數學傳播　44卷1期, pp. 89-93

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{F_i}{10^i}=\dfrac{10}{89}$ 的探源與推廣

張進安

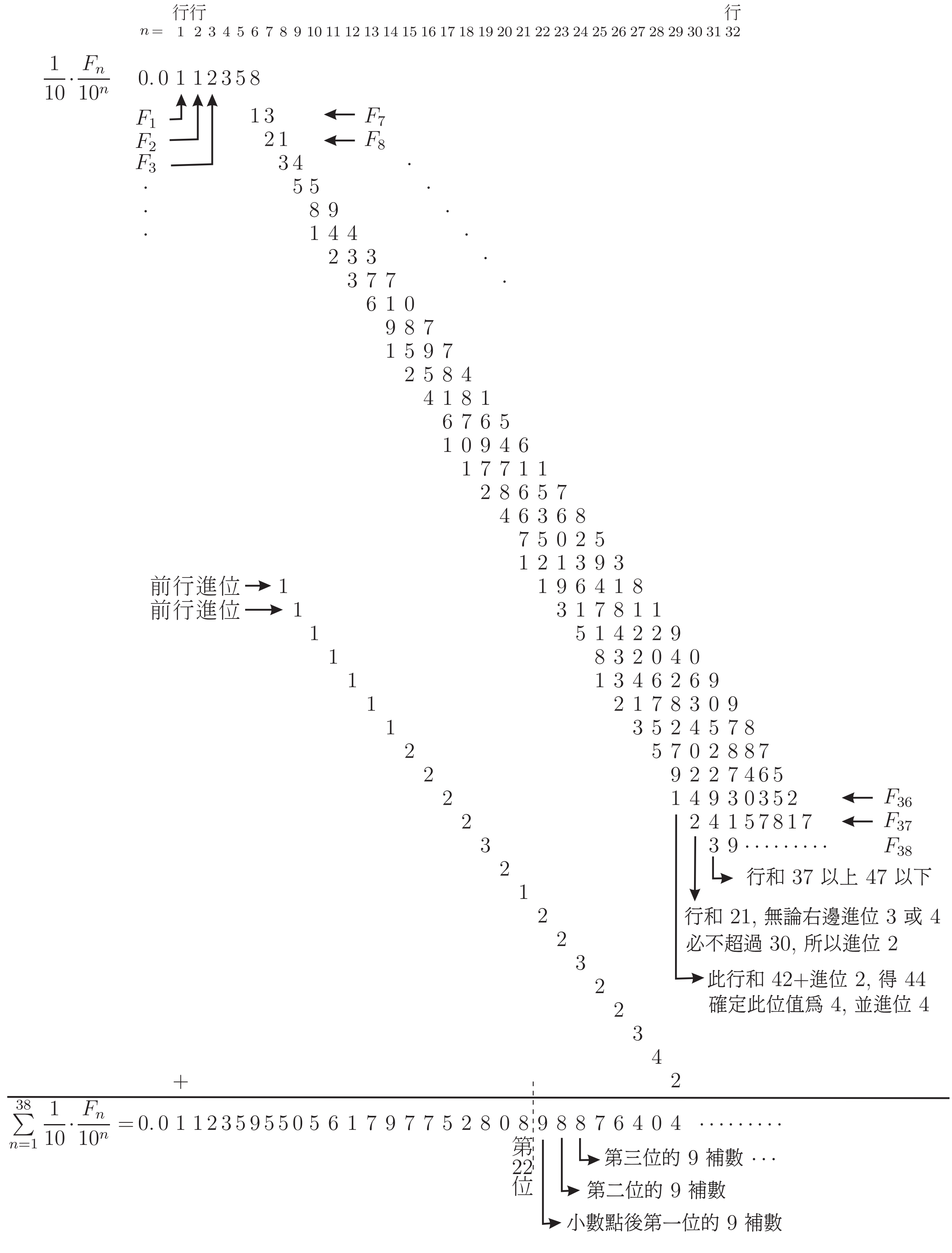
F_n是著名的費波那契 (Fibonacci) 數列, $F_1=1$, $F_2=1$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$, 簡單的遞迴定義卻在數學界和自然科學界大放異彩。其前 11 項是：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89。洪萬生教授在翻譯理查·菲立普 (Richard Phillips) 著的《數字邏輯 101》一書中對 89 的介紹是：「89 是一個質數, 也是一個費波那契數。八十九分之一的十進位小數為 $0.01123595\cdots$, 很奇特的, 這個數列以費波那契數為開端, 但是此一模式被 9 破壞, 這一個循環小節有 44 位 $\cdots$。」

對於 $\dfrac{1}{89}=0.01123595\cdots$, 我的第一個直覺是費氏數列的規則並沒有被破壞。原來該出現的 8 加上下一項 13 進位過來的 1, 不就是 9 嗎? 以下每一項是否也遵循這個規則確實值得實際計算一下。這和以前研究循環小數時, 計算 $\dfrac{1}{49}$ 的循環節有幾位碰到的問題一樣。$\dfrac{1}{49}=0.020408163265\cdots$, 5 的出現, 破壞了 2 的冪次, 但 5 是 64 的 4 和下一項 128 進位的 1 的和。$\dfrac{1}{49}$ 的問題很容易用等比級數來確定無誤:

$$\frac{1}{49}=\frac{2}{98}=\frac{\frac{2}{100}}{\frac{98}{100}}=\frac{\frac{2}{100}}{1-\frac{2}{100}}=\frac{2}{100}+\Big(\frac{2}{100}\Big)^2+\Big(\frac{2}{100}\Big)^3+\cdots+\Big(\frac{2}{100}\Big)^n+\cdots.$$

但是 $\dfrac{1}{89}=0.01123595\cdots$ 是否就是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{F_i}{10^{i+1}}$ 這個級數的收斂值, 看來就沒有這麼簡單了。我們先考慮級數收斂的必要條件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{10^{n+1}}=0$, 我們利用已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 這個黃金比的性質, 假設對某項 k, $\dfrac{F_k}{10^{k+1}}=a$, 則下一項 $\dfrac{F_{k+1}}{10^{k+2}}$ 接近 $\dfrac{F_k\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{10^{k+1}\cdot 10}\fallingdotseq a\cdot\dfrac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{10}=a\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{20}$, 所以自第 k 項之後的每一項幾乎是以 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{20}$ 為公比的等比級數

在變小, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{10^{n+1}}=0$ 是毋庸置疑的。接著用類似試算表的直式計算來逼近。(直式計算表如附圖)



累加這個表的直式並不容易, 因爲直式加法要從最右一行開始, 而這個無窮級數並沒有最後一行。如果要從第 k 行算起, 就必須考慮第 $k+1$ 行將進位多少過來。所以找一個能確定估計進位的突破點是很重要的。如圖中, 第 31 行的和是 37, 加上第 32 行進位的數, 可能是 37 到 40 幾, 所以可以確定進位到第 30 行的數不超過 4, 而第 30 行的和只有 21, 無論進位是 3 或 4, 加上去之後第 30 行進位到第 29 行的數一定是 2, 從這裡開始, 我們就能順利的計算第 28、27、26 $\cdots$ 到第 6 行, 而可確定下來 $\sum_{n=1}^{38}\frac{F_n}{10^{n+1}}$ 的前 29 位 (若包括第一位的 0, 應該是前 30 位小數是:

$$\frac{1}{89}=0.011235955056179775280898876404\cdots.$$

對於熟悉循環小數的人來說, $\frac{1}{89}$ 有 $\frac{1}{2}(89-1)$ 位循環節, 所以對於有 44 位循環節的小數, 只要計算到 22 位 (44 的一半), 後面的 22 位正好是前一半的 9 補數 (例如 $\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$, 有 6 位循環, 所以後 3 位的 857, 恰好是 $999-142$, 再如 $\frac{1}{13}=0.\overline{076923}$, 也有 6 位循環, 後 3 位也是 $999-076=923$)。所以我們可以完成 $\frac{1}{89}$ 的 44 位循環節:

$$\frac{1}{89}=0.\overline{01123595505617977528089887640449438202247191}.$$

爲了處理 F_n 和 10^n 的同步, 兩邊都乘以 10 即可得到:

$$\frac{10}{89}=0.\overline{11235955056179775280898876404494382022471910}.$$

即使不計我們用 9 補數推算出來的位數, 我們用前 38 項的費氏數列, 算出

$$\sum_{n=1}^{38}\frac{F_n}{10^{n+1}}\fallingdotseq 0.011235955056179775280898876404 \text{ 和 } \frac{1}{89}$$

的小數, 誤差已小到 $\frac{1}{10^{30}}$。雖然無論計算到幾位, 都無法代替數學上的證明, 但是我們可以大膽的假設, 這個關於費氏數列的級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^{n+1}}$ 收斂到 $\frac{1}{89}$, 或者改爲 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^n}=\frac{10}{89}$ 會更簡單明瞭, 接著就是如何證明了。

手上沒有這類文獻, 但網上卻無所不有。Google「1/89」找到一個 www2.math.ou.edu 的網站, 上面有 Robert Miner 發表的 “The remarkable Number 1/89”。證明很漂亮, 可惜表達運算的矩陣有些地方排版錯誤, 不一步一步跟著計算, 很不容易看出式子的導出。這裡借

用 Robert Miner 的方法, 直接證明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{F_n}{10^n}=\dfrac{10}{89}$:

令 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{1}{100} & \dfrac{1}{10}\end{pmatrix}$,

則 $A\begin{pmatrix}\dfrac{F_i}{10^i}\\ \dfrac{F_{i+1}}{10^{i+1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{1}{100} & \dfrac{1}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{F_i}{10^i}\\ \dfrac{F_{i+1}}{10^{i+1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{F_{i+1}}{10^{i+1}}\\ \dfrac{F_i+F_{i+1}}{10^{i+2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{F_{i+1}}{10^{i+1}}\\ \dfrac{F_{i+2}}{10^{i+2}}\end{pmatrix}$.

考慮 $\begin{pmatrix}\dfrac{F_1}{10^1}\\ \dfrac{F_2}{10^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{F_2}{10^2}\\ \dfrac{F_3}{10^3}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\dfrac{F_n}{10^n}\\ \dfrac{F_{n+1}}{10^{n+1}}\end{pmatrix}+\cdots$

$$=(I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots)\begin{pmatrix}\dfrac{F_1}{10^1}\\ \dfrac{F_2}{10^2}\end{pmatrix}.$$

因為 $(I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots)=\dfrac{I}{I-A}=(I-A)^{-1}=\dfrac{1}{89}\begin{pmatrix}90 & 100\\ 1 & 100\end{pmatrix}$,

所以 $\begin{pmatrix}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{F_n}{10^n}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{F_{n+1}}{10^{n+1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{F_1}{10^1}\\ \dfrac{F_2}{10^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{F_2}{10^2}\\ \dfrac{F_3}{10^3}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\dfrac{F_n}{10^n}\\ \dfrac{F_{n+1}}{10^{n+1}}\end{pmatrix}+\cdots$

$$=\frac{1}{89}\begin{pmatrix}90 & 100\\ 1 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{F_1}{10^1}\\ \dfrac{F_2}{10^2}\end{pmatrix}=\frac{1}{89}\begin{pmatrix}9F_1+F_2\\ \dfrac{F_1}{10}+F_2\end{pmatrix}=\frac{1}{89}\begin{pmatrix}10\\ \dfrac{11}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{10}{89}\\ \dfrac{11}{890}\end{pmatrix}.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{F_n}{10^n}=\dfrac{10}{89}$ 得證。

現代每一品牌的手機都功能強大, 利用手機的計算功能, 打進 $1\div 0.0101020305081321 34\cdots=$ 就能出現 $98.99000000000000054781066000\cdots$, 小數點之後連續的 0 愈多, 表示誤差愈小, 我們可以簡單的預測 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{F_n}{10^{2n}}=\dfrac{100}{9899}$; 或者打進 $1\div 0.0010010020030050080130210 34055$, 得到的答案是 $998.999000000000000000000000$, 這麼多的 0 表示誤差已小到可以忽略。我們可以大膽的預測 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{F_n}{10^{3n}}=\dfrac{1000}{998999}$。或者更進一步推廣到一個共通的模式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^{kn}}=\frac{10^k}{10^{2k}-10^k-1}.$$

這裡的 k 要不要限制在正整數, 你可以拿出手上的計算機自己體驗一下。

補記: 把稿子寄出去之後, 我仍滿腦子想著這個問題: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^{kn}}=\frac{10^k}{10^{2k}-10^k-1}$ 的 k, k不限制在整數當然不是問題, 沒有理由說 $k=1$, $k=2$ 成立, $k=\frac{3}{2}$ 不成立, 甚至初步估計 $k=\frac{1}{2}$, 這個極限還是存在的。但是 k 總不能太小, 比如 k 如果等於 0, 級數就變成 $\sum_{n=1}^{\infty}F_n$, 當然是發散的。特別的令 $k=\log 2$, 則這個級數會變成一個更漂亮的型式: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}$, 這個級數會收斂嗎? 感謝 Robert Miner 在證明中的方法, 令 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, 可以求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=2$, 這個收斂太精彩了, 用高中生常用的求級數和的方法, 也能得到這個結果:

$$
\begin{aligned}
&\text{令 } S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\frac{5}{32}+\cdots+\frac{F_n}{2^n}+\cdots,\\
&\text{則 } 2S=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{5}{16}+\cdots+\frac{F_{n+1}}{2^n}+\cdots\\
&\qquad =F_1+\frac{F_2}{2}+\frac{F_3}{4}+\frac{F_4}{8}+\cdots+\frac{F_{n+1}}{2^n}+\cdots,\\
&\text{所以 } 2S-S=F_1+\frac{F_2-F_1}{2}+\frac{F_3-F_2}{4}+\frac{F_4-F_3}{8}+\cdots+\frac{F_{n+1}-F_n}{2^n}+\cdots,\\
&\text{所以 } S=F_1+\frac{0}{2}+\frac{F_1}{4}+\frac{F_2}{8}+\cdots+\frac{F_{n-1}}{2^n}+\cdots\\
&\qquad =1+\frac{1}{2}\Big(\frac{F_1}{2}+\frac{F_2}{4}+\cdots+\frac{F_{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots\Big)=1+\frac{1}{2}S,\\
&\text{所以 } S=1+\frac{1}{2}S,\\
&\text{所以 } S=2
\end{aligned}
$$

我想大多數人不親自做完證明是不容易相信的。

問題再回到 k 的最小值, 如果把

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^{kn}}=\frac{10^k}{10^{2k}-10^k-1},\ \text{令 } k=\log r,\ r>0, \text{改為 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{r^n}=\frac{r}{r^{2k}-r^k-1},$$

顯然的 $r=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$ 時是發散的, 這合乎費氏數列前後兩項比值的極限, 但初步驗算 $r=-2$, $r=-3$ 時級數的收斂仍是正確的, 這又超出原先令 $k=\log r$ 時, $r>0$ 的必要條件, 有誰能說明得更清楚嗎?

—本文作者為高雄市中正高中退休教師—