數學傳播 44卷1期, pp. 78-84

數以載情——
古文詩詞意境的一些數學描繪

顧宇成

筆者平日以數學統計模型爲業, 對舞文弄墨亦頗多喜好, 閒暇之餘嘗試以一般數學統計工具來刻畫古代文豪們詩詞裡的意境, 在創作思考的過程中頗感妙趣橫生, 故撰此文冀與讀者分享。本文提供四幅以月亮爲主題的作品, 均由當前頗爲普及的 R 語言創作, 原始程式碼也開放予有興趣的讀者下載。

一、今宵酒醒何處? 楊柳岸, 曉風殘月。— 柳永 [雨霖鈴]

第一幀作品 (圖1) 使用簡單的二次函數完成, 主角「楊柳」是以多個開口向下的拋物線所描繪, 透過調整不同的頂點、焦距與函數的定義域, 即可構造型態各異的柳條。由於此句所描述的時間是在酒醒後的拂曉時刻, 因此天空與水色爲淺藍至淡紫的漸層色調。

圖1: 拋物線的應用創作 — 今宵酒醒何處? 楊柳岸, 曉風殘月。

二、月明星稀, 烏鵲南飛, 繞樹三匝, 何枝可依? — 曹操 [短歌行]

根據 [三國演義] 描述, 曹操的 [短歌行] 作於東漢建安十三年冬天的長江岸邊, 因此作品圖 2 的刻畫中, 安排了枯樹與綿延江水的景緻, 兩者皆爲碎形 (fractals) 之應用。碎形之概念已於 [數學傳播] 期刊中介紹多次 (例如林琦焜[3]), 其最重要的特徵在於自相似性(self-similarity), 亦即任意尺度上皆呈現相似的結構。本文不再贅述其數學之表述, 而是透過創作應用的機會, 介紹幾種碎形產生模式。

圖 2: 兩種碎形產生模式的應用創作 — 月明星稀, 烏鵲南飛, 繞樹三匝, 何枝可依?

首先,「繞樹三匝」中的枯樹爲一經典的二岔碎形樹, 其生成模式稱爲 Lindenmayer 系統 (Prusinkiewicz and Lindenmayer [12], 簡稱爲 L-系統)。一個 L-系統, 假設爲 G, 是由三個參數所定義, 可表爲

$$G = (V, \omega, P),$$

其中 V 爲符號的集合, ω 爲初始狀態, P 爲生成規則。給定初始狀態後, 將生成規則套用在符號集合上進行迭代, 則可產生相應的碎形圖像。以圖 3 爲例, 此二岔碎形樹系統中, $V=$ 線段; $\omega=$ 一根樹幹並有著夾角爲 35° 的枝幹; $P=$ 在枝幹末端向左右伸出夾角爲 35° 的線段成爲新枝幹, 且枝幹長度依照 0.85 之比例遞減, 依此規則 P 迭代四次 $(n=4)$ 便顯現出枯樹的輪廓。我們可進一步可觀察到每根枝幹與開岔的枝條都是相似的, 此爲自相似的意涵。若我們在產生樹枝的迭代中加入一些隨機的干擾, 使樹枝在分岔時略向左或右傾, 即可得到如圖 2 作品裡不對稱的樹枝體態。

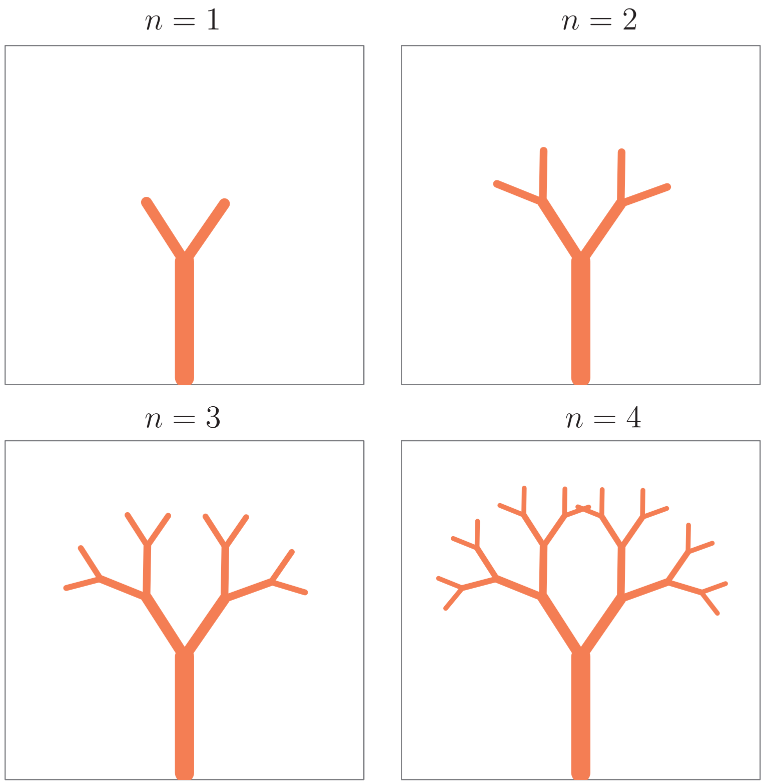

圖3: L-系統構造的二岔碎形樹。

圖 2 中的江水是使用 logistic 映射 (logistic map) 來刻畫, 其定義爲一迭代的映射 $X_{t+1} = rX_t(1-X_t)$, 最初用以描述人口成長的動態 (見田光復 [1] 與念家興 [4]), 式中的 $X_t \in [0,1]$, 代表 t 期時系統的人口數與最大可能人口數之比例, 由成長率參數 r 與初始值 X_0 所控制。圖 4(a) 展示了在不同成長率 r 的設定下, 給定 $X_0 = 0.5$, 迭代 50 期後 X_t 的軌跡。我們可見當 $r = 0.5$, X_t 很快便趨於 0; 事實上若 $r < 1$, 則無論初始值爲何, X_t 皆會凋亡收斂至 0, 此爲一個頗爲直觀的結果。當 r 分別爲 1.5 與 2.5 時, X_t 均收斂到一固定值; 然而當 $r = 3.1$, X_t 的軌跡不再收斂, 而是呈現周期爲二的震盪; 到了 $r = 3.47$ 時, X_t 軌跡變爲四周期震盪, 產生周期倍分的現象。以上顯示隨著 r 的不同, X_t 可能收斂於一固定點, 或在兩個、四個甚至更多值之間震盪。當 t 足夠大時, 這些 X_t 軌跡所在的值, 稱爲此系統的「吸子」(attractor), 其可能爲單一值或是多值的集合。以圖 4(a) 爲例, $r = 1.5$ 時的吸子爲固定點 0.33, 而 $r = 3.1$ 時吸子則有兩個值, 分別爲 0.56 與 0.76。

前述吸子周期的倍分現象, 可透過圖 4(b) 所示的分岔圖 (bifurcation diagram) 來觀察, 其中橫軸爲 r, 縱軸爲 t 大到 501 至 1000 時的 X_t 值(可視爲吸子的值), 標記爲 X_T; 注意此處省略了 $r < 1$、吸子爲零值的區段。當 $1 < r \leq 3$ 時, X_t 的軌跡最後皆被吸引至固定點 $\dfrac{r-1}{r}$,

因此吸子與 r 呈現一曲線關係 (我們可驗證之前 $r = 1.5$ 的例子, 吸子值爲 $0.33 = \dfrac{1.5-1}{1.5}$)。當 $r > 3$, 吸子周期爲二, 如之前 $r = 3.1$ 時的設定所展示; 約在 $r = 3.45$ 時震盪週期進一步增加爲四, 而後持續倍分至八、十六 ..., 大約 3.57 以後, 吸子的周期趨近無窮大, 稱爲奇異吸子 (strange attractor), 此時 X_t 不再有循環現象, 系統進入了「混沌」(chaotic) 狀態, 兩初始值間的差異即便再微小, X_t 也將產生明顯不同的迭代結果。

有趣的是, 在混沌出現後, 某些特定的 r 值仍會使得系統回到有限周期的非混沌狀態, 這些區間稱爲「穩定島」(islands of stability)。圖 4(c) 展示了在 $r = 3.83$ 附近的穩定島結構, 我們可從中觀察到類似圖 4(b) 展示的周期倍分形態, 這個自相似的特徵顯示奇異吸子擁有碎形結構, 也因此成爲一種碎形創作的模式。關於 logistic 映射的細節可參考 Boeing [10] 與 Addison [8], 而利用奇異吸子產生碎形的方法可進一步參見 Sprott [13], 該文獻提供了許多精彩的範例。圖 2 作品中的河流景象即是截取分岔圖中 $r \in [3.57, 4]$ 的區段, 透過旋轉矩陣做順時針旋轉, 即得到如圖 4(d) 所示, 由遠而近開展、如織絹般的視覺感, 系統的穩定島更巧妙地形象出了流水裡間或出現的島洲與不規則的激流光影。

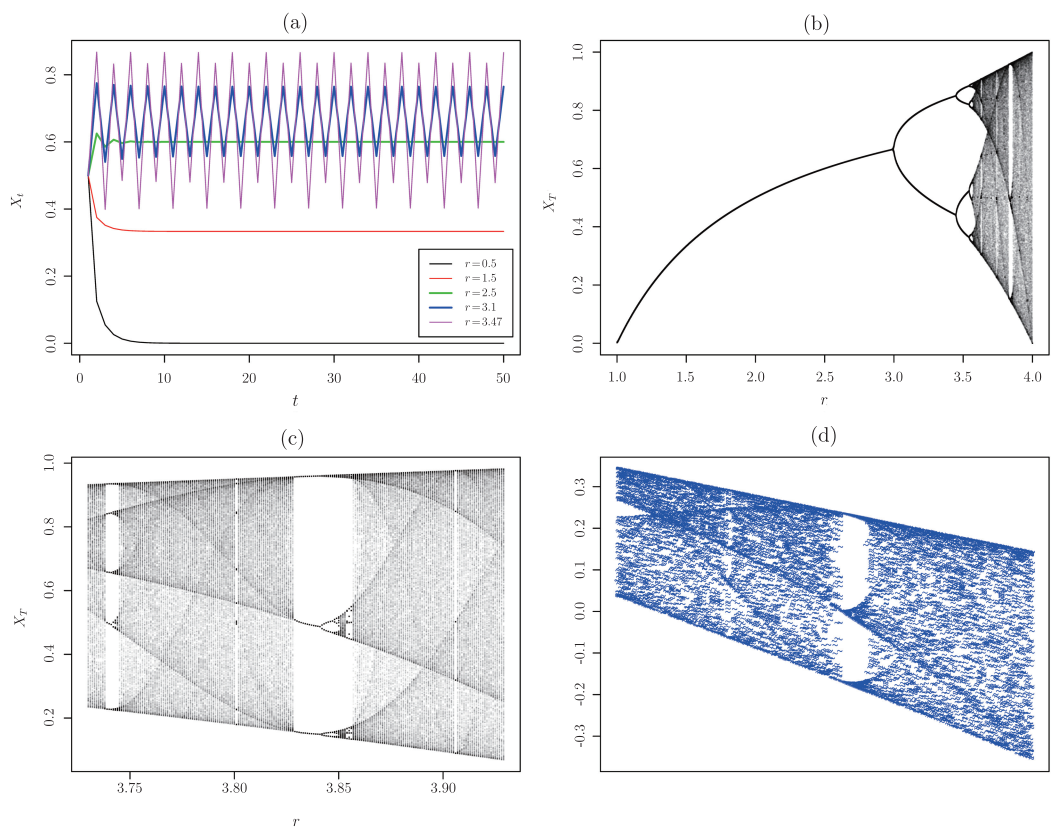

圖4: (a)Logistic 映射中, 給定$X_0 = 0.5$, X_t 在不同 r 下的迭代結果; (b)Logistic映射的分岔圖; (c) 穩定島與奇異吸子的碎形結構; (d) 分岔圖的旋轉與江水生成。

最後, 月亮旁的雲朵是多變量統計分析 (multivariate statistical analysis) 的經典圖形 — 橢圓狀的雙變量常態 (bivariate normal) 隨機樣本散布圖。當 (Y_1, Y_2) 兩常態變量之間零相關時, 此分佈的隨機樣本即呈現橫橢圓般的雲朵, 長寬比例可透過 Y_1 與 Y_2 自身的標準差進行調整。

三、三五之夜, 明月半牆, 桂影斑駁, 風移影動, 珊珊可愛。— 歸有光 [項脊軒志]

圖 5 作品刻畫的對象是高中課文 [項脊軒志] 內的段落, 圖中桂樹枝幹亦爲 L-系統產生的二岔碎形樹, 將桂樹的座標點進行線性拉伸與平移, 即可得牆面上斑駁的桂影。

圖 5: 圖形拉伸與平移 — 三五之夜, 明月半牆, 桂影斑駁, 風移影動, 珊珊可愛。

四、料得年年腸斷處, 明月夜, 短松岡。— 蘇軾 [江城子]

最後一幀作品圖 6, 描繪的是蘇軾 [江城子] 的末句, 畫面構成爲明月與山崗上的短松相對望。此圖中的短松葉爲筆者自行設計之碎形, 其生成是透過一系列的收縮映射 (contraction mapping, 見蔡宜誠 [5]), 此種模式稱爲迭代函數系 (iterated function systems, 見謝南瑞 [2] 與 La Torre [11]), 具體例子如圖7。首先我們給定如圖 7(a) 的塔狀形體作爲初始圖像, 接著將此塔形切割爲如圖 7(a) 中的 E 區塊元素 (讀者可判斷這樣的 E 共有18個); 圖 7(b) 是 E 區塊的放大, 如果把 E 均切成十五格, 略去第 1、2、4、5、6、10 格, 則我們就得到了與圖 7(a) 一

模一樣的塔形, 這個過程複製並壓縮了原本形體。將每個區塊 E 都進行相同操作, 就能得到圖 7(c) 的模樣, 我們可以注意到其中每一個堆疊的小塔都是原本圖 7(a) 的壓縮複製。將同樣的過程重複一次, 亦即把小塔再切割作 18 個區塊元素進行壓縮, 即成圖 7(d) 的短松形象。

圖 6: 迭代函數系的應用創作 — 料得年年腸斷處, 明月夜, 短松岡。

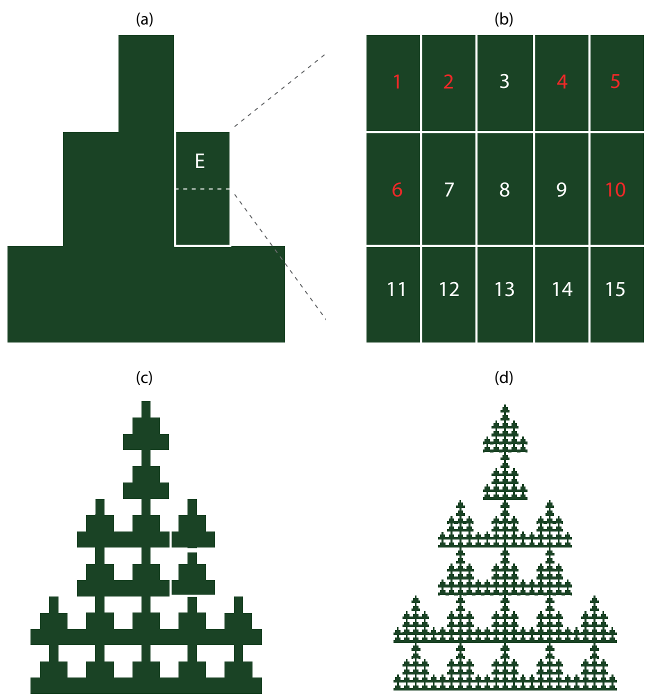

圖 7: 短松葉碎形的生成迭代。

數學發展之目的之一, 乃描述世間現象與刻畫萬物規律; 挖掘數學式與周遭事物的連結, 既饒富興味, 也可領略生硬方程背後的絕妙智慧, 而筆者相信圖像化是一個絕佳的習作與實踐。許多教育研究已闡明圖像對數學教育的重要 (例如 Bautista et al. [9]), 而數學界也早已出現結合數學與圖像來引起學習興趣的專題, 例如陳明璋等 [7] 將數學模式應用於繪畫創作, 甚至可產生國畫山水。本文藉由分享古文刻畫的創作呼應此觀點, 盼立於蕭文強 [6] 的「數學教育與滑鼠(Mathematics and the Mouse)」視角, 爲提升初學數學者們的興趣作貢獻。

原始檔網址提供如後, 供有興趣的讀者們參考:

[雨霖鈴] `https://jimyku.weebly.com/uploads/1/2/5/6/125622610/River_Town.R`

[短歌行] `https://jimyku.weebly.com/uploads/1/2/5/6/125622610/Short_Song_Ballad.R`

[項脊軒志] `https://jimyku.weebly.com/uploads/1/2/5/6/125622610/Xiang_Ji_Studio.R` (亂數產生的結果可能使圖形不盡滿意, 可重新執行幾次)

[江城子] `https://jimyku.weebly.com/uploads/1/2/5/6/125622610/Tinkling_Heavy_Rain.R`

參考資料

1. 田光復。迭代、動態系統與混沌。數學傳播, 15(3), 11-15, 1991。
2. 謝南瑞。多重碎形 (multifractals)。數學傳播季刊, 25(1), 27-32, 2001。
3. 林琦焜。從 Cantor 集到碎形。數學傳播季刊, 25(1), 3-14, 2001。
4. 念家興。碎形與動態系統。數學傳播季刊, 25(1), 15=26, 2001。
5. 蔡宜誠。定線複製法之特性及其運用之研究。國立交通大學應用數學系所碩士論文, 2005。
6. 蕭文強。數學可以怎樣教得更好? 數學傳播, 40(1), 81-86, 2016。
7. 陳明璋等。Ama (activate mind and attention) 阿嬤的家, 2019. URL http://ama.nctu.edu.tw/. Accessed: 2019-05-28.
8. Paul S. Addison, *Fractals and chaos: an illustrated course*, CRC Press, 1997.
9. A. Bautista, M. Carnadas, Brizuela B., and A. Schliemann, Examining how teachers use graphs to teach mathematics during a professional development program, *Journal of Education and Training Studies*, 3(2), 91-106, 2015.
10. Geoff Boeing, Visual analysis of nonlinear dynamical systems: chaos, fractals, self-similarity and the limits of prediction, *Systems*, 4(4):37, 2016.
11. Davide La Torre, Approximating by iterated function systems and iterated multifunction systems, *Convegozo su Metodi Matematicie Stastici per le Assicuraziono e la Finanza*, 12, 2006.
12. Przemyslaw Prusinkiewicz and Aristid Lindenmayer, *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer Science & Business Media, 2012.
13. Julien C. Sprott, *Strange attractors: Creating patterns in chaos*, volume 9. M & T Books, 1993.

—本文作者任職加拿大皇家銀行資本市場部—