數學傳播　44卷1期, pp. 67-77

二元算幾調不等式的幾何證明

連威翔

一、前言

在數學傳播 40 卷 2 期《二元算幾不等式的一個無字證明 — 附記一段學思歷程》一文中 (請參考 [1]), 我們看到了關於底下不等式漂亮的圖解證明:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \tag{1}$$

其中 a, b 爲正數。透過 [1] 的介紹, 我們知道可利用底下兩種幾何圖形來理解 (1) 式:

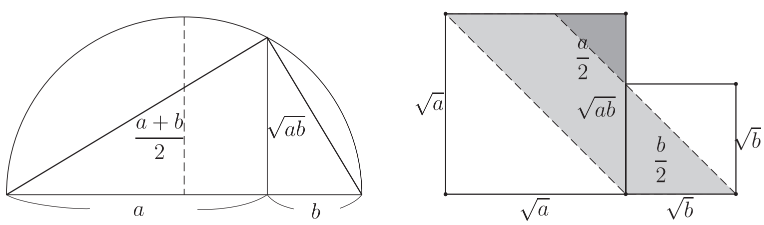

圖1

除了上面出現的 $\frac{a+b}{2}$ 與 $\sqrt{ab}$ 這兩種平均數之外, 我們知道 a, b 的調和平均數是「a, b 之倒數求算術平均後再取倒數」, 即

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}.$$

由 (1) 可知 $\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$, 對此不等式兩側同乘 ab 得

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}. \tag{2}$$

將 (1) 式與 (2) 式結合, 即得

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}. \tag{3}$$

不妨將 (3) 式稱爲「二元算幾調不等式」(註1)。若直接透過算式計算, 我們不難證明不等式 (3), 而圖 1 所引出的兩個幾何方法, 都能證明 (3) 式左半邊的不等式。不過, 是否有足以證明 (3) 式右半邊不等式的幾何方法呢?

底下, 筆者將先介紹一個幾何題, 給出其證明之後, 接著將介紹對 (3) 式的幾何證明。

二、從一道幾何問題談起

在建中通訊解題 64 期的徵答題中, 第一題是一道幾何題, 如下:

問題6401: 如圖, 已知 P 點是圓 O 外一點, $\overline{PS}$、$\overline{PT}$ 分別與圓 O 相切於 S 與 T, 過 P 點作圓 O 的割線 PAB, 交圓 O 於 A、B 兩點, 與 $\overline{ST}$ 交於 C 點。

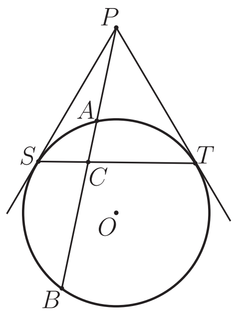

圖2

證明:

$$\frac{1}{\overline{PC}}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\overline{PA}}+\frac{1}{\overline{PB}}\Big). \tag{4}$$

問題出處與公告的解答, 請參考[2]。

除了 [2] 中的證明, 筆者另給一個證明如下:

證明: 在圖 2 中連接 $\overline{OS}$, $\overline{OP}$, $\overline{OB}$, 則 $\overline{OS}\perp\overline{PS}$ (註2) 且 $\overline{OP}\perp\overline{ST}$。設 $\overline{OP}$ 交 $\overline{ST}$ 於 E, 作 $\overline{OD}\perp\overline{PB}$ 於 D 之後, 我們換個角度, 改看下圖:

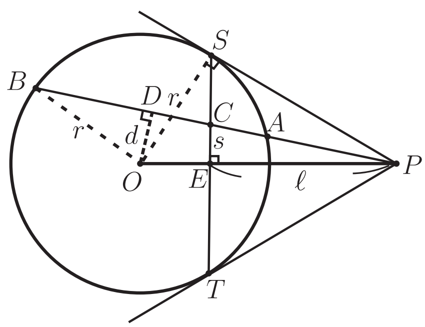

圖3

其中, 我們令 $\overline{PE}=\ell$, $\overline{CE}=s$, $\overline{OD}=d$, 並假設半徑 $\overline{OS}=\overline{OB}=r$。因 $\overline{OD}$ 平分 $\overline{AB}$, 由上圖可知

$$\overline{AD}=\overline{BD}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OD}^2}=\sqrt{r^2-d^2}.$$

因爲$\triangle PCE \sim \triangle POD$ (AA 相似), 可知 $\frac{\overline{PE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{OD}}$ 及 $\frac{\overline{PC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{OD}}$, 兩者分別可得出

$$\begin{aligned}\overline{PD} &= \frac{\overline{PE}}{\overline{CE}} \cdot \overline{OD} = \frac{\ell}{s} d,\\ \overline{PO} &= \frac{\overline{PC}}{\overline{CE}} \cdot \overline{OD} = \frac{\overline{PC}}{s} d.\end{aligned} \tag{5}$$

因此可寫出 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ 的表達式如下:

$$\begin{aligned}\overline{PA} &= \overline{PD} - \overline{AD} = \frac{\ell}{s} d - \sqrt{r^2 - d^2},\\ \overline{PB} &= \overline{PD} + \overline{BD} = \frac{\ell}{s} d + \sqrt{r^2 - d^2}.\end{aligned}$$

利用此兩表達式, 可再寫下

$$\frac{\overline{PA} + \overline{PB}}{2} = \overline{PD} = \frac{\ell}{s} d, \tag{6}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{\ell^2}{s^2} d^2 - (r^2 - d^2) = \frac{\ell^2 + s^2}{s^2} \times d^2 - r^2 = \frac{\overline{PC}^2}{s^2} \times d^2 - r^2 = \overline{PO}^2 - r^2. \tag{7}$$

注意在上式的最後一個等號處我們用上了 (5) 式。

因爲圖 3 中有 $\triangle POS \sim \triangle SOE$ (AA 相似) 的條件, 可知 $\frac{\overline{PO}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{OE}}$, 因此得

$$\overline{PO} \cdot \overline{OE} = \overline{SO}^2 = r^2. \tag{8}$$

將 (4) 式改寫爲如下的等價式子:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{\overline{PA} + \overline{PB}}{2} \cdot \overline{PC}. \tag{9}$$

先利用 (6), (7) 兩式的結果, 考慮 (9) 式的左式與右式相減, 再利用 (5), (8) 兩式可知

$$\begin{aligned}\text{(9) 左式} - \text{(9) 右式} &= \overline{PO}^2 - r^2 - \frac{\ell}{s} d \cdot \overline{PC} = \overline{PO}^2 - r^2 - \overline{PO} \cdot \ell\\ &= \overline{PO} \cdot (\overline{PO} - \overline{PE}) - r^2 = \overline{PO} \cdot \overline{OE} - r^2 = r^2 - r^2 = 0.\end{aligned}$$

這樣子就證明了 (9) 式, 因此 (4) 式得證(註3)。

上面的證明與原本 [2] 中的解法相較, 篇幅著實多出不少。原解法對應在圖 3 中, 是先由 C, E, O, D 四點共圓與 $\triangle SPE$, $\triangle OPS$ 這組相似形得出兩道邊長關係, 再透過切割線定理的結論

$$\overline{PS}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} \tag{10}$$

證明 (9) 式成立, 如此便解決了該問題, 過程簡單且易懂。

想順帶一提的是, 關於切割線定理的結論 (10) 式, 一般較常見的證明方法是透過圖 3 中 $\triangle PSA \sim \triangle PBS$ 的條件來證明, 在此筆者提供另外一種方法。請先回到圖 3, 因 $\triangle POS$ 爲

直角三角形, 完成 (7) 式之前各步驟的推導後, 由 (7) 式可知

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PO}^2-r^2=\overline{PO}^2-\overline{SO}^2=\overline{PS}^2.$$

這樣就證出了 (10) 式。

探討完上面的幾何題後, 我們便可以回到圖 3, 準備進行對 (3) 式的證明。設圖 3 中有 $\overline{PA}=a$, $\overline{PB}=b$, 由 (4) 式可知

$$\overline{PC}=\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{\overline{PA}}+\frac{1}{\overline{PB}})}=\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}=\frac{2ab}{a+b}, \tag{11}$$

因此 $\overline{PC}$ 長爲 a,b 的調和平均數; 而利用 (6) 式與 (10)式, 可知 $\overline{PD}$, $\overline{PS}$ 之長分別爲 a,b 的算術平均數與幾何平均數, 如下:

$$\overline{PD}=\frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2}=\frac{a+b}{2}, \tag{12}$$

$$\overline{PS}=\sqrt{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}=\sqrt{ab}. \tag{13}$$

觀察圖 3 中 $\triangle POS$, $\triangle POD$, $\triangle PSE$, $\triangle PCE$ 四個直角三角形, 利用畢氏定理, 由 $\overline{OD}\le\overline{OS}$, $\overline{SE}\ge\overline{CE}$ 兩條件, 可知

$$\overline{PD}=\sqrt{\overline{PO}^2-\overline{OD}^2}\ge\sqrt{\overline{PO}^2-\overline{OS}^2}=\overline{PS}, \tag{14}$$

$$\overline{PS}=\sqrt{\overline{SE}^2+\overline{PE}^2}\ge\sqrt{\overline{CE}^2+\overline{PE}^2}=\overline{PC}. \tag{15}$$

注意 (14), (15) 兩式之等號皆成立於 A, B 與 S 重合時, 此時 C, D 亦與 S 重合。

接下來, 由 (14), (15) 兩式可知

$$\overline{PD}\ge\overline{PS}\ge\overline{PC}.$$

將 (11), (12), (13) 三式的結果代入上式, 即得

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ge\frac{2ab}{a+b},$$

不等式的兩個等號成立於 $a=b$ 時, 即 A, B 重合時。這樣我們就證明了 (3) 式。

讀者或許會想問, 圖 1 中的兩個圖, 對於任意兩正數 a,b, 都可以從無到有地把圖形逐步畫出來, 而 (3) 式所對應的圖 3, 該怎麼畫出來呢? 要先提醒讀者的是, 圖 1 的兩個圖, 畫出來都呈現 a,b 兩數不相等的樣子。

底下, 筆者所要介紹的圖 3 畫法也將如此, 畫出的兩線段 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ 之長看起來是不相等的兩數 a,b。畫法如下:

畫法: 請先想像圖 3 其實一開始是空白的。假設 $a\le b$, 我們可依下列步驟畫出圖 3:

(1) 作線段 $\overline{PB}=b$, 並在 $\overline{PB}$ 上取點 A 滿足 $\overline{PA}=a$;

(2) 取 $\overline{AB}$ 的中點 D, 則 $\overline{PD}=\dfrac{a+b}{2}$;

(3) 過 D 作 $\overline{AB}$ 之中垂線, 取中垂線上一點 O 為圓心, 作一過 A, B 兩點的圓;

(4) 過 P 作圓 O 的兩切線 $\overline{PS}$, $\overline{PT}$, 分別以 S,T 為切點, 則 $\overline{PS}=\sqrt{ab}$;

(5) 連接 $\overline{ST}$, 設 $\overline{ST}$ 交 $\overline{PB}$ 於 C, 則 $\overline{PC}=\dfrac{2ab}{a+b}$。

三、更簡單的一個證明

筆者回想自己的學習歷程, 印象中並非以圖 1 左方的圖來理解算幾不等式, 而是以下圖:

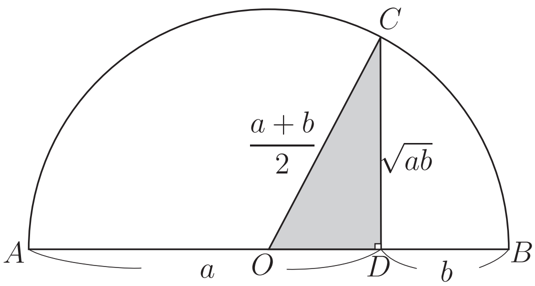

圖4

上圖中, C 落在以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓圓弧上, 且 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$ 於 D。當垂足 D 與圓心 O 重合時, 當然有 $\overline{CO}=\overline{CD}$; 當 D 與 O 不重合時, $\triangle COD$ 中有 $\angle CDO=90^\circ$, 為三內角之最大角, 利用大角對大邊性質可知 $\overline{CO}>\overline{CD}$。因此, 兩情形合起來看可得 $\overline{CO}\geq\overline{CD}$。

在上圖中 $\triangle COD$ 作高 $\overline{DE}$ 之後, 可得下圖:

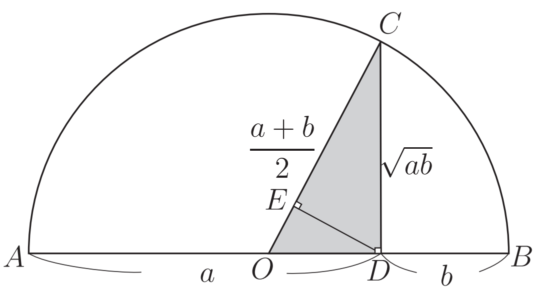

圖 5

因為 $\triangle COD\sim\triangle CDE$ (AA 相似), 可知 $\frac{\overline{CO}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$, 從而有

$$\overline{CE}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{CO}}=\frac{2ab}{a+b}.$$

因此 $\overline{CE}$ 長度為 a,b 的調和平均數。

而觀察圖 5 中的 $\triangle CDE$, 與上述觀察 $\triangle COD$ 的道理相同, 可知 $\overline{CD}\geq\overline{CE}$。因此可

寫下 $\overline{CO} \geq \overline{CD} \geq \overline{CE}$, 而得不等式

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b},$$

且不等式的兩個等號成立於 $a=b$ 時, 即 O, D 重合時。至此可知相較於圖 3, 圖 5 爲不等式 (3) 提供了更簡單的幾何證明。

四、從比例觀點看三個平均數的大小

筆者於高中時期參加某個數學營活動時, 拿到了一本由臺大楊維哲教授 (現已退休) 所寫的講義, 其封面上寫著「分析雜論」四個字, 楊教授也是該次營隊活動中的老師之一。在該本講義中, 筆者初次認識一種「透過線段比例」的觀點來看調和平均數的方法, 請參考下圖:

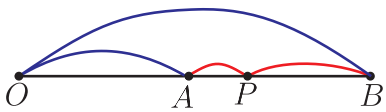

圖6

上圖中, O, A, B 三點共線, 且 A, B 在 O 點的同側, 其中設 $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$ 且 $b \geq a > 0$。已知 $\overline{AB}$ 上有一點 P, 當 $b > a$ 時, 滿足

$$\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{OA} : \overline{OB} = a : b. \tag{16}$$

假設 $\overline{OP}$ 長爲 s, 則 $a < s < b$, 且 $\overline{PA} = s-a$, $\overline{PB} = b-s$。由 (16) 式可知

$$(s-a) : (b-s) = a : b,$$

因此可求出 $\overline{OP} = s = \dfrac{2ab}{a+b}$。而當 $b=a$ 時, 同樣以 $s=\dfrac{2ab}{a+b}$ 來定義 $\overline{OP}$ 長, 此時 A, P, B 重合且 $s=a=b$。因此, 圖 6 中的 $\overline{OP}$ 長即爲 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 兩長度之調和平均數 (註 4)。而筆者上面所提到的「透過線段比例」, 其「比例」指的就是 (16) 式。

如果在圖 6 中標上 $\overline{AB}$ 的中點 M, 則如下圖:

圖7

其中 $\overline{OM}$ 長即爲 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 兩長度之算術平均數 $\dfrac{a+b}{2}$, 且 $\overline{MA} : \overline{MB} = 1:1$。那麼, 假設 Q 落在圖 7 中的 $\overline{OB}$ 上, 且 $\overline{OQ}$ 長爲 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 長度之幾何平均數 $\sqrt{ab}$, 則由 (3) 式可知 Q 將落在 $\overline{PM}$ 上, 如下圖:

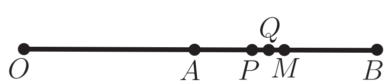

圖8

不過, 除了透過 (3) 式來證明上圖中 Q 落在 $\overline{PM}$ 上, 是否還有其他方法呢? 我們不妨看看底下的證明:

證明: (i) 當 $b=a$ 時, 有 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OM}=a$, 此時圖 8 中 A,P,Q,M,B 五點重合, 可將此情形視爲 Q 落在 (已退化爲一點的) $\overline{PM}$ 上;
(ii) 當 $b>a$ 時, 因 $\overline{OQ}$ 長爲 $\sqrt{ab}$ 且 $a<\sqrt{ab}<b$, 此時有

$$\overline{QA}:\overline{QB}=(\sqrt{ab}-a):(b-\sqrt{ab})=\sqrt{a}:\sqrt{b}. \tag{17}$$

對於任一滿足 $t>1$ 的正數 t, 因爲 $t-1>0$, 由 $t-1=(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)$ 可知

$$\sqrt{t}-1=\frac{t-1}{\sqrt{t}+1}>0.$$

因此有 $\sqrt{t}>1$, 不等號兩側同乘 $\sqrt{t}$ 後得 $t>\sqrt{t}$, 兩不等式合併後得 $1<\sqrt{t}<t$。

利用上述結果, 因爲 $\dfrac{b}{a}>1$, 可寫下 $1<\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<\dfrac{b}{a}$, 再由 (16), (17) 兩式可知

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}<\frac{\overline{QB}}{\overline{QA}}<\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}.$$

對上面不等式中的三個線段長比值同加 1 得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MA}}<\frac{\overline{AB}}{\overline{QA}}<\frac{\overline{AB}}{\overline{PA}}.$$

因此有 $\overline{MA}>\overline{QA}>\overline{PA}$, 此推論結果配合圖 7, 可知 Q 落在 $\overline{PM}$ 上, 如圖 8。將以上 (i), (ii) 兩部分的結果合起來看, 證明即完成。

將上面 (i), (ii) 的結果合併可知 $\overline{MA}\geq\overline{QA}\geq\overline{PA}$, 對其各項同加 $\overline{OA}$, 可得

$$\overline{OM}\geq\overline{OQ}\geq\overline{OP},$$

所以有 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\dfrac{2ab}{a+b}$。因此, 我們得到 (3) 式的一個另證。

本節最後, 請讀者不妨再次看看上面的 (16) 式, 它賦予調和平均數一種在幾何上的意義, 而非僅僅是前言中所提之「a,b之倒數求算術平均後再取倒數」這樣的算術意義。

五、與方均根有關的一個圖解證明

除了上述介紹的三種平均數外, 還有一種平均數稱爲 Quadratic mean, 中文譯爲「平方平均數」, 或者簡稱「方均根」(參考[3]), 後者是來自於 Root Mean Square 這個 Quadratic mean 的別名, 而 Root Mean Square 則是 the square root of the mean square 的簡稱(請參考 [4])。兩正數 a, b 的方均根, 定義為

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

在參考資料 [5] 中介紹的一道習題(請見 [5] 第 1.7 節末的習題 22), 要我們比較兩正數 a, b 之算術平均數 $\frac{a+b}{2}$ 與上述之方均根兩者間的大小關係, 這不難直接透過算式計算得出結果。不過, 筆者發現一個可以透過圖形來解釋的方法, 請參考下圖:

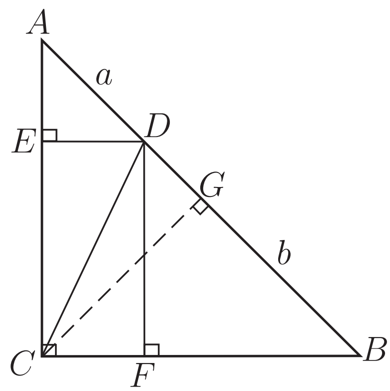

圖9

上圖中, $\triangle ABC$, $\triangle ADE$, $\triangle DBF$ 均為等腰直角三角形, 其中 $\overline{AD}=a$, $\overline{DB}=b$。注意在保持 D 點不動、A, D, B 共線且 A, B 落在 D 點異側的條件下, 將 A, B 視為動點, 可藉由變動 A, B 的位置來得出不同的正數 a, b 之值。

圖 9 中, 連接 $\overline{CD}$ 並作 $\triangle ABC$ 斜邊 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{CG}$。因為 $\triangle CGA \simeq \triangle CGB$, 可知 $\overline{AG}=\overline{BG}$, 故 G 為 $\overline{AB}$ 中點, 因此

$$\overline{AG}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\overline{AD}+\overline{DB}}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

而 $\triangle ACG$ 亦為等腰直角三角形, 因此可知

$$\overline{DE}=\frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad \overline{DF}=\frac{b}{\sqrt{2}}, \qquad \overline{CG}=\overline{AG}=\frac{a+b}{2}.$$

注意 $CEDF$ 為矩形, 可求出 $\overline{CD}$ 長為

$$\overline{CD}=\sqrt{\overline{CF}^2+\overline{DF}^2}=\sqrt{\overline{DE}^2+\overline{DF}^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

因直角 $\triangle CDG$ 的斜邊 $\overline{CD}$ 為最大邊, 可知 $\overline{CD}\ge\overline{CG}$, 也就是有

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\frac{a+b}{2}.$$

上式等號成立於 $\triangle CDG$ 退化爲線段之時, 此時 D, G 兩點重合, 因此 $a=b$。

如此一來, 圖 9 就給出了「兩正數之平方平均數不小於其算術平均數」的一個圖解證明, 此結果與第三節最後所寫下的不等式 (或 (3) 式) 合起來看, 就有

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}.$$

以記號來寫, 上式可簡記爲 $QM \geq AM \geq GM \geq HM$。

六、結語

初次看到問題 6401, 覺得應該不難證明, 沒想到花了一些時間仍不得其解。忍不住打開 [2] 的解答, 只看到了對圖 2 所做的輔助線後, 便馬上關閉檔案, 不想知道其證明過程, 因爲想靠自己寫出解法。在某次旅行途中, 拿出計算紙, 學著做同樣的輔助線, 才寫下了最初的證明。

後來因爲繼續研究圖 3, 才發現第二節中對不等式 (3) 的幾何證明, 也算是一個意外的收穫。這也讓筆者想到 [1] 這篇作品, 並以其作爲本文的開場白。也因爲 [1] 文中關於圖 1 的介紹, 才讓筆者重新研究圖 4, 從而在圖 5 中得出一個更簡單的幾何證明。而第四節的內容, 則是想介紹對調和平均數的另一種看法, 以及從中所延伸出來之對 (3) 式的另證。

以上就是筆者的一點小小心得, 希望讀者看完能有所收穫。最後, 先要感謝建中通訊解題的主辦單位, 因爲若沒有問題 6401, 相信也不會有本文的誕生。此外, 謝謝台大數學系退休教授王藹農老師的指導, 也要特別感謝 [1] 的作者, 其作品 [1] 多少啟發了筆者的靈感。

註1: 其實, 算幾調不等式本質上就是算幾不等式。我們知道底下的 n 元算幾不等式成立:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \tag{18}$$

將上式中的每一個正數 a_k 換成正數 $\dfrac{1}{a_k}$, 因此可知

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}.$$

若對上式兩端取倒數, 左端即得 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的調和平均數。兩端取倒數後, 結果如下:

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \tag{19}$$

將 (18), (19) 兩式合起來看, 就得到 n 元算幾調不等式。

註2: 我們知道, 圓的切線是指僅與圓交於一點的直線。圖 3 中, 圓心 O 與切點 S 的連線 $\overline{OS}$ 爲何會垂直圓 O 的切線 $\overline{PS}$ 呢? 在此提供一個簡單的證明如下:

證明: 使用反證法, 假設半徑 $\overline{OS}$ 與直線 PS 不垂直 $(*)$, 則過 O 作直線 PS 的垂線時, 垂足 Q 將不會是 S 點。假設直線 PS 上, Q 與 P 兩點位在切點 S 的異側, 如下圖:

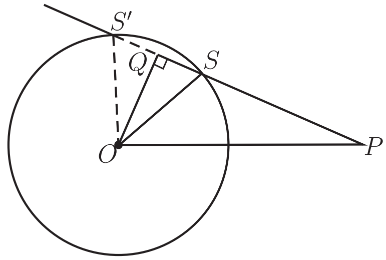

圖 10

因爲 $\triangle SOQ$ 爲直角三角形, 斜邊 $\overline{SO}$ 爲最大邊, 可知 $\overline{SO} > \overline{OQ}$。在上圖中, 於直線 PS 上取 S' 滿足 $\overline{S'Q} = \overline{SQ}$, 且 S', S 位於 Q 的不同側, 則有 $\triangle S'QO \simeq \triangle SQO$ (SAS 性質), 知 $\overline{S'O} = \overline{SO}$, 因此 S' 也落在圓 O 上。此時, 直線 PS 與圓交於 S', S 兩點, 這與 $\overline{PS}$ 爲圓切線的前提矛盾。而另一種情形, 即 Q 與 P 兩點位在切點 S 的同側時, 同理可得出矛盾 (其參考圖形, 可將圖 10 中 S', S 的位置互換)。至此, 可知一開始的假設 $(*)$ 不成立, 因此 $\overline{OS}$ 與直線 PS 必定垂直, 證畢。

註 3: 此處筆者想介紹關於 (4) 式的一個應用。在建中通訊解題 142 期裡面有一道問題如下:

問題 14203: 設有一圓心爲 O 的圓, 其中 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ 是圓的兩條切線, 且 $\overline{PC}$ 爲圓的割線並交圓於一點 E, 又 D 是 $\overline{PC}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點, 如下方的示意圖。若 $\overline{PE} = 4$, $\overline{CD} = 2$, 求 $\overline{AD} \times \overline{DB}$ 的值。

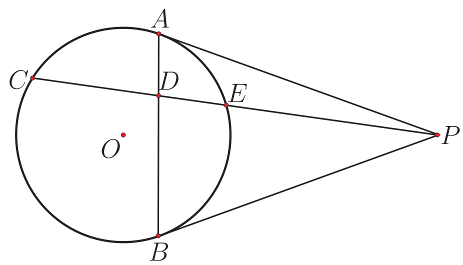

圖 11

此問題的出處與公告解答, 請參考 [2]。

在 [2] 中, 解題老師介紹完問題 14203 的解答後, 把此題評爲一個「幾何難題」。不過, 如果使用問題 6401 的結論 (即 (4) 式), 可得另解如下:

解答: 在證明 (4) 式之後, 可知圖 11 中有

$$\frac{1}{\overline{PD}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\overline{PE}} + \frac{1}{\overline{PC}}\Big).$$

仿照原解法設 $\overline{DE}=x$, 代入各線段長, 可將上式化為

$$\frac{1}{4+x}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{6+x}\Big),$$

接著即可解得 $x=-3+\sqrt{17}$, 最後再仿照 [2] 中的解法求 $\overline{AD}\times\overline{DB}$ 之值即完成解題。

讀者應當注意, 使用上面的手法解問題 14203 並不會特別簡單, 因為還需先證明 (4) 式。

註4: 印象中, 在原本楊教授講義內的說法, 指出調和平均數是一種「相對的平均」。怎麼說呢? 意思是, 如果按照圖 7 來看, 圖中點出 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 長度之算術平均數 ($\overline{OM}$ 長) 的 M 點, 它與 A, B 兩點的距離 $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ 之比為 1:1, 是一種「絕對的平均」; 而點出調和平均數 ($\overline{OP}$ 長) 的 P 點, 它與 A, B 兩點的距離 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ 之比為 $\overline{OA}:\overline{OB}$ (由 (16) 式可知), 則是一種「相對的平均」。

參考資料

1. 周伯欣。二元算幾不等式的一個無字證明—附記一段學思歷程。數學傳播季刊, 40(2), 35-38, 2016 `http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d402/40204.pdf`.
2. 建中通訊解題活動網頁, 建中數學科網站。
3. 平方平均數, 維基百科條目。
4. Root mean square, Wikipedia.
5. Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 2007.

—本文作者投稿時任職群緯環保—