數學傳播　44卷1期, pp. 97-101

# 一類最小值問題的通法通解

張小川

胡不歸問題是一個古老的問題, 近年各地頻繁出現以胡不歸問題爲原型的中考題, 學生普遍感到問題陌生, 無從下手。筆者查閱了部分文獻和資料, 也有提及這類中考題的文獻, 多數是在討論問題的答案, 沒有說明這類問題的通法通解, 本文以 2017 廣州中考數學 24 題爲例, 通過分析解題思路, 歸納總結出這類問題的通法通解, 整理成短文, 供參考。

爲使讀者清楚問題的背景, 先簡要說明古老的胡不歸問題。

如圖 1, $A$ 是出發點, $B$ 是目的地, $MN$ 是一條驛路, 在目的地 $B$ 一側全是砂土地帶。在驛路 $MN$ 上的速度爲 $v_1$, 在砂土地上的速度爲 $v_2$。$AP$ 在確定的直線 $MN$ 上, $BP$ 是位置不確定的線段。爲使得從 $A$ 經過 $P$ 到 $B$ 的時間最少, $P$ 點選在什麼位置?

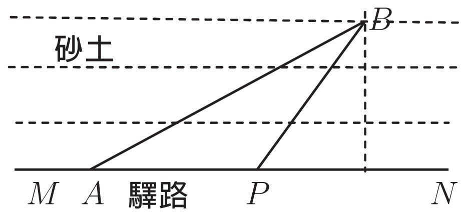


圖 1

## 一、問題

(2017 廣州 24 題) 如圖 2, 矩形 $ABCD$ 的對角線 $AC$、$BD$ 交於點 $O$, $\triangle COD$ 關於 $CD$ 的對稱圖形爲 $\triangle CED$。

(1) 求證: 四邊形 $OCED$ 爲菱形。

(2) 連接 $AE$, 若 $AB=6$cm, $BC=\sqrt{5}$cm。

1. 求 $\sin\angle EAD$ 的值。
2. 若點 $P$ 爲線段 $AE$ 上一動點 (不與點 $A$ 重合), 連接 $OP$, 一動點 $Q$ 從 $O$ 出發, 以 1cm/s 的速度沿線段 $OP$ 勻速運動到點 $P$, 再以 1.5cm/s 的速度沿線段 $PA$ 勻速運動到點 $A$, 到達點 $A$ 後停止運動。當點 $Q$ 沿上述路線運動到點 $A$ 所需要的時間最短時, 求 $AP$ 的長和點 $Q$ 走完全程所需的時間。

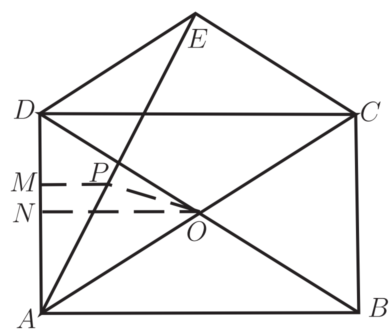


圖 2

## 思路分析

(1) 略.

(2) 1. $\sin\angle EAD=\dfrac{2}{3}$, 過程略。

2. 如圖 2, 由題目給出的條件可以知道點 $Q$ 走過的路線爲 $OP+PA$, 又知道點 $Q$ 在 $OP$ 和 $PA$ 上的速度, 可以計算出點 $Q$ 走完全程所需的時間 $t=\dfrac{OP}{1}+\dfrac{PA}{1/5}$, 化簡得 $t=OP+\dfrac{2}{3}PA$。

現在問題轉化爲求 $OP+\dfrac{2}{3}PA$ 的最小值問題。

兩條線段的倍數都爲 1 的 $a+b$ 類型的最小值問題, 是大家熟悉的問題, 考慮將 $\dfrac{2}{3}PA$ 經過變換, 變換成另外一條倍數是1線段, 就轉化成了 $a+b$ 類型的最小值問題。

有如下思考: (1) 代替 $\dfrac{2}{3}PA$ 的線段與線段 $OP$ 有公共端點 $P$, 以便運用「兩點之間線段最短」來解決; (2) 過點 $A$ 作一個銳角, 且其正弦值是 $\dfrac{2}{3}$, 再過點 $P$ 作垂線。

由 1, $\sin\angle EAD=\dfrac{2}{3}$, $\angle EAD$ 恰好就是要作的銳角。

過點 $P$ 作 $PM\perp AD$, 此時 $PA$ 是直角三角形 $\triangle PAM$ 的斜邊。

因爲 $\sin\angle PAM=\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{2}{3}$, 得到 $PM=\dfrac{2}{3}PA$。

此時有 $t=OP+\dfrac{2}{3}PA=OP+PM$。

求 $t$ 的最小值也就是求 $OP+PM$ 的最小值, 當 $O$、$P$、$M$ 在同一條直線上時, $OP+PM$ 取最小值。

如圖 2, 過點 $O$ 作 $ON\perp AD$, 交 $AE$ 於點 $P$, 交 $AD$ 於點 $N$, 圖 2 中的 $OP+PM$ 的最小值就是圖 2 中 $ON$ 的長。在直角三角形 $\triangle DAB$ 中, $ON$ 是直角三角形 $\triangle DAB$ 的中位線, 所以 $ON=\dfrac{1}{2}AB=3$。

**說明**: 上述問題中, $OP$ 是位置不確定的動線段, $PA$ 在定線段 $AE$ 上, 線段 $PA$ 上有一個動點 $P$ 和一個定點 $A$。以定線段 $AE$ 上的 $PA$ 爲斜邊作直角三角形, 根據 1 中的 $\sin\angle EAD=\dfrac{2}{3}$, 將 $\dfrac{2}{3}PA$ 轉化爲 $PM$。

當原題中沒有 $\sin\angle EAD=\dfrac{2}{3}$ 這個條件時, 也應作一個以 $A$ 爲頂點、正弦值等於 $\dfrac{2}{3}$ 銳角, 再過點 $P$ 作垂線。

## 二、通法通解

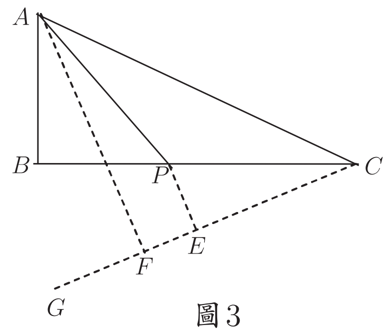

圖3

如圖 3, $P$ 是線段 $BC$上一個動點, 求 $AP + k \cdot PC$ $(0 < k < 1)$ 的最小值。

此問題中, 動點 $P$ 在直線上運動, $AP$ 是位置不確定的動線段, 倍數不爲 1 的線段 $PC$ 在定線段 $BC$ 上, 線段 $PC$ 上有一個動點 $P$ 和一個定點 $C$。

通常思路: 動點 $P$ 在直線上運動時, 倍數不爲 1 線段 $PC$ 上的定點 $C$ 作一個角 $\angle BCG$, 使得 $\sin \angle BCG = k$, $\angle BCG$ 與動線段 $AP$ 分別在確定線段 $BC$ 的兩側; 再過倍數不爲 1 的線段 $PC$ 上的動點 $P$ 作 $PE \perp CG$。

在直角三角形 $\triangle PCE$ 中, $\sin \angle BCG = \dfrac{PE}{PC} = k$, 即 $PE = k \cdot PC$。至此, $AP + k \cdot PC$ 的最小值轉化爲 $AP + PE$ 的最小值, 當 $A$、$P$、$E$ 在同一直線上時, $AP + PE$ 的值最小。

過點 $A$ 作 $AF \perp CG$, 線段 $AF$ 的長就是 $AP + PE$ 的最小值, 也就是所求的 $AP + k \cdot PC$ 最小值。

上述通法可以簡述爲: 動點在直線上運動時, 過倍數不爲 1 的線段上定點作銳角, 使銳角的正弦值等於 $k$, 再過倍數不爲 1 的線段上動點作垂線。

## 三、通法應用

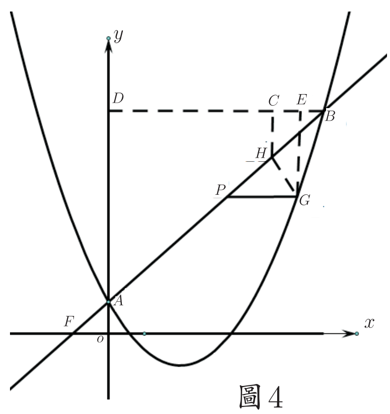

圖4

**例**1: (2016 重慶 B 卷壓軸題改編) 如圖 4, 二次函數 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ 的圖像與一次函數 $y = x + 1$ 的圖像交於 $A$、$B$ 兩點, 點 $P$在 $AB$ 線段上。其橫坐標是 $\dfrac{5}{2}$, 過點 $P$作 $PG // x$ 軸, 交拋物線於點 $G$, 線段 $AB$ 上找一點 $H$ (不與 $A$、$B$ 重合), 使 $GH + \dfrac{\sqrt{2}}{2}BH$ 的值最小, 求 $GH + \dfrac{\sqrt{2}}{2}BH$ 的最小值。

思路分析

$BH$ 在定線段 $AB$ 上, $H$ 是動點, $B$是定點。

過定點 $B$ 作 $\angle ABD = 45°$, $\angle ABD$ 在直線 $y = x + 1$ 上方, 過動點 $H$ 作 $HC \perp BD$。

在直角三角形 $\triangle HBC$ 中, $\sin\angle ABD=\dfrac{CH}{BH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $CH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BH$。

$GH+\dfrac{\sqrt{2}}{2}BH$ 的最小值轉化爲 $GH+CH$ 的最小值。

當 $G$、$H$、$C$ 在同一直線上的時候, $GH+CH$ 最小。

過點 $G$ 作 $GE\perp BD$, 線段 $GE$ 的長度就是 $GH+CH$ 的最小值。

下面求線段 $GE$ 的長。

由一次函數的解析式爲 $y=x+1$ 可以計算出 $\angle AFO=45^\circ$, 又 $\angle ABD=45^\circ$, 所以 $BD//x$ 軸, 所以 $BD\perp y$軸。只需用點 $E$ 的縱坐標減去點 $G$ 的縱坐標就可以計算出線段 $GE$ 的長。

$P$ 在 $AB$ 上, 可以計算出 $P\Big(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}\Big)$。因爲 $PG//x$ 軸, 所以 $G$ 的縱坐標爲 $\dfrac{7}{2}$. 由拋物線和直線的解析式列方程組, 求出點 $B$ 的縱坐標爲 7, 所以, $GE$ 的長爲 $\dfrac{7}{2}$。

即 $GH+\dfrac{\sqrt{2}}{2}BH$ 的最小值爲 $\dfrac{7}{2}$。

**例**2: (2016 徐州壓軸題) 如圖 5, 在平面直角坐標系中, 二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖像經過點 $A(-1,0)$, $B(0,-\sqrt{3})$、$C(2,0)$, 其中對稱軸與 $x$ 軸交於點 $D$。

(1) 求二次函數的運算式及其頂點座標;

(2) 若 $P$ 爲 $y$ 軸上的一個動點, 連接 $PD$, 求 $PD+\dfrac{1}{2}PB$ 的最小值。

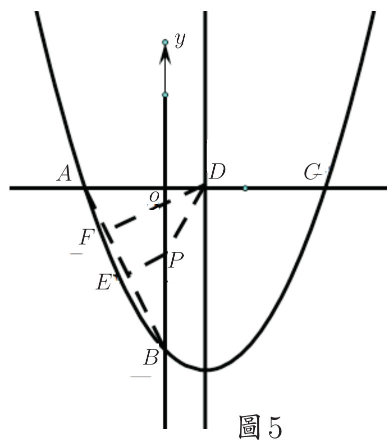

圖5

思路分析

(1) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big(x-\dfrac{1}{2}\Big)^2-\dfrac{9}{8}\sqrt{3}$, 過程略。

(2) $PB$ 在定線段 $OB$ 上, $P$ 是動點, $B$ 是定點。

過定點 $B$ 在 $y$ 軸左側作一個銳角, 使得正弦值等於 $\dfrac{1}{2}$。分析題目的條件發現, $A(-1,0)$, $B(0,-\sqrt{3})$, 有 $\sin\angle PBA=\dfrac{1}{2}$; 再過點 $P$ 作 $PE\perp AB$, 在直角三角形 $\triangle PBE$ 中, $PE=\dfrac{1}{2}PB$。

所以, $PD+\dfrac{1}{2}PB$ 的最小值轉化爲 $PD+PE$ 的最小值, 當 $D$、$P$、$E$ 三個點在同一

直線上時, $PD+PE$ 最短。

過點 $D$ 作 $DF\perp AB$, 線段 $DF$ 的長是 $PD+PE$ 的最小值, 也就是 $PD+\dfrac{1}{2}PB$ 的最小值。

在直角三角形 $\triangle DAF$ 中, 由 $AD=\dfrac{3}{2}$, $\angle DAB=60^\circ$, 可以計算出 $DF=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$。

即 $PD+\dfrac{1}{2}PB$ 的最小值為 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$。

## 四、思考

圖 3 中, 求 $AP+k\cdot PC$ $(0<k<1)$ 的最小值, 問題中有顯著特徵: $0<k<1$、倍數不為 1 的線段 PC 在固定線段上、動點 $P$ 在直線上運動。

1. $k\geq 1$ 時, 會有什麼情況?
   當 $k\geq 1$ 時 $AP+k\cdot PC\geq AP+PC\geq AC$, 此時 $AP+k\cdot PC$ 的最小值是 $AC$。
2. 倍數不為 1 的線段是位置不確定的 $AP$ 時, 會有什麼情況?
   倍數不為 1 的線段是位置不確定的 $AP$ 時, 求 $k\cdot AP+PC$ 的最小值。可以將 $k\cdot AP+PC$ 變形為 $k\cdot AP+PC=k\Big(AP+\dfrac{1}{k}PC\Big)$, 經過這樣的變形, 位置不確定的線段 $AP$ 的倍數變成 1, 問題得到解決。
3. 動點 $P$ 在圓周上運動時, 不屬於此類問題, 在應用通法通解時, 需區分清楚動點的運動軌跡是直線還是圓周。

## 参考文獻

1. 曹軍。「通性通法」應為解題首選方法[J]。數學通報, 2012,7。

—本文作者任教中國山東高青縣實驗中學—