關於反函數定理還是要從解線性方程式 (或線性聯立方程組) 來看 (假設 A 是一個與變數 $\mathbf{x}$ 無關的方陣)

$$\begin{aligned} ax = y \qquad &\Longrightarrow \qquad x = a^{-1}y\,, \\ A\mathbf{x} = \mathbf{y} \qquad &\Longrightarrow \qquad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

(4.2) 式可解的重要因素是 $a \neq 0$, $\det A = |A| \neq 0$, 換句話說 (從微分的角度)

$$\frac{dy}{dx} = a \neq 0, \qquad \det\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \det A = |A| \neq 0\,, \tag{4.3}$$

就是藉由微分才真正理解 (4.2)。對於非線性函數 $y = f(x)$ 就沒有那麼直接, 但 (4.3) 已指出可以用微分來刻畫反函數之存在。假設

$$f : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f(a) = b\,,$$

因此我們的問題變爲：在 y 靠近 b 是否可找到 x 在 a 附近使得 $f(x) = y$? 這就是《反函數定理》。給定 y 如果 $f(x) = y$ 有解則由均值定理 (mean value theorem) 可得

$$y - b = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \cong f'(a)(x-a)\,, \tag{4.4}$$

這一步就是線性逼近 (也可視爲線性化 (linearization))。若 $f'(a) \neq 0$ 則由 (4.4) 得

$$x = f^{-1}(y) \simeq a - \frac{f(a) - y}{f'(a)}\,. \tag{4.5}$$

這個式子與牛頓法實在是很相似。由 (4.5) 式可取數列

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) - y}{f'(x_0)}, \quad \cdots, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - y}{f'(x_n)}\,, \tag{4.6}$$

由於 $x_n \approx a = x_0$ 可以將 (4.6) 的分母都換爲固定的 $f'(x_0)$ 使得實際計算變得比較簡單

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) - y}{f'(x_0)}, \quad \cdots, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - y}{f'(x_0)}\,. \tag{4.7}$$

仿牛頓法定義算子

$$T(x) = x - \frac{1}{f'(x_0)}(f(x) - y)\,, \tag{4.8}$$

則求反函數 $x = f^{-1}(y)$ 就等價於求 T 的定點。如果存在 x^* 滿足 $x_n \to x^*$ 則由前面之經驗, 可大膽猜測 x^* 就是所欲求的解。我們看個例子:

例題 4.1: 令 $y=f(x)=x^2-4$, $a=2$, $b=0$。因為 $x_0=a=2$, $f'(x)=2x$, 由 (4.7) 所定義的數列 $\{x_n\}$ 為

$$\begin{aligned}
x_0 &= a = 2\,,\\
x_1 &= 2-\frac{f(2)-y}{f'(2)} = 2+\frac{y}{4}\,,\\
x_2 &= 2+\frac{y}{4}-\frac{1}{4}\left[\left((2+\frac{y}{4})^2-4\right)-y\right] = 2+\frac{y}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{4}\right)^2,\\
x_3 &= 2+\frac{y}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{4}\right)^2-\frac{1}{4}\left[\left(2+\frac{y}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{4}\right)^2\right)^2-4-y\right]\\
&= 2+\frac{y}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{1}{32}\left(\frac{y}{4}\right)^3-\frac{1}{64}\left(\frac{y}{4}\right)^4.
\end{aligned}$$

依此類推, 因此存在 x^* 使得

$$x_n \to x^* = 2+\frac{y}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{1}{32}\left(\frac{y}{4}\right)^3-\frac{1}{64}\left(\frac{y}{4}\right)^4+\cdots = (4+y)^{\frac{1}{2}}\,,$$

所以 $x^*=(4+y)^{\frac{1}{2}}$ 正是 $f(x)=x^2-4$ 之反函數。 □

由 (4.5) 知道反函數的構造是建立在均值定理, 因此可以直接推廣到 n 維空間的向量函數。令 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ldots,f_n(\mathbf{x}))^T$ 則 (4.5) 可以推廣為

$$\mathbf{x}=\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \simeq \mathbf{a}-(D_{\mathbf{a}}\mathbf{f})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{a})-\mathbf{y})\,, \tag{4.9}$$

其中 $D\mathbf{f}$ 是 Jacobian 矩陣

$$D\mathbf{f}=\left[\frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

當$\mathbf{x}=\mathbf{a}$時則表示為$D_{\mathbf{a}}\mathbf{f}=D\mathbf{f}|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$。Jacobian矩陣基本上就是向量函數的梯度 (gradient), 可以視為單變數微分的替代品, 而其行列式則稱為 Jacobian 行列式

$$\det(D\mathbf{f})=\frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}. \tag{4.11}$$

它反映了函數 $\mathbf{f}$ 在該點對空間的局部影響, 如果視為變數變換則 Jacobian 行列式的幾何意義就是 n 維體積的變化率。

例題 4.2: 考慮向量函數 $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 e^{x_2} + x_2 - 2x_1 \\ 2x_1x_2 + 2x_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

試利用 (4.9) 估計 $\mathbf{f}^{-1}\begin{bmatrix} -1.2 \\ 2.1 \end{bmatrix}$。

[**解**]: 這問題相當於

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}^{-1}\begin{bmatrix} -1.2 \\ 2.1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1^3 e^{x_2} + x_2 - 2x_1 = -1.2 \\ 2x_1x_2 + 2x_1 = 2.1\,. \end{cases}$$

首先計算 Jacobian 矩陣

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right] = \begin{bmatrix} 3x_1^2 e^{x_2} - 2 & x_1^3 e^{x_2} + 1 \\ 2x_2 + 2 & 2x_1 \end{bmatrix},$$

$$D\mathbf{f}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \implies \det D\mathbf{f}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \neq 0\,.$$

所以由反函數定理得

$$D\mathbf{f}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(D\mathbf{f}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

而且根據 (4.9) 得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}^{-1}\begin{bmatrix} -1.2 \\ 2.1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3 \\ -0.25 \end{bmatrix}.$$ □

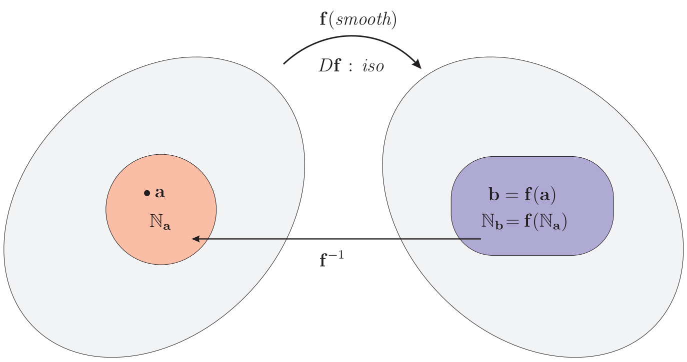

圖 8: Inverse Function Theorem.

定理 4.3 (**反函數定理**): 已知 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一開集, $\mathbf{f}: U \mapsto \mathbb{R}^n$ 是一連續可微函數。令 $\mathbf{a} \in U$ 且 $\det(D_{\mathbf{a}}\mathbf{f}) \neq 0$ 即 $D_{\mathbf{a}}\mathbf{f}$ 爲一非奇異矩陣, 則存在 $\mathbf{a}$ 之開鄰域 $\mathbb{N}_{\mathbf{a}} \subset U$ 與 $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ 之鄰域 $\mathbb{N}_{\mathbf{b}}$ 使得 $\mathbf{f}: \mathbb{N}_{\mathbf{a}} \to \mathbb{N}_{\mathbf{b}}$ 爲 1-1 且映成 (onto) 函數, $\mathbf{f}(\mathbb{N}_{\mathbf{a}}) = \mathbb{N}_{\mathbf{b}}$, 即對任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{N}_{\mathbf{b}}$方程式 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ 在 $\mathbb{N}_{\mathbf{a}}$ 內有唯一解, 換句話說, 反函數 $\mathbf{f}^{-1}: \mathbb{N}_{\mathbf{b}} \mapsto \mathbb{N}_{\mathbf{a}}$ 存在而且在 $\mathbb{N}_{\mathbf{b}}$ 內也是連續可微且滿足

$$D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1}. \tag{4.12}$$

如果 $\mathbf{f}$ 是 p 次可微則 $\mathbf{f}^{-1}$ 也是 p 次可微, 反函數 $\mathbf{f}^{-1}$ 與函數 $\mathbf{f}$ 本身有相同的光滑性。

[**證明**]: 整個想法是利用 Banach 定點定理, 由 (4.9) 可以定義算子

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} - (D_{\mathbf{a}}\mathbf{f})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}), \tag{4.13}$$

並證明 T 是一個縮像, 有興趣的讀者可參閱 [7, 8, 9, 10, 11]。 □

[**註解**]:

(i) 粗略地看反函數定理是說 : 一個連續可微的映射(mapping) $\mathbf{f}$, 如果在某一點 $\mathbf{a}$ 滿足 $\det(D_{\mathbf{a}}\mathbf{f}) \neq 0$, 則在 $\mathbf{a}$ 的附近都是可逆 (invertible)。這相當於說 : 對於連續可微的映射, 如果一點可逆則推論在該點附近 (開鄰域) 都是可逆。這實在令人驚訝! 其實這並不奇怪, 對於分析 (高等微積分) 有體會的人馬上可以看的出來這就是所謂的《連續性論據》(continuity argument), 一個連續函數在某一點大於 0, 則在該點附近 (開區間) 統統大於 0。而這本質上就是 ϵ-δ 所定義的連續性。

(ii) 自從 Albert Nijenhuis [8] 在 American Mathematical Monthly 發表了利用 Banach 定點定理來證明反函數定理之後, 幾乎所有的書都是用這個方法。除了 Banach 定點定理之外讀者可以在 Apostol [1] 的第 13 章找到另一個漂亮的證明, 其中用到 Cramer 法則與開映射定理 (Open Mapping Theorem)。但不管是那一個方法, 最重要的一步是均值定理(Mean Value Theorem) 就是 (4.9), 在該點附近局部地將連續可微函數 $\mathbf{f}$ 視爲線性函數。

通常我們對函數的概念, 例如

$$\begin{aligned} y &= ax + b && \text{(直線)} \\ y &= ax^2 + bx + c && \text{(抛物線)} \\ y &= \pm\sqrt{1 - x^2} && \text{(圓)} \end{aligned}$$

或者表爲一般式

$$y = f(x). \tag{4.14}$$

這是一個明顯 (explicit) 式, 即將 y 直接表示爲 x 的函數。但實際上能夠如此表示的函數實在太少, 而且也太侷限。但 (4.14) 可以另外表示爲

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad F(x, y) = y - f(x) = 0. \tag{4.15}$$

這式子同時說明了一件事實: 求$y = f(x)$之反函數等價於求函數方程的根 $F(x, y) = 0$

$$(x, y) \in \text{Ker } F \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x).$$

由此可以理解從分析的角度來看: 隱函數定理就方程式求解的問題。而這也告訴我們 反函數定理與隱函數定理是等價的: 即求反函數實際上就是解方程式, 求根的問題。

例題 4.4: 圓方程式

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}\,. \tag{4.16}$$

[**解**]: 由 (4.16) 之右式可知

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{f(x)}\,.$$

但這個事實亦可由左式而得。取全微分

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 2xdx + 2ydy = 0\,,$$

故

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f(x)}\,.$$

這個方向有個好處: 就算y無法明顯表爲x之函數, 仍然可得其微分

$$y' = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0\,. \tag{4.17}$$

當然前題是分母 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$。有興趣當然可繼續微分

$$y'' = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_xF_yF_{xy} - F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}\,, \tag{4.18}$$

分母始終出現都是$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$的函數, 因此對於隱函數定理我們僅需要求$F_y \neq 0$ 就足夠。同理對高維空間也可如此分析, 此時F_y則換爲 Jacobian 行列式。讀者有興趣可參考相關資料, 我們在此只是要引出隱函數定理之動機。 □

基本上問題是 : 已知 $F(a, b) = F(x_0, y_0) = 0$, 我們想要解方程式 $F(x, y) = 0$, 意思是要解y並將之表爲x的函數。換句話說: 是否存在函數 $f(x)$ 滿足 $b = f(a)$ 使得 $y = f(x)$

且 $F(x,y)=F(x,f(x))=0$? 既然隱函數定理是方程式求根之問題 (從分析的角度來看!), 我們可摹仿牛頓法利用迭代法來逼近。仍然是從均值定理出發

$$F(x,y)-F(x,b)=\frac{\partial F}{\partial y}(x,b)(y-b)+o(y-b)\simeq\frac{\partial F}{\partial y}(x,b)(y-b)\,, \tag{4.19}$$

但 $F(x,y)=0$ 而且 $x\approx a$ 可以將 (4.19) 與 x 有關的 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,b)$ 取代爲固定 $x=a$ 的 $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$

$$y\simeq b-\frac{F(x,b)}{F_y(x,b)}\simeq b-\frac{F(x,b)}{F_y(a,b)}=y_0-\frac{F(x,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}\,. \tag{4.20}$$

利用此式可定義數列 $\{y_n\}_n$ 如下

$$y_1=y_0-\frac{F(x,y_0)}{F_y(x_0,y_0)},\quad\cdots,\quad y_{n+1}=y_n-\frac{F(x,y_n)}{F_y(x_0,y_0)},\qquad n=0,1,2,\ldots. \tag{4.21}$$

如果存在 y 滿足 $y_n\to y$, 則由前面之經驗可大膽猜測 y 就是原方程式 $F(x,y)=0$ 之根, 同時 (4.21) 也提供了證明隱函數定理之方法。而且透過均值定理由 (4.19)–(4.20) 看出來由函數方程 $F(x,y)=0$ 所定義的函數 y 隱約是 x 的函數, 也因爲這緣故此我們稱之爲隱函數定理。

例題 4.5: 試利用迭代法 (4.21) 解方程式 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$。

[解]: 取$(a,b)=(x_0,y_0)=(0,1), F(0,1)=0$, 且 $F_y(0,1)=2>0$ 由(4.21)得

$$\begin{aligned}
&y_0=1\,,\\
&y_1=y_0-\frac{F(x,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}=1-\frac{F(x,1)}{F_y(0,1)}=1-\frac{x^2+1-1}{2}=1-\frac{x^2}{2},\\
&y_2=y_1-\frac{F(x,y_1)}{F_y(x_0,y_0)}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2+(1-\frac{x^2}{2^2})-1}{2}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\,,\\
&y_3=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}-\frac{x^8}{128}\,,\\
&y=\lim_{n\to\infty}y_n=1-\frac{x^2}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-3)}{2^kk!}x^{2k}=\sqrt{1-x^2},\quad -1<x<1\,.
\end{aligned}$$

這相當於

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0\quad\Longleftrightarrow\quad y=f(x)=\sqrt{1-x^2}\,. \qquad\square$$

現在將前面的討論推廣爲多變數與向量函數, 先看線性方程組

$$A\mathbf{x}+B\mathbf{y}=\mathbf{0},\qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\quad \mathbf{y}\in\mathbb{R}^m\,, \tag{4.22}$$

其中 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}, B=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times m}$。由 (4.22) 定義線性變換 $\mathbf{T}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^m$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{y})=[A\quad B]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}=A\mathbf{x}+B\mathbf{y}\,. \tag{4.23}$$

如果B^{-1}存在則隱函數定理可以表示爲

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{y})=A\mathbf{x}+B\mathbf{y}=\mathbf{0}\quad\Longleftrightarrow\quad(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\operatorname{Ker}\mathbf{T}\quad\Longleftrightarrow\quad\mathbf{y}=f(\mathbf{x})=-B^{-1}A\mathbf{x}\,.$$

現在將線性變換 $\mathbf{T}$ 換爲一般的函數 $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^m$。隱函數定理的問題相當於：已知 $\mathbf{F}(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\mathbf{0}$, 是否存在函數 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 滿足 $\mathbf{b}=\mathbf{f}(\mathbf{a})$ 使得方程式 $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ 的解可以表示爲 $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$? 通常是得不到 $\mathbf{y}$ 這個解。類似於 (4.19)–(4.21) 的討論, 最重要的一步仍然是均值定理

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})-\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{b})&=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{b})(\mathbf{y}-\mathbf{b})+o(\mathbf{y}-\mathbf{b})\simeq\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{b})(\mathbf{y}-\mathbf{b})\,,\\ \mathbf{y}\simeq\mathbf{b}-\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{b})\right)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{b})&\simeq\mathbf{y}_0-\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\right)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\,,\end{aligned} \tag{4.24}$$

其中 $\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}$ 是 Jacobian 矩陣

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)&\cdots&\frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

利用 (4.24) 定義迭代數列 $\{\mathbf{y}_n\}_n$

$$\begin{cases}\mathbf{y}_1=\mathbf{y}_0-\left(\dfrac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\right)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\,,\\ \quad\cdots\cdots\\ \mathbf{y}_{n+1}=\mathbf{y}_n-\left(\dfrac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\right)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}_n),\qquad n=0,1,2,\ldots\,.\end{cases} \tag{4.26}$$

定理 4.6 (**隱函數定理**): 已知向量函數

$$\mathbf{F}=(f_1,f_2,\ldots,f_m)^T:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\mapsto\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^m\,.$$

在 $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ 附近是連續可微, 且 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\mathbf{0}$, 其 Jacobian 矩陣爲一非奇異 $m\times m$ 矩陣, $\det\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\neq0$, 則存在 $\mathbf{x}_0$ 之開鄰域 $\mathbb{N}_{\mathbf{x}}\subset\mathbb{R}^n$ 及 $\mathbf{y}_0$ 之開鄰域 $\mathbb{N}_{\mathbf{y}}\subset\mathbb{R}^m$ 與唯一的連續可微函數 $\hat{\mathbf{y}}:\mathbb{N}_{\mathbf{x}}\mapsto\mathbb{N}_{\mathbf{y}}$ 滿足

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{y}_0,\quad\mathbf{F}(\mathbf{x},\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))=\mathbf{0},\qquad\forall\mathbf{x}\in\mathbb{N}_{\mathbf{x}}\,, \tag{4.27}$$

而且

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

此外 $\mathbf{F}$ 與 $\hat{\mathbf{y}}$ 有相當的光滑性, 也就是說：如果 $\mathbf{F}$ 是 k 次/無限次連續可微則 $\hat{\mathbf{y}}$ 也是 k 次/無限次連續可微。要使得隱函數存在又有好的性質就必需要求原來的函數也有等程度的好性質。

[**證明**]: 與反函數定理一樣的想法是利用 Banach 定點定理, 由 (4.26) 可以定義算子

$$T_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\right)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{4.29}$$

並證明 $T_{\mathbf{x}}$ 是一個縮像, 有興趣的讀者可參閱 [1, 8, 9, 10]。 □

[**註解**]:

(i) 與反函數定理一樣我們可以根據《 連續性論據》來理解隱函數定理: 一個連續可微的映射 (mapping) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ 如果在某一點 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 滿足 $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq 0$ 且 $\mathbf{F}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{0}$, 則在 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的附近都有 $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$。這相當於說：對於連續可微的映射如果一點 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 是 $\mathbf{F}$ 的解, 則推論在該點附近(開鄰域) 的點 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 都是 $\mathbf{F}$ 的解而且 $\mathbf{y}$ 可以表示爲 $\mathbf{x}$ 的函數。

(ii) 反函數定理與隱函數定理是等價的。我們利用反函數定理來證明隱函數定理：首先定義函數

$$\mathbf{G}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, \qquad \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})), \tag{4.30}$$

其 Jacobian 矩陣爲可逆

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial(\mathbf{x},\mathbf{y})} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix}, \qquad \det\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial(\mathbf{x},\mathbf{y})}\right) = \det\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right) \neq 0,$$

所以可以應用反函數定理到$\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, 從而推得隱函數定理。同理可以由隱函數定理推得反函數定理, 詳細請參考 [1, 8, 9, 10]。

(iii) 隱函數定理的證明與反函數定理一樣, 最重要的一步是均值定理, 這相當於說：一個連續可微函數其局部行爲差不多就是其導數(一次微分) 之行爲。

(iv) (4.28) 這個等式是量綱平衡:

$$\left[\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}}\right] = \frac{[y]}{[x]}, \qquad \left[-\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right] = \left(\frac{[\mathbf{F}]}{[\mathbf{y}]}\right)^{-1}\left(\frac{[\mathbf{F}]}{[\mathbf{x}]}\right) = \frac{[y]}{[x]}.$$

5. 應用二: 微分方程 (Picard 迭代法)

歷史上逐次逼近法第一次有系統地被使用是法國數學家 Charles Émile Picard (1856∼1941)[6] 在處理微分方程的存在性與唯一性時所建立起來的。我們考慮一階微分方程的初值問題

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t,x), \qquad x(0) = x_0 \,. \tag{5.1}$$

直接積分所以 (5.1) 等價於積分方程

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds \,, \tag{5.2}$$

將 (5.2) 的右邊定義爲

$$T(x) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds \,. \tag{5.3}$$

這就說明我們可以將微分方程解的存在問題轉化爲算子的定點 (fixed point) 問題。由 (5.3) 自然得出所謂的 Picard 迭代法 (Picard iteration)

$$x_{n+1} = x_0 + \int_0^t f(s, x_n(s))ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \,. \tag{5.4}$$

Picard 迭代法在理論上的價值遠高於實用, 因爲對於複雜的函數 $f(t,x)$, 用這個迭代法 (5.4) 來得到逼近解 (approximate solution) 是非常不實際的。

例題 5.1: 試利用 Picard 迭代法得一階微分方程的解

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = tx, \quad x(0) = 1 \,. \tag{5.5}$$

[**解**]: 此時 $f(s, x_n(s)) = sx_n(s)$, 根據 (5.4) 可以得出迭代數列

$$\begin{aligned}
x_0 &= x(0) = 1\,,\\
x_1 &= T(x_0) = 1 + \int_0^t 1 \cdot sds = 1 + \frac{t^2}{2}\,,\\
x_2 &= T^2(x_0) = T(x_1) = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^2}{2}\right) sds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}\,,\\
x_3 &= T^3(x_0) = T(x_2) = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4}\right) sds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= T^n(x_0) = 1 + \frac{\frac{t^2}{2}}{1!} + \frac{(\frac{t^2}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{t^2}{2})^3}{3!} + \cdots\,.
\end{aligned}$$

[6] 微分方程之外 Picard 在複變函數也留下腳蹤, 就是 Picard 大、小定理 (Great Picard's Theorem, Little Picard's Theorem) 但一個學期的複變是絕對學不到這兩個漂亮的定理。

所以

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^n}{n!} = e^{\frac{t^2}{2}} . \qquad \square$$

將 (5.5) 右邊的係數 t 換爲虛數 i

$$\frac{dx}{dt} = ix, \qquad x(0) = 1 ,$$

其解爲

$$x(t) = e^{it} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos t + i \sin t . \tag{5.6}$$

從微分方程的角度而言, 一個從 0 出發, $x(0) = 1$ 微分 (變化) 等於自己尺寸 i 倍的函數必然是一個在單位圓上逆時針旋轉 t 度的函數; $x(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$。取 $t = \pi$ 就是著名的 Euler 等式 (Euler identity)[7]

$$e^{i\pi} + 1 = 0 . \tag{5.7}$$

Euler 稱她爲最美的公式, 因爲 (5.7) 包含了加法與乘法這兩個基本運算還有 0 與 1 這兩個基本運算的單位元素 (identity), 另外數學中會出現的常數 i, π, e 都在這裡邊。從 Picard 迭代法 (逐步逼近) 來看 Euler 等式是非常有趣:

$$e^{i\pi} = 1 + i\pi + \frac{(i\pi)^2}{2!} + \frac{(i\pi)^3}{3!} + \cdots ,$$

我們逐步將這些向量加起來, 可以看出這些點 (向量)

$$\begin{aligned} &x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + i\pi, \quad x_2 = 1 + i\pi + \frac{(i\pi)^2}{2!}, \\ &x_3 = 1 + i\pi + \frac{(i\pi)^2}{2!} + \frac{(i\pi)^3}{3!}, \quad \cdots \end{aligned}$$

依逆時針旋轉形成一個螺旋朝 $x = -1$ 這個點逼近 (參考圖9)。

定理 5.2 (Picard): 已知 $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Omega = \{(t,x) | |t - t_0| \le a, |x - x_0| \le b\} \tag{5.8}$$

是一矩形、而 $f(t,x)$ 是定義在 Ω 上的連續函數, 因爲 Ω 是一緊緻集所以 f 在 Ω 是有界

$$|f(t,x)| \le c \qquad (t,x) \in \Omega , \tag{5.9}$$

---

[7]英國 BBC 電視台的數學科普節目曾播放過『*Euler* 等式』, 但該節目主持人將 Euler 等式表示爲 $e^{i\pi} = -1$, 雖然這沒有錯但卻不是 Euler 的原意。如果不是表示爲 (5.7) 的形式, 就說明他 (她) 不懂 Euler 等式。

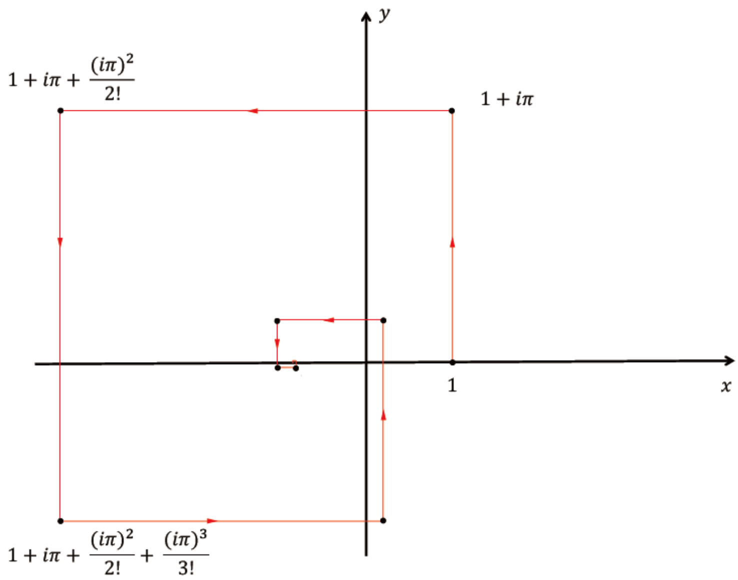

圖 9: $e^{i\pi} = 1 + i\pi + \frac{(i\pi)^2}{2!} + \frac{(i\pi)^3}{3!} + \cdots$.

且對 x 滿足 Lipschitz[8] 條件

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le k|x_1 - x_2|, \qquad (t,x_1),(t,x_2) \in \Omega\,, \tag{5.10}$$

則一階微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{5.11}$$

總是存在唯一解$x(t)$ 而且$t \in I = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, 其中

$$\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}. \tag{5.12}$$

[**證明**]: 詳細的證明可參考 ([2, 4, 5, 11]), 這裡只列出關鍵步驟。

(1) 將微分方程 (5.11) 轉換爲積分方程 (integral equation)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t,x)dt\,. \tag{5.13}$$

(2) 透過(5.13) 定義算子

$$T(x) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t,x)dt\,. \tag{5.14}$$

[8]Rudolf Lipschitz (1832∼1903) 是德國數學家, 他最被人所知大概就是這個工作, 他另一個重要的成果是利用力學定律來詮釋 Riemann 幾何, 這對於後來愛因斯坦發展相對論有所貢獻。

因此微分方程 (5.11) 存在性的問題轉換爲算子 T 的定點是否存在的問題。此時 Picard 迭代法 (Picard iteration) 爲

$$x_{n+1}=T(x_n)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s))ds, \qquad n=0,1,2,\ldots. \tag{5.15}$$

(3) 選擇適當的空間。令$C(I)$表示定義在區間I上所有連續函數的集合, 由方程式 (5.11) 可以猜得出來 $x\in C(I)$(實際上$x\in C^1(I)\subset C(I)$), 如果定義度量 (metric)

$$d(x_1,x_2)\equiv \max_{t\in I}|x_1(t)-x_2(t)|, \tag{5.16}$$

則根據一致收斂的理論可以證明 $(C(I),d)$ 是一個完備度量空間。

(4) 利用f是 Lipschitz 連續證明 由 (5.14) 所定義的算子

$$T:(C(I),d)\mapsto (C(I),d)$$

是一個縮像 (contraction map)。最後根據 Banach 定點定理得出結論。 □

[**註解**]:

(i) Picard 定理的證明方法是將微分方程轉化爲積分方程, 這也說明積分方程可以藉由逐步逼近法來求解。

(ii) 雖然 Picard 定理對於非線性方程仍然成立, 但非線性 (nonlinearity) 是相當節制的。由量綱 (因次) 分析的角度來看 Lipschitz 連續 (5.10) 這個條件告訴我們 f 差不多是線性。

(iii) 運用 Banach 定點定理時需要縮像, 所以 Picard 這個存在唯一定理是有所限制的。首先 (t,x) 必須落在矩形 Ω 之內, 其次由微分方程可推得 $|dx/dt|\le c$, 也就是 (t,x) 還必須落在過 (t_0,x_0) 斜率爲 $\pm c$ 之直線圍成的兩個三角形區域 (參考圖 10)。

(iv) (5.11) 這個常數 β 是由計算過程中得到的, 看起來並不自然也很難想像, 但是透過量綱分析 (Dimensional Analysis) 你會發現這是合理的。

$$\begin{aligned}
(5.8) \quad &\Longrightarrow \quad [a]=[t], \quad [b]=[x],\\
(5.9),(5.10) \quad &\Longrightarrow \quad [f]=[c]=[k][x],\\
(5.11) \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{dx}{dt}\right]=\frac{[x]}{[t]}=[f].
\end{aligned}$$

由前面三個關係式可推得

$$\left[\frac{1}{k}\right]=\frac{[x]}{[f]}=\frac{[x]}{[x]/[t]}=[t], \qquad \left[\frac{b}{c}\right]=\frac{[b]}{[c]}=\frac{[x]}{[k][x]}=\frac{1}{[k]}=[t],$$

因此 (5.12) 這四項都有相同的量綱

$$[\beta] = [a] = \left[\frac{b}{c}\right] = \left[\frac{1}{k}\right] = [t]\,.$$

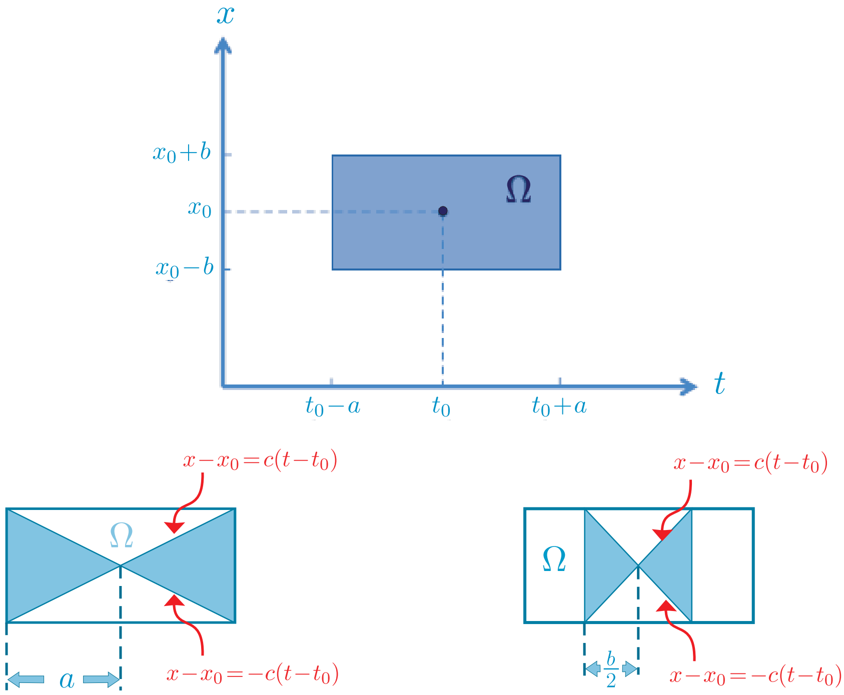

圖 10: Picard Theorem.

另一個微分方程的存在性定理也很出名, 這是義大利數學家 Giuseppe Peano (1858∼1932)[9]的貢獻。

定理 5.3 (Peano): 已知 Ω 同定理 5.2 之 (5.8), 而且$f(t,x)$是定義在 Ω 上的連續函數。如果

$$|f(t,x)| \le c, \qquad (t,x) \in \Omega \tag{5.17}$$

則至少存在一可微連續函數 $x(t)$ 滿足一階微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

其中

$$|t - t_0| \le \beta \equiv \min\left\{a, \frac{b}{c}\right\}. \tag{5.18}$$

[**證明**]: 這個證明要用到 Arzela-Ascoli 定理詳細可參考 ([2, 4])。 □

[9] Giuseppe Peano (1858∼1932) 最著名的工作是數理邏輯 (Mathematical Logic) 與集合論 (Set Theory)。自然數的 Peano 公設就是他的傑作, 他同時也是拉丁文專家。

[註解]:

(i) (5.18) 中的 $a, b \in \mathbb{R}$ 並沒有限定爲有界, 所以 Peano 定理所得的解 $x(t)$ 有可能對所有 $t_0 \le t < \infty$ 都成立(整體時間解)。但是 Picard 定理的 (5.12) 由於 Lipschitz 連續的緣故 $\frac{1}{k}$ 必定是有限的, 所以 Picard 定理只能得到局部時間解 (但有唯一性)。

(ii) Peano 定理的證明方法是利用另外兩個義大利數學家的結果, Arzela-Ascoli 定理, 就是分析中的緊緻性 (compactness)。所有的緊緻性定理都是從 Bolzano-Weierstrass 定理開始, 簡單的說 : 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界的數列必定存在收斂的子數列。在有限維空間這個定理等價於 Heine-Borel 定理 : $A \subset \mathbb{R}^n$ 是緊緻集若且唯若 A 是有界閉集。但是無窮維度量 (或距離) 空間 (metric space) 的有界閉集不見得是緊緻集, 取而代之的是全有界 (totally bounded) 完備 (complete) 集。具體的例子是連續函數空間 : $A \subset C(I)$ 是緊緻集的條件是 A 爲有界 (bounded) 且是等程度連續 (equi-continuous), 意思是對於任意的 $\epsilon > 0$ 存在同一個 $\delta > 0$ 對 A 裡面所有的連續函數都適用, 這就是 Arzela-Ascoli 定理。

(iii) 緊緻性 (compactness) 是一個重要的拓樸性質 (經連續變換之後不變的性質)。在分析中它是證明微分方程解之存在性的重要方法, 除了 Peano 定理之外, 最著名的成果是 1934 年法國數學家 Jean Leray (1906∼1998) 利用緊緻性證明不可壓縮 Navier-Stokes 方程的整體時間弱解的存在性 (global weak solution of the incompressible Navier-Stokes equation), 由於不同的收斂子序列可能收斂到不同的極限, 所以無法保證唯一性, 到目前爲止仍然是數學界 (甚至是科學界) 未解的核心難題。

(iv) Banach 定點定理與緊緻性 (compactness) 是證明 (偏) 微分方程解之存在性的主要方法, 兩者各有其優越性與不足之處。以本節的兩個定理而言, Picard 定理是利用 Banach 定點定理要求的條件比較強, 得到的解通常是局部時間解 (local existence) 但可以得到存在唯一定理。而 Peano 定理中的 $f(t, x)$ 只要求是連續不必 Lipschitz 連續, 這是它比 Picard 定理好用的地方。因爲用到緊緻性所以容易得到解的存在性, 很多時候甚至可以得到整體時間存在解 (global existence), 但付出的代價是缺少唯一性。

誌謝: 自從大四跟李育嘉教授學了 Banach 定點定理之後, 就一直深愛著這個定理。育嘉老師詮釋了一個漂亮定理的美學標準而且如何正確地鑑賞數學美, 這讓我擺脫大二以來 ϵ-δ 的糾葛並影響了我的數學觀。在此謹將此文獻給李育嘉教授並祝他 70 歲生日快樂。

參考文獻

1. Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis: A Modern Approach to Advanced Calculus*, 2nd Edition, Addison Wesley, 1974.
2. Garrett Birkhoff and Gian-Carlo Rota, *Ordinary Differential Equations*, 4th Edition, Wiley, 1989.

兩位作者都是蜚聲國際的數學家, 寫的書自然有一定的可看性。第一位作者的父親 George Birkhoff (1884～1944) 可以稱爲美國 (本土) 第一位國際級的大數學家。歷史上父子同爲數學家的例子倒是不少。其實 Garrett Birkhoff 更被人所知是因爲另一本與 Saunder MacLane 合寫的代數教科書《*A Survey of Modern Algebra*》。這本書是進階的微分方程, 讀者學過基礎的 (偏計算) 微分方程之後想更深入理解微分方程 (但不包括動態系統; Dynamical System), 我會推薦此書。

3. E. Hairer and G. Wanner, Analysis by Its History, UTM *Reading in Mathematics*, Springer-Verlag, 1995.
4. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, 1975.
5. E. Kreyszig; *Introductory Functional Analysis with Applications*, John-Wiley & Sons, 1978.

   作者就是寫工程數學的 E. Kreyzig (*Advanced Ehgineering Mathematics*, 9 edition, Wiley, 2006)。這本書的特色就是不需要 Topology 所以讀起來特別輕鬆, 連工學院的學生也不太困難, 讀者若想自修泛函分析這本應該非常合適。我大四修泛函分析時李育嘉教授就是用這本書, 這門課除了是應數研究所的基本課之外也開給電機研究所的學生 (因爲學控制需要泛函分析)。

6. R. Daniel Mauldin, *The Scottish Book: Mathematics from The Scottish Café, with Selected Problems from The New Scottish Book*, 2nd Edition, Birkhäuser, 2015.
7. J. Marsden and M. Hoffman, *Elmentary Classical Analysis*, 2nd Edition, W. H. Freeman, 1993.

   這本書的寫作方式非常不同於傳統的教科書 (定義、定理、證明這種無血、無淚、沒有感情之三段式論證)。介紹完基本概念與定理之後作者並沒有急著給出證明, 而是先舉了一些簡單的例子之後馬上有一些類似題讓讀者練習。作者應該是想藉由例子來幫助讀者理解定理。一旦讀者了解定理的意義之後才移動到每一章最後面的定理證明, 以掌握證明的技巧。這實在是非常友善 (friendly) 的安排, 讀數學一定要有感覺而好的例子 (example) 則提供了數學思考的模式。我第一次教高等微積分就是用這本書。

8. Albert Nijenhuis, Strong Derivatives and Inverse Mappings, *American Mathematical Monthly*, Vol. 81, No. 9, 969-980, 1974.
9. John H. Nubbard and Barbara Burke Hubbard, *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms: A Unified Approach*, 2nd Edition, Prentice Hall, 2002.
10. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1976.
11. 林義雄、林紹雄。理論分析上、下冊。國立編譯館出版, 正中書局印行, 1977。

    正如 Bernoulli 兄弟、作者也是兄弟檔數學家。這是我所看過中文數學分析教科書最好的一套書, 理由很簡單這兩本書是作者讀過且消化過後的傑作, 而且是用自己的語言所表達所以沒有閱讀外文著作之文化的隔閡。這套書非常適合自修但要慢慢讀因爲思想轉化爲文字有一定的困難度與抽象的程度。在那個『來來來、來台大; 去去去、去美國。』的年代, 作者肯花心思寫這一套書實在是令人欽佩。

12. 林琦焜。從等比級數談起。數學傳播季刊, 22(2), 42-53, 1998。
13. 吳志揚。淺談固定點定理及其應用。數學傳播季刊, 20(2), 46-55, 1996。

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—