數學傳播 44卷1期, pp. 85-88

「遞降階乘多項式」除以 x^2-x-1 的餘式與 OEIS A265165

陳建燁

一、序言

首先, 定義 $x^{(n)}=x(x-1)\cdots(x-n+1)$, 稱爲「$x$ 的 n 次遞降階乘多項式」, 此種多項式, 與第二類 Stirling 數, 有密切的關聯 (參考資料 [1])。

筆者在探索費氏數列與第二類 Stirling 數的過程中, 遇到了一個問題:「$x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 除以 x^2-x-1 的餘式爲何?」注意到其中的 x^2-x-1, 正是費氏數列的特徵多項式。

具體而言, 設 $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 除以 x^2-x-1 的餘式爲 A_nx+B_n, 商式爲 $Q(x)$, 亦即 $x(x-1)\cdots(x-n+1)=(x^2-x-1)\cdot Q(x)+A_nx+B_n$, 則 A_n 與 B_n 的表達式爲何, 又有什麼樣的規律呢?

回溯既往, 自多項式除法出現以來, 人們做過無數次的多項式除法, 早已發展出一般性的結論, 即所謂的「餘式定理」, 出現在每一位高中學生的數學課本上。但是相對地, 作爲一個特殊情形, 拿 $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 除以 x^2-x-1, 在筆者有限的見聞之中, 並沒有看過針對此特例量身打造的現成結論, 故藉此契機, 探索此一問題的答案。

另一方面, 拜科技進步之賜, 網路上有所謂的 OEIS, 即 On-line Encyclopedia of Integer Sequences (線上整數數列百科) [2], 在研究數列時, 只要輸入數列的前幾項, 就能查詢是否爲已知的數列, 若爲已知的數列, 還可查到其來源的論文或期刊所在, 是一個相當有用的工具。

在試算了數列 A_n 與 B_n 的前幾項之後, 出人意料之外的是, 數列 B_n 與編號爲「OEIS A265165」的數列,「幾乎」一模一樣: 將正負交替出現的 B_n 取絕對值之後, 即可得 OEIS A265165。但是查詢OEIS A265165的來龍去脈, 查到的卻是 [3], 看起來和筆者的問題, 可說是風馬牛不相及。這其中的奧妙, 引起了筆者的高度興趣。在考察兩數列的遞迴關係之後, 證明了一個結論: 設 OEIS A265165 爲數列 $\langle b_n\rangle$, 則有 $B_n=(-1)^n\cdot b_n$。

二、探索過程

(一) 多項式除法求餘式：

先試算 B_n 的前幾項, 透過多項式除法, 可得：

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= x = (x^2-x-1)\cdot 0 + (x+0) \Rightarrow A_1 = 1,\ B_1 = 0,\\
x^{(2)} &= x^2 - x = (x^2-x-1)\cdot 1 + (0x+1) \Rightarrow A_2 = 0,\ B_2 = 1,\\
x^{(3)} &= x^3 - 3x^2 + 2x = (x^2-x-1)\cdot(x-2) + (x-2) \Rightarrow A_3 = 1,\ B_3 = -2,\\
x^{(4)} &= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x\\
&= (x^2-x-1)\cdot(x^2-5x+7) + (-4x+7) \Rightarrow A_4 = -4,\ B_4 = 7,\\
x^{(5)} &= x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x\\
&= (x^2-x-1)\cdot(x^3-9x^2+27x-32) + (19x-32) \Rightarrow A_5 = 19,\ B_5 = -32,\\
x^{(6)} &= x^6 - 15x^5 + 85x^4 - 225x^3 + 274x^2 - 120x\\
&= (x^2-x-1)\cdot(x^4-14x^3+72x^2-167x+179) + (-108x+179)\\
&\quad \Rightarrow A_6 = -108,\ B_6 = 179.
\end{aligned}
$$

至此, 可得 B_n 的前幾項爲：

$$B_1 = 0,\ B_2 = 1,\ B_3 = -2,\ B_4 = 7,\ B_5 = -32,\ B_6 = 179.$$

(二)OEIS A265165：

透過 OEIS, 獲知參考資料 [3], 查閱之後, 在該文的第 13 頁, 有數列 $\langle b_n\rangle$, 其中有一段說明：「The first values of b_n (the number of basis permutations of length n) are 1, 2, 7, 32, 179, 1182, 8993, 77440 for $2\le n\le 9$. We added this sequence to the On-line Encyclopedia of Integer Sequences (hereafter abbreviated OEIS),see Sloane and collaborators(2016)... 」

無巧不成書：將 $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 除以 x^2-x-1 得餘式 A_nx+B_n, 將 B_n 的前幾項取絕對值之後, 所得數列正是 OEIS A265165 的前幾項, 這是怎麼一回事呢?

(三) 連結：

在 [3] 的第 11 頁, 有 $\langle b_n\rangle$ 的遞迴關係式：「$\cdots$ Equivalently, its coefficients b_n satisfy the recurrence $b_{n+2} = 2nb_{n+1} + (1+n-n^2)b_n$, $b_0 = b_1 = 0$, $b_2 = 1$」於是, 試著考察 B_n 的遞迴關係：

設 $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 除以 x^2-x-1 的餘式爲 A_nx+B_n, 商式爲 $Q(x)$, 則有

$$\begin{aligned}&x(x-1)\cdots(x-n+1)=(x^2-x-1)\cdot Q(x)+A_nx+B_n\\ \Rightarrow\ &x(x-1)\cdots(x-n+1)(x-n)=(x^2-x-1)\cdot Q(x)\cdot(x-n)+(A_nx+B_n)(x-n).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}(A_nx+B_n)(x-n)&=A_nx^2+(B_n-nA_n)x-nB_n\\ &=A_n(x^2-x-1)+[B_n+(1-n)A_n]x+(A_n-nB_n),\end{aligned}$$

於是可得

$$\begin{aligned}x^{(n+1)}&=x(x-1)\cdots(x-n+1)(x-n)\\ &=(x^2-x-1)\cdot Q(x)\cdot(x-n)+A_n(x^2-x-1)+[B_n+(1-n)A_n]x\\ &\quad+(A_n-nB_n)\\ &=(x^2-x-1)\cdot[Q(x)\cdot(x-n)+A_n]+[(1-n)A_n+B_n]x+(A_n-nB_n),\end{aligned}$$

由此可得

$$A_{n+1}=(1-n)A_n+B_n, \tag{1}$$

與

$$B_{n+1}=A_n-nB_n, \tag{2}$$

由 (2) 得

$$A_n=B_{n+1}+nB_n\ \Rightarrow\ A_{n+1}=B_{n+2}+(n+1)B_{n+1}.$$

於是式 (1) 成爲：

$$\begin{aligned}&B_{n+2}+(n+1)B_{n+1}=(1-n)(B_{n+1}+nB_n)+B_n\\ \Rightarrow\ &B_{n+2}+2nB_{n+1}+(n^2-n-1)B_n=0.\end{aligned}$$

令 $B_n=(-1)^n\cdot c_n$, 得

$$\begin{aligned}&(-1)^{n+2}c_{n+2}+2n(-1)^{n+1}c_{n+1}+(n^2-n-1)(-1)^nc_n=0\\ \Rightarrow\ &c_{n+2}-2nc_{n+1}+(n^2-n-1)c_n=0,\end{aligned}$$

此式與數列 OEIS A265165 (即 b_n) 所滿足的二階遞迴式完全相同, 再注意到 $c_1=-B_1=0=b_1$ 與 $c_2=B_2=1=b_2$, 即可得數列 c_n 與數列 b_n 完全相同, 於是有 $c_n=b_n$, 所以可

得 $B_n = (-1)^n \cdot c_n = (-1)^n \cdot b_n$, 至此, 證明了 $B_n = (-1)^n \cdot b_n$, 這說明了 B_n 與 b_n 兩數列的關聯性。

三、結語

本文對 B_n 與 b_n 兩數列的關聯性, 有了一點初步的認識, 但是關於此兩數列的對應以及背景, 仍有「見樹不見林」之感。此外, 數列 A_n 的規律, 也有待探索。特由此文拋磚引玉, 就教於各位賢明的讀者。

參考資料

1. 陳建燁。第二類 Stirling 數的完全齊次對稱多項式表示法(一)：使用比較係數法。高中數學學科中心電子報第 131 期, 2018 年 2 月, 1-4。
2. https://oeis.org (The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, founded in 1964 by N.J.A. Sloane).
3. Cyril Banderier, Jean-Luc Baril, Celine Moreira Dos Santos, Right-jumps & pattern avoiding permutations, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol.18 : 2, 2017, 11-13.

—本文作者任教台北市立第一女子高級中學—