數學傳播 44卷1期, pp. 102-112

一種構造雙偶數階幻方的方法 —基於楊輝、丟勒與拉馬努金幻方的啓發

聶春笑

一、引言

幻方是由自然數 $1\sim n^2$ 組成的 n 階方陣, 其每行每列以及兩條對角線元素之和均爲常數, 該常數被稱爲幻和。由於這種特別的性質, 歷史上幻方引起了許多人的關注, 比如楊輝、富蘭克林、丟勒、歐拉與拉馬努金等人都記錄或構造過幻方。目前, 大量的構造方法已經被提出來, 特別值得一提的是中國數學家楊輝早在南宋時期就在《續古摘奇算法》一書中記錄了 $3\sim 10$ 階幻方。楊輝在書中並未提及其中的大部分幻方的構造方法。在提及構造方法的幻方中包括了如矩陣 (1) (2) 所示的兩個四階幻方 [1]。

$$\begin{bmatrix} 2 & 16 & 13 & 3 \\ 11 & 5 & 8 & 10 \\ 7 & 9 & 12 & 6 \\ 14 & 4 & 1 & 15 \end{bmatrix} \quad (1) \qquad \begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 16 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 1 & 12 & 8 & 13 \end{bmatrix} \quad (2)$$

歷史上, 歐洲最早的四階幻方出現在丟勒名爲《憂鬱》的畫作中, 如矩陣(3) 所示 [2]。畫作《憂鬱》中的各種事物與人物形象讓後人解讀至今。其中的四階幻方有個重要的特點, 即最底一行的中間兩個數連起來是 1514, 這正是丟勒作該畫的年份。

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

印度的天才數學家拉馬努金在數學上有重要貢獻, 他在傳奇的一生中猜測了許多公式並記錄在筆記本中。2015 年曾有電影“*The Man Who Knew Infinity*”描述了他的傳奇經歷。拉

馬努金猜測的公式中的大部分至今未能得到證明。後人爲了研究這些公式而整理了他的筆記本並出版。從出版的筆記本中, 我們可以了解拉馬努金也曾被幻方所吸引。他在其筆記本的早期部分給出了一些幻方, 其中包括如矩陣 (4) 所示的一個8階幻方 [3]。如同其猜測的許多公式一樣, 拉馬努金在筆記本中也未給出這個幻方的構造方法。

$$\begin{bmatrix} 1 & 58 & 59 & 4 & 5 & 62 & 63 & 8 \\ 16 & 55 & 54 & 13 & 12 & 51 & 50 & 9 \\ 24 & 47 & 46 & 21 & 20 & 43 & 42 & 17 \\ 25 & 34 & 35 & 28 & 29 & 38 & 39 & 32 \\ 33 & 26 & 27 & 36 & 37 & 30 & 31 & 40 \\ 48 & 23 & 22 & 45 & 44 & 19 & 18 & 41 \\ 56 & 15 & 14 & 53 & 52 & 11 & 10 & 49 \\ 57 & 2 & 3 & 60 & 61 & 6 & 7 & 64 \end{bmatrix}$$

(4)

在幻方的研究中可以由階將幻方劃分爲單偶數階幻方 $(2(2k+1))$、雙偶數階幻方 $(4k)$ 與奇數階幻方 $(2k+1)$ 三種 (k 爲正整數)。幻方 (1)∼(4) 均爲雙偶數階幻方。本文將研究幻方 (1)∼(4) 的構造方法, 並總結得到一個構造雙偶數階幻方的一般方法。在後文, 我們將看到這四個幻方都可以經過類似步驟構造而得, 從而本質上屬於同一類幻方。

二、一個例子

首先, 我們觀察矩陣 (1) 的構造方式, 基於觀察將在下一節提出並證明一個引理。

我們從上至下對稱的調換矩陣 (1) 的中間兩列, 則有矩陣 (5)。再對矩陣 (5) 從左至右的調換中間兩行, 則有矩陣 (6)。觀察矩陣 (6) 的特點, 其包括四個 2 階小方陣, 如矩陣 (7) 所示。

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 11 & 9 & 12 & 10 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \\ 14 & 16 & 13 & 15 \end{bmatrix} \quad (5) \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 10 & 12 & 9 & 11 \\ 6 & 8 & 5 & 7 \\ 14 & 16 & 13 & 15 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} (7a) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} (7b) \quad \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 16 \end{bmatrix} (7c) \quad \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 13 & 15 \end{bmatrix} (7d)$$

觀察矩陣 (7a)∼(7d) 之間的關係, 我們發現有這樣的規律。第一, 每個小矩陣的上面一行與下面一行的數字之差都相同, 比如 $2-10=-8=6-14$ 等等。第二, 不同矩陣之間相減

等於一個元素均爲同一個常數的矩陣, 比如矩陣 (7a) 減去矩陣 (7b) 得到一個元素均爲 1 的二階矩陣。現在我們反過來考慮, 如果首先指定矩陣 (6), 然後左右對稱的調換中間兩行, 再上下對稱的調換中間兩列, 則得到幻方 (1)。於是引出問題, 第一, 這樣指定一個初始方陣再做對稱變換是否可以構造幻方? 第二, 如果這樣的方式可以構造一個幻方, 那麼初始方陣應該如何選擇, 變換又是怎樣的? 我們在下節將首先給出一個引理, 用以推廣本節的例子並回答上面兩個問題。在第四節將會看到如何構造幻方 (1)∼(4)。

三、一個引理

爲了便於說明, 在本文約定如果一個方陣滿足每行(每列、對角線) 元素之和均等於一個常數 (幻和), 則稱該方陣的行 (每列、對角線) 滿足幻方條件。下面首先引入一個引理, 然後敘述基於該引理的構造方法。

引理: 設 M 是一個 $4n$ 階方陣, 如矩陣 (8) 所示。其中 A_{11} 是一個 $2n$ 階方陣, 它的元素 $A_{11}(i,j)=a_{11}+(i-1)d_2+(j-1)d_1$, d_1 與 d_2 均爲非零整數。E 是一個元素均爲 1 的 $2n$ 階方陣。d_{12}、d_{21} 與 d_{22} 也是非零整數, 且 $d_{12}+d_{21}=d_{22}$。則經過對元素的變換 M 可以生成滿足幻方條件的方陣。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}+d_{12}*E \\ A_{11}+d_{21}*E & A_{11}+d_{22}*E \end{bmatrix} \tag{8}$$

證明: 爲了證明該引理, 我們首先需要構造兩個用於變換的數集, 記 L_1 與 L_2 如 (9) 與 (10) 所示的數集, 也即從 $\{1,\ldots,2n\}$ 這 $2n$ 個數中任意選擇 n 個數, 然後再從 $\{2n+1,\ldots,4n\}$ 這 $2n$ 個數中對稱的選擇 n 個數, 其中對於 $k\in\{1,\ldots,2n\}$, 選擇 $4n-k+1\in\{2n+1,\ldots,4n\}$。可見這樣選擇的數集具有對稱性, 即 $k+(4n-k+1)=4n+1$。

$$L_1=\{l_l^1,\ldots,l_n^1,4n-l_l^1+1,\ldots,4n-l_n^1+1\mid l_l^1,\ldots,l_n^1\le 2n\} \tag{9}$$
$$L_2=\{l_l^2,\ldots,l_n^2,4n-l_l^2+1,\ldots,4n-l_n^2+1\mid l_l^2,\ldots,l_n^2\le 2n\} \tag{10}$$

下面證明通過如下的變換步驟, M 可以被轉換爲一個行與列滿足幻方條件的方陣, 且幻和 $S=4na_{11}+2n(2n-1)(d_1+d_2)+n(d_{12}+d_{21}+d_{22})$。

步驟一: 如果 $l\in L_1$, 則 M 的第 l 行左右對稱翻轉, 否則對應的行保持不變, 得到矩陣 M_1。即對於任意 $l\in L_1$ 有 $M_1(l,i)=M(l,4n-i+1)$, 否則 $M_1(l,i)=M(l,i)$。

步驟二: 如果 $l\in L_2$, 則 M_1 的第 l 列上下對稱翻轉, 否則對應的列保持不變, 得到矩陣 M_2。即對於任意 $l\in L_2$ 有 $M_2(i,l)=M_1(4n-i+1,l)$, 否則 $M_2(i,l)=M_1(i,l)$。

接下來, 我們證明在經過步驟一與步驟二之後, M_2 的行與列均滿足幻方條件。首先, 矩陣 M 可以被分解爲 $M = A + D_{12} + D_{21} + D_{22}$, 如等式 (11) 所示。

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11} \\ A_{11} & A_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d_{12} * E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d_{21} * E & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_{22} * E \end{bmatrix} \tag{11}$$

其次, 分別證明(11)式右端的四個矩陣在變換之後其行與列均滿足幻方條件。

對於矩陣 A, 其可進一步分解爲 $A = A_c + D_1 + D_2$, 其中 D_1 與 D_2 分別如矩陣 (12) 與 (13) 所示 (D_1 與 D_2 均爲 $4n$ 階方陣) , 而 A_c 是一個元素均爲 a_{11} 的矩陣。下面分別證明矩陣 A_c 與 D_1 以及 D_2 在變換之後滿足幻方條件。對於 A_c, 由於它的元素是同一個常數, 因此顯然得證, 且幻和等於 $4na_{11}$。

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \;\; d_1 \ldots (2n-1)d_1 \ldots \;\; 0 \;\;\; d_1 \;\; \ldots (2n-1)d_1 \\ 0 \;\; d_1 \ldots (2n-1)d_1 \ldots \;\; 0 \;\;\; d_1 \;\; \ldots (2n-1)d_1 \\ \vdots \\ 0 \;\; d_1 \ldots (2n-1)d_1 \ldots \;\; 0 \;\;\; d_1 \;\; \ldots (2n-1)d_1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & d_2 & \cdots & d_2 \\ & \cdots & & \\ (2n-1)d_2 & (2n-1)d_2 & \cdots & (2n-1)d_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & d_2 & \cdots & d_2 \\ & \cdots & & \\ (2n-1)d_2 & (2n-1)d_2 & \cdots & (2n-1)d_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

對於矩陣 D_1, 當做步驟一的變換之後, 易知每列之和等於常數 $S_{D_1} = 2n(2n-1)d_1$。在步驟二的變換之後, 每行之和也等於常數 $2n(2n-1)d_1$。同樣可以證明 D_2 在經過步驟一與步驟二的變換之後得到的矩陣的每列之和與每行之和均爲 $S_{D_2} = 2n(2n-1)d_2$。

對於矩陣 D_{12}、D_{21} 與 D_{22}, 易知在變換之後行與列滿足幻方條件, 對應三個矩陣的行與列滿足的幻和條件分別是 $S_{D_{12}} = nd_{12}$、$S_{D_{21}} = nd_{21}$ 與 $S_{D_{22}} = nd_{22}$。因此 M 經過變換得到的 M_2 的每行與每列之和等於常數 $S = 4n * a_{11} + S_{D_1} + S_{D_2} + S_{D_{12}} + S_{D_{21}} + S_{D_{22}} = 4n * a_{11} + 2n(2n-1)(d_1 + d_2) + n(d_{12} + d_{21} + d_{22})$。

下面證明矩陣 M 在經過步驟一與步驟二的變換後對角線滿足幻方條件。這裡記 $A_{12} =$

$A_{11}+d_{12}*E$、$A_{21}=A_{11}+d_{21}*E$、$A_{22}=A_{11}+d_{22}*E$。即有如下關係式。

$$A_{12}(i,j)=a_{11}+(j-1)d_1+(i-1)d_2+d_{12} \tag{14}$$

$$A_{21}(i,j)=a_{11}+(j-1)d_1+(i-1)d_2+d_{21} \tag{15}$$

$$A_{22}(i,j)=a_{11}+(j-1)d_1+(i-1)d_2+d_{22} \tag{16}$$

在變換時兩條對角線元素總是在兩條對角線上, 對於 $i\in L_1$ 則 $M(i,i)$ 與 $M(4n-i+1,4n-i+1)$ 同時分別變爲 $M_1(i,4n-i+1)$ 與 $M_1(4n-i+1,i)$, 類似地 $M(i,4n-i+1)$ 與 $M(4n-i+1,i)$ 變換爲 $M_1(i,i)$ 與 $M_1(4n-i+1,4n-i+1)$。類似地 M_1 經過變換後一個對角線元素依然成對的變換到另一個對角線上, 所以下面只需要證明 $M(i,i)+M(4n-i+1,4n-i+1)=M(i,4n-i+1)+M(4n-i+1,i)=C$, 這裡 C 是一個常數, 且 $2n*C=S$ (每條對角線上有 $2n$ 對數)。容易知 $M(i,i)$ 對應 $A_{11}(i,i)$ $(i\le 2n)$, $M(4n-i+1,4n-i+1)$ 對應的元素爲 $A_{22}(2n-i+1,2n-i+1)$ $(i\le 2n)$, $M(i,4n-i+1)$ 對應 $A_{12}(i,2n-i+1)$ $(i\le 2n)$, $M(4n-i+1,i)$ 對應 $A_{21}(2n-i+1,i)$ $(i\le 2n)$。

計算 $M(i,i)+M(4n-i+1,4n-i+1)=A_{11}(i,i)+A_{22}(2n-i+1,2n-i+1)$ 如下。

$$\begin{aligned}&A_{11}(i,i)+A_{22}(2n-i+1,2n-i+1)\\&\quad=a_{11}+(i-1)d_1+(i-1)d_2+a_{11}+(2n-i)d_1+(2n-i)d_2+d_{22}\\&\quad=2a_{11}+(2n-1)d_1+(2n-1)d_2+d_{22}\end{aligned} \tag{17}$$

計算 $M(i,4n-i+1)+M(4n-i+1,i)=A_{12}(i,2n-i+1)+A_{21}(2n-i+1,i)$ 如下。

$$\begin{aligned}&A_{12}(i,2n-i+1)+A_{21}(2n-i+1,i)\\&\quad=a_{11}+(2n-i)d_1+(i-1)d_2+d_{12}+a_{11}+(i-1)d_1+(2n-i)d_2+d_{21}\\&\quad=2a_{11}+(2n-1)d_1+(2n-1)d_2+d_{12}+d_{21}\end{aligned} \tag{18}$$

由於 $d_{12}+d_{21}=d_{22}$, 有 $M(i,i)+M(4n-i+1,4n-i+1)=M(i,4n-i+1)+M(4n-i+1,i)$, 且容易知 $2n*C=S$。這意味著對矩陣 M 施行步驟一變換不改變對角線元素之和。類似地可以證明對於矩陣 M_1 施行步驟二變換後依然使得矩陣的對角線滿足幻方條件。

綜上證明即有矩陣 M_2 爲一個幻方。

四、一些特例

上節的引理較爲一般化, 在構造幻方時尚需討論其中的各參數的選擇。本節, 我們首先討論如何構造拉馬努金的 8 階幻方, 再分析如何構造幻方 (1)∼(3)。

首先, 我們按照如矩陣 (19) 所示的列出一個 8 階方陣。在有的文獻中, 由 $1 \sim n^2$ 從左至右、從上至下排列而成的方陣被稱爲自然方陣 (natural square) [4]。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 \\ 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 & 64 \end{bmatrix}$$

(19)

易知自然方陣滿足引理條件, 對於矩陣(19), 其對應引理的參數分別是 $a_{11}=1$、$d_1=1$、$d_2=8$、$d_{12}=4$、$d_{21}=32$、$d_{22}=36$ $(d_{12}+d_{21}=d_{22})$。其次我們構造 $L_1=L_2=\{2,3,6,7\}$, 這裡有 $2+7=3+6=9$, 滿足引理中的構造 L_1 與 L_2 的條件。下面對矩陣 (19) 做行變換 $(L_1=\{2,3,6,7\})$ 得到矩陣 (20), 即對於行數屬於 L_1 的行, 從左至右對稱變換。如第 2 行的 $(9,10,11,12,13,14,15,16)$ 變換爲 $(16,15,14,13,12,11,10,9)$, 其他需要變換的行類似。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 \\ 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 18 & 17 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 \\ 48 & 47 & 46 & 45 & 44 & 43 & 42 & 41 \\ 56 & 55 & 54 & 53 & 52 & 51 & 50 & 49 \\ 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 & 64 \end{bmatrix}$$

(20)

最後, 對矩陣 (20) 進行列變換, 對於屬於 L_2 的列上下顛倒順序即得到拉馬努金的幻方 (4)。比如對於矩陣 (20) 的第二列對應的向量 $(2,15,23,26,34,47,55,58)^T$ (T意爲矩陣轉置) 轉換爲列向量 $(58,55,47,34,26,23,15,2)^T$, 對於第 3、6 與 7 列類似。

實際上, 這種基於自然方陣構造幻方的方法在文獻中已經被關注到, 如“*Magic Squares and Cubes*” 一書的第十二章對此有論述 [5], 在本文, 這種方法是一個特例, 因爲引理意味著初始方陣 M 不一定必須是自然方陣。比如, 下面我們給出針對四階的兩種 M 的排法, 如矩

陣(21) 與矩陣 (22)。

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & 8 & 16 \\ 2 & 10 & 6 & 14 \\ 3 & 11 & 7 & 15 \\ 1 & 9 & 5 & 13 \end{bmatrix} \tag{21} \qquad \begin{bmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

實際上矩陣 (21) 與矩陣 (22) 可以生成幻方 (2) 與 (3), 具體的參數如表 1 所示。注意這裡均有 $d_{12}+d_{21}=d_{22}$ 。這樣, 我們可知幻方 (1)∼(4) 均可以由引理提供的方法構造出。至此, 我們發現這四個方陣本質上都可以從一個方法構造得到, 但尚未解決一個問題, 即如何構造初始方陣 M。本節的例子表明初始方陣不一定是自然方陣, 只需要滿足方陣 (8) 的引理條件, 且遍歷了數字 $1\sim(4n)^2$ 即可。

表 1： 構造幻方 (1)∼ (4) 的參數

M	a_{11}	d_1	d_2	d_{12}	d_{21}	d_{22}	L_1	L_2	幻和
(6)	2	2	8	-1	4	3	{2,3}	{2,3}	34
(21)	4	8	-2	4	-1	3	{2,3}	{2,3}	34
(22)	16	-1	-8	-2	-4	-6	{2,3}	{2,3}	34
(19)	1	1	8	4	32	36	{2,3,6,7}	{2,3,6,7}	260

五、構造方法

上節我們已經展示了一些特別例子, 並生成了楊輝、丟勒與拉馬努金記錄或構造的不同幻方。在構造幻方的過程中, 我們發現最關鍵步驟是構造一個包含元素 $1\sim(4n)^2$ 的 $4n$ 階方陣作爲起始矩陣 M。我們已經在上節中展示了一些特別的構造方式。下面, 我們總結可以生成滿足條件的矩陣 M 的參數。首先, 我們以構造 8 階幻方爲例, 矩陣 (23)∼(25) 展示了三種構造初始矩陣 M 的形式, 因此加上矩陣 (19) 共計 4 種構造初始矩陣 M 的方式。爲了方便, 我們先假設 $a_{11}=1$, 具體參數如表 2 所示, 在後面我們將展示 $a_{11}\neq 1$ 的情形。

我們構造的原則是要使得 $1\sim(4n)^2$ 合適的劃分爲四個部分且滿足引理的條件, 經過試算我們發現表 2 所示的劃分方式均可以滿足引理條件。略一般化的推廣, 構造一般的矩陣 M

的參數如表 3 所示 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 25 & 26 & 27 & 28 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 & 36 & 49 & 50 & 51 & 52 \\ 37 & 38 & 39 & 40 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 57 & 58 & 59 & 60 \\ 45 & 46 & 47 & 48 & 61 & 62 & 63 & 64 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 11 & 13 & 15 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 17 & 19 & 21 & 23 & 18 & 20 & 22 & 24 \\ 25 & 27 & 29 & 31 & 26 & 28 & 30 & 32 \\ 33 & 35 & 37 & 39 & 34 & 36 & 38 & 40 \\ 41 & 43 & 45 & 47 & 42 & 44 & 46 & 48 \\ 49 & 51 & 53 & 55 & 50 & 52 & 54 & 56 \\ 57 & 59 & 61 & 63 & 58 & 60 & 62 & 64 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 2 & 6 & 10 & 14 \\ 17 & 21 & 25 & 29 & 18 & 22 & 26 & 30 \\ 33 & 37 & 41 & 45 & 34 & 38 & 42 & 46 \\ 49 & 53 & 57 & 61 & 50 & 54 & 58 & 62 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 4 & 8 & 12 & 16 \\ 19 & 23 & 27 & 31 & 20 & 24 & 28 & 32 \\ 35 & 39 & 43 & 47 & 36 & 40 & 44 & 48 \\ 51 & 55 & 59 & 63 & 52 & 56 & 60 & 64 \end{bmatrix} \tag{25}$$

表 2： 構造 8 階幻方的基礎方陣 M 的參數

M	a_{11}	d_1	d_2	d_{12}	d_{21}	d_{22}
(19)	1	1	8	4	32	36
(23)	1	1	4	16	32	48
(24)	1	2	8	1	32	33
(25)	1	4	16	1	2	3

表 3： 構造 $4n$ 階幻方的基礎方陣 M 的參數

a_{11}	d_1	d_2	d_{12}	d_{21}	d_{22}
1	1	$4n$	$2n$	$8n^2$	$2n(4n+1)$
1	1	$2n$	$(2n)^2$	$2\times(2n)^2$	$3\times(2n)^2$
1	2	$4n$	1	$(4n)\times(2n)$	$(4n)\times(2n)+1$
1	4	$8n$	1	2	3

在這些矩陣中, 我們假設 $a_{11}=1$, 而實際上首項的數字可以是其他的數字, 如矩陣 (21) 與 (22) 所示。下面通過兩種方式擴展 M 的構造方法。

第一種: 由於 M 可以劃分爲四個矩陣, 如 (8) 所示, 實際上它們之間可以由一個矩陣表達出來, 因此可以將 A_{11} 與 A_{22} 的位置以及 A_{12} 與 A_{21} 的位置任意調換, 此時變化的只是參數 d_{12}、d_{21} 與 d_{22}, 但條件 $d_{12}+d_{21}=d_{22}$ 依然不變 。

第二種: 對於 M 中的四個子矩陣, 如果每個矩陣同時旋轉 $\pi/2$, 容易知此時依然滿足引理條件, 此時變化的只是 d_1 與 d_2, 類似的旋轉 π、$2\pi/3$ 均滿足引理條件 (旋轉 2π 即回到原始矩陣)。此外, 易知如果四個子矩陣同時延著對角線進行翻折以及中軸線翻折, 則依然滿足矩陣 (8) 所需的條件。因此, 對於這四個子矩陣同時做 8 種變換 (即正方形的對稱群的元素個數) , 則均滿足引理條件。

從上文可知, 對於每個滿足引理條件的方陣 M 均對應 $(C(2n,n))^2$ 個幻方, 因此當 n 較大時, 本文的方法可以構造大量 $4n$ 階幻方 。

下面我們舉例構造 8 階幻方。首先, 我們選擇矩陣 (25) 做調整生成 M。第一步, 四個子矩陣都按照中心旋轉 $\pi/2$, 得到矩陣 (26), 這一步可以有 8 種調整方法。然後這四個矩陣的位置重新調整如矩陣 (27), 即 A_{12} 與 A_{21} 對調 。最後設置 $L_1=\{1,4,5,8\}$ 與 $L_2=\{1,2,7,8\}$, 得到幻方如矩陣 (26) 所示。這一步可以有 $(C(4,2))^2$ 即 36 種調整方法。

$$\begin{bmatrix} 13 & 29 & 45 & 61 & 14 & 30 & 46 & 62 \\ 9 & 25 & 41 & 57 & 10 & 26 & 42 & 58 \\ 5 & 21 & 37 & 53 & 6 & 22 & 38 & 54 \\ 1 & 17 & 33 & 49 & 2 & 18 & 34 & 50 \\ 15 & 31 & 47 & 63 & 16 & 32 & 48 & 64 \\ 11 & 27 & 43 & 59 & 12 & 28 & 44 & 60 \\ 7 & 23 & 39 & 55 & 8 & 24 & 40 & 56 \\ 3 & 19 & 35 & 51 & 4 & 20 & 36 & 52 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} 13 & 29 & 45 & 61 & 15 & 31 & 47 & 63 \\ 9 & 25 & 41 & 57 & 11 & 27 & 43 & 59 \\ 5 & 21 & 37 & 53 & 7 & 23 & 39 & 55 \\ 1 & 17 & 33 & 49 & 3 & 19 & 35 & 51 \\ 14 & 30 & 46 & 62 & 16 & 32 & 48 & 64 \\ 10 & 26 & 42 & 58 & 12 & 28 & 44 & 60 \\ 6 & 22 & 38 & 54 & 8 & 24 & 40 & 56 \\ 2 & 18 & 34 & 50 & 4 & 20 & 36 & 52 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} 52 & 36 & 31 & 15 & 61 & 45 & 18 & 2 \\ 6 & 22 & 41 & 57 & 11 & 27 & 40 & 56 \\ 10 & 26 & 37 & 53 & 7 & 23 & 44 & 60 \\ 64 & 48 & 19 & 3 & 49 & 33 & 30 & 14 \\ 51 & 35 & 32 & 16 & 62 & 46 & 17 & 1 \\ 5 & 21 & 42 & 58 & 12 & 28 & 39 & 55 \\ 9 & 25 & 38 & 54 & 8 & 24 & 43 & 59 \\ 63 & 47 & 20 & 4 & 50 & 34 & 29 & 13 \end{bmatrix} \tag{28}$$

六、構造帶有子幻方的幻方

一個子幻方是指幻方中的一個滿足幻方條件的子方陣。由於本文的方法是基於對稱變換,因此容易生成帶有子幻方的幻方。這裡僅舉一例說明。觀察矩陣 (24), 我們可以看到其中的中心部分的 4 階方陣如矩陣 (29) 所示。顯然這個方陣滿足引理條件, 其中 $a_{11}=21$、$d_1=2$、$d_2=8$、$d_{12}=-3$, $d_{21}=16$、$d_{22}=13$ $(-3+16=13)$。如果我們選擇矩陣 (24) 作爲 M, 並且選擇 $L_1=\{1,3,6,8\}$ 與 $L_2=\{2,3,6,7\}$, 則恰好對於方陣 (29) 也做了變換。此時矩陣 (29) 也可作爲初始矩陣進行變換, 且有 $L_1=\{1,4\}$ 與 $L_2=\{1,4\}$, 這滿足引理條件, 得到幻方如矩陣 (30) 所示, 這是一個四階子幻方 (幻和爲 130)。進一步, 8 階方陣 (24) 變換成幻方如 (31) 所示。

$$\begin{bmatrix} 21 & 23 & 18 & 20 \\ 29 & 31 & 26 & 28 \\ 37 & 39 & 34 & 36 \\ 45 & 47 & 42 & 44 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} 44 & 18 & 23 & 45 \\ 37 & 31 & 26 & 36 \\ 29 & 39 & 34 & 28 \\ 20 & 42 & 47 & 21 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 62 & 60 & 2 & 7 & 61 & 59 & 1 \\ 9 & 51 & 53 & 15 & 10 & 52 & 54 & 16 \\ 24 & 46 & 44 & 18 & 23 & 45 & 43 & 17 \\ 25 & 35 & 37 & 31 & 26 & 36 & 38 & 32 \\ 33 & 27 & 29 & 39 & 34 & 28 & 30 & 40 \\ 48 & 22 & 20 & 42 & 47 & 21 & 19 & 41 \\ 49 & 11 & 13 & 55 & 50 & 12 & 14 & 56 \\ 64 & 6 & 4 & 58 & 63 & 5 & 3 & 57 \end{bmatrix} \tag{31}$$

七、結語

本文基於楊輝、丟勒以及拉馬努金的幻方的啟發, 提出了一種構造雙偶數幻方的方法。儘管幻方 (1)~(4) 的最初的構造方法未必如本文所述, 但作爲特例, 本文的方法可以構造《續古摘奇算法》、《憂鬱》以及拉馬努金筆記本中的四個幻方。這種方法的特點是按照對稱變換的方式構造, 特別的是本文展示了基於對稱性可以構造大量幻方。

参考文獻

1. 郭熙漢。楊輝算法導讀。湖北教育出版社, 298, 1996。

2. 吳鶴齡。幻方及其他 — 娛樂數學經典名題。科學出版社, 37-38, 2004年。
3. Bruce C. Berndt. Ramanujan's notebooks. Springer, 22, 1985。
4. W. S. Andrews, Magic squares and cubes. Cosimo, Inc., 295, 2004年。
5. W. S. Andrews, Magic squares and cubes. Cosimo, Inc., 296, 2004年。
6. 吳鶴齡。幻方及其他 — 娛樂數學經典名題。科學出版社, 76, 2004年。

—本文作者任教中國浙江工商大學統計與數學學院—