

# 莫耳圓與二階張量關係之研究 及其 Mathematica 動畫模擬 (下)

陳正宗 · 李家瑋 · 涂雅瀨

### 5.3. 不變量的重要性

為何張量中的不變量如此重要？本文在此小節加以解釋。由張量定義談起，若該物理量為張量，則在不同觀察座標系統描述下，會出現不同的分量。但就實際的物理現象觀察，如斷面強軸與弱軸位置，及其所對應的最大與最小慣性矩  $I_{\max}(I_1)$ ,  $I_{\min}(I_2)$ ；或是最大與最小主應力  $\sigma_{\max}(\sigma_1)$ ,  $\sigma_{\min}(\sigma_2)$ 、最大與最小主應變  $\varepsilon_{\max}(\varepsilon_1)$ ,  $\varepsilon_{\min}(\varepsilon_2)$  之大小，無論由任何的觀察座標系統來描述，其最大與最小值該是相同的（不變的），所以以上這些量都是不變量。亦即不隨觀察座標轉換而改變。張量既然存在不變量的特性且又可由矩陣形式表示，因此，在矩陣的表現式上是否也潛藏著不變量的特殊性質。本文在 5.2 節有所證明，可以得知矩陣的固有值即是物理量的不變量，兩個固有值對應前面張量定義下的最大與最小值  $(\sigma_1, \sigma_2)$  或  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 。不變量的一個應用即是於學習材料力學時，判斷彈性體受力破壞情況。當彈性體受力後，每一質點均會有一個應力狀態或是具一應力張量，亦即存在一應力狀態矩陣。在描述此材料的破壞時，需有一客觀的標準衡量稱為失效準則，例如：脆性破壞，係用最大主應力準則  $\sigma_1 > \sigma_t$ ，其中  $\sigma_t$  為材料抗拉或抗壓強度，而韌性材料則有 Tresca 與 Von-Mises 兩個判斷準則，以下就韌性材料判斷準則分述如表五

表五：韌性材料破壞準則

	Tresca	Von-Mises	Mohr-Coulomb
示意圖			
破壞準則公式	$ \sigma_1 - \sigma_2  > \sigma_y$	$(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) = \sigma_y^2$	$\tau = c + \sigma \tan \phi$

表五即是用來探討材料受力後的破壞情況。其中  $\sigma_y(Y)$  即為降伏應力。當彈性體受力時的主應力，位於屈服邊界範圍內，代表物體仍處於彈性階段；恰位於屈服邊界上，代表材料已達屈服點，即是處於塑性階段。從上述可以看出，材料屈服與否均以不變量來描述與判斷才不失客觀規矩 (objectivity rule)。而莫耳圓中的圓心與半徑兩個不變量，決定彈性體受力後的應力狀態在不同觀察座標下，均在同一莫耳圓圓周上。而莫耳圓與  $x$  軸交點亦不變動，即為主應力  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  或主慣性矩  $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$ ，上述之不變量均透露出重要的力學訊息。 $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$  分別表示斷面的強軸與弱軸所能提供的最大、最小慣性矩，而  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  則分別是最大最小主應力，依這兩個數值配合破壞準則的判斷，就能辨別出彈性體受力後是否會破壞或屈服。邊坡崩塌一直是土木工程中常見的問題。土壤所能提供的剪力強度即是重要指標，著名的 Mohr-Coulomb 失效準則，即是以應力狀態對應的圖來判斷失效與否，如表五所示。若莫耳圓在  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  之下，即為安全。當莫耳圓與斜線  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  相切即達失效準則，邊坡將會滑動。有關如何利用不變量來觀察描述失效準則可詳見 5.3 節。

## 6. 算例

### 6.1. 算例一 (慣性矩)

如表六，一個寬為 4 公尺，高為 8 公尺的矩形。將以三種張量表示法，計算新觀察座標系統下的慣性矩分量，並說明固有值問題。以下將條列公式比較其相異處，並輔以莫耳圓圖表，表現觀察座標旋轉後，其新舊點位於莫耳圓圓周上的轉動關係。

#### 6.1.1. 矩陣表示法

依 (58) 式可得。

#### 6.1.2. 分量表示法

依據 (29) 式  $\bar{I}_{pq} = l_{pi}l_{qj}I_{ij}$ ，其中  $Q = (l_{ij}) = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}$ 。

當  $p = 1, q = 1$ ，可得  $\bar{I}_{11}$

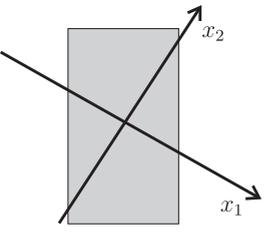
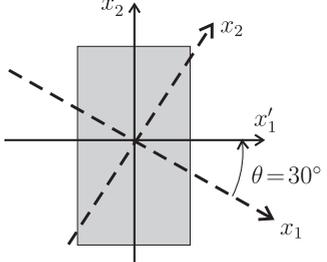
$$\bar{I}_{11} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \frac{I_{11} - I_{22}}{2} \cos 60^\circ + I_{21} \sin 60^\circ = \frac{512}{3} \quad (72)$$

將各分量分別計算可得

$$\bar{I}_{22} = \frac{128}{3} \quad (73)$$

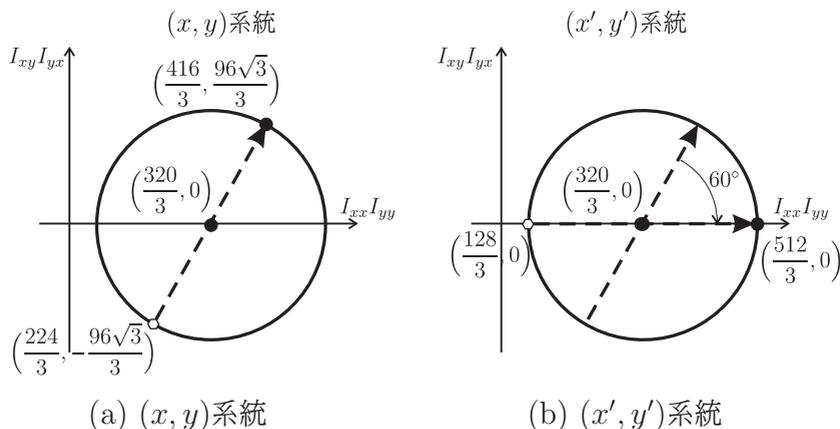
$$\bar{I}_{12} = \bar{I}_{21} = 0 \quad (74)$$

表六：矩形斷面例題說明

狀態	原始觀察座標 $(x_1, x_2) = (x, y)$	觀察座標立逆時針旋轉 $30^\circ$ 後 $(x'_1, x'_2) = (\bar{x}, \bar{y})$
結構截面示意圖	 <p style="text-align: center;">A</p>	 <p style="text-align: center;">B</p>
慣性矩分量	$I_{xx} = \frac{416}{3}$ $I_{yy} = \frac{224}{3}$ $I_{xy} = I_{yx} = \frac{96\sqrt{3}}{3}$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{12} \times 4 \times 8^3 = \frac{512}{3}$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{12} \times 8 \times 4^3 = \frac{128}{3}$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{\bar{y}\bar{x}} = 0$
慣性矩矩陣	$\begin{bmatrix} \frac{416}{3} & \frac{96\sqrt{3}}{3} \\ \frac{96\sqrt{3}}{3} & \frac{224}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{512}{3} & 0 \\ 0 & \frac{128}{3} \end{bmatrix}$
固有值與固有向量	$[I][\nu_1] = \frac{512}{3}[\nu_1]$ $[I][\nu_2] = \frac{128}{3}[\nu_2]$ $[I][\nu_1 \ \nu_2] = [\nu_1 \ \nu_2] \begin{bmatrix} \frac{512}{3} & 0 \\ 0 & \frac{128}{3} \end{bmatrix}$ $[I] = [\nu_1 \ \nu_2] \begin{bmatrix} \frac{512}{3} & 0 \\ 0 & \frac{128}{3} \end{bmatrix} [\nu_1 \ \nu_2]^T$ <p>其中, <math>\nu_1 = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{bmatrix}</math>; <math>\nu_2 = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ \\ \sin 120^\circ \end{bmatrix}</math></p>	

以下將利用第 4 節說明的三種表示法，計算旋轉觀察座標系統後的慣性矩分量。

### 6.1.3. 莫耳圓表示法



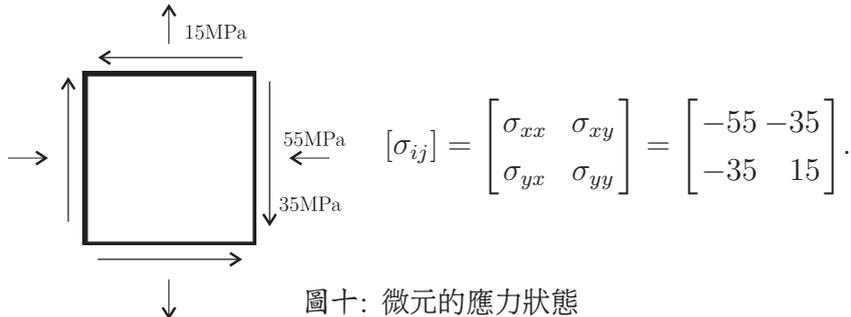
圖九：莫耳圓表示說明

● 為  $(I_{xx}, I_{xy})$ ; ○ 為  $(I_{yy}, -I_{yx})$ 。由圖九可看出，將截面上的觀察座標系統逆時針旋轉 30 度時，莫耳圓上的座標點在圓周上順時針移動 60 度，但兩者的莫耳圓是相同一個。建構莫耳圓時，可以在主軸上建構觀察座標系統是最快速（方便），所以當碰到求解慣性矩的問題時，可先將觀察座標設於主軸上，最容易算出其慣性矩分量，即可建立莫耳圓。下一步，只要有新座標軸與舊座標軸間反轉  $\theta$  的角度關係，利用高中所學簡易的平面幾何與三角函數運算，進行順轉  $2\theta$  即可由新點的座標依定義求得慣性矩。

4.1、4.2 與 4.3 小節都是利用慣性矩做說明，以分量、矩陣與莫耳圓型式說明張量分量的旋轉概念，及符號規則。為了使學生能更好的應用及方便查詢，作者將上述三種方法利用表格將其統整，藉由表格對照，能更清楚的讓讀者知道三種方法的優、缺點，以及其相似與相異之處，如表七所示。

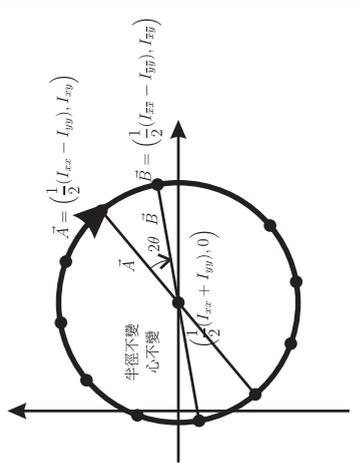
### 6.2. 算例二 (應力)

依據李 [14] 利用莫耳圓與固有值，可以求解材力的主應力。若有一彈性體受力後，取一微元其應力狀態如圖十所示。欲求其主應力、最大剪應力以及其主軸方向，我們可以利用莫耳圓圖解法，亦可使用固有值定義計算。



圖十：微元的應力狀態

表七：慣性矩三種表示法

矩陣	分量	莫耳圓
$\begin{bmatrix} \bar{I}_{\bar{x}\bar{x}} & I_{\bar{x}\bar{y}} \\ I_{\bar{y}\bar{x}} & \bar{I}_{\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} [Q]^T$ $= \begin{bmatrix} \frac{I_{xx} + I_{yy} + I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\theta + I_{yx} \sin 2\theta & \frac{-I_{xx} + I_{yy}}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \\ \frac{-I_{xx} + I_{yy}}{2} \sin 2\theta + I_{yx} \cos 2\theta & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \end{bmatrix}$ $I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\theta + I_{yx} \sin 2\theta$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{\bar{y}\bar{x}} = \frac{-I_{xx} + I_{yy}}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$	$\bar{I}_{pq} = l_{pi} l_{qj} I_{ij}$ $\bar{I}_{pq} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 l_{pi} l_{qj} I_{ij}$ $p = 1, q = 1$ $\bar{I}_{11} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 l_{1i} l_{1j} I_{ij}$ $= \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \frac{I_{11} - I_{22}}{2} \cos 2\theta + I_{21} \sin 2\theta$ $p = 1, q = 2$ $\bar{I}_{12} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 l_{1i} l_{2j} I_{ij}$ $= \frac{-I_{11} + I_{22}}{2} \sin 2\theta + I_{12} \cos 2\theta$ $p = 2, q = 1$ $\bar{I}_{21} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 l_{2i} l_{1j} I_{ij}$ $= \frac{-I_{11} + I_{22}}{2} \sin 2\theta + I_{21} \cos 2\theta$ $p = 2, q = 2$ $\bar{I}_{22} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 l_{2i} l_{2j} I_{ij}$ $= \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \frac{I_{11} - I_{22}}{2} \cos 2\theta - I_{12} \sin 2\theta$	 $1. \frac{1}{2}(I_{\bar{x}\bar{x}} + I_{\bar{y}\bar{y}}) = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy})$ $2. R^2 = \left[ I_{xx} - \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) \right]^2 + I_{xy}^2$ $= \left[ \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \right]^2 + I_{xy}^2$ $= \left[ \frac{1}{2}(I_{\bar{x}\bar{x}} - I_{\bar{y}\bar{y}}) \right]^2 + I_{\bar{x}\bar{y}}^2$

## 6.2.1. 莫耳圓圖解法

依照 4.3 節 (32) 式定義, 以應力張量取代慣性矩可得莫耳圓, 對應應力狀態的兩個位置向量分述如下:

$$A = (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}) = (-55, -35), \quad (75)$$

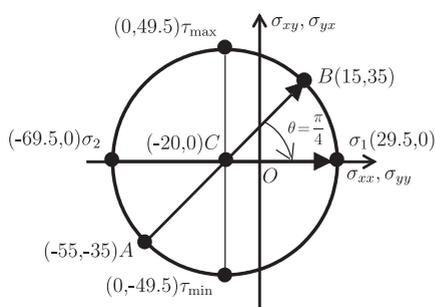
$$B = (\sigma_{yy}, -\sigma_{yx}) = (15, 35). \quad (76)$$

根據 (33) 式, 可得其圓心  $C$  座標為

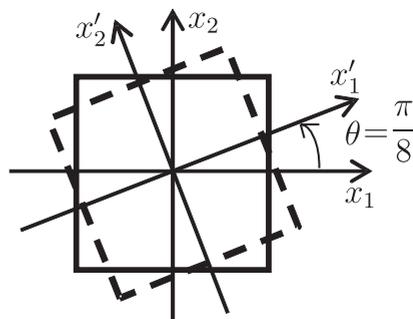
$$C = \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, 0 \right) = (-20, 0), \quad (77)$$

半徑  $R$  為

$$R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2} = 49.5. \quad (78)$$



圖十一: 應力張量莫耳圓


 圖十二: 應力主軸方向  $(x'_1, x'_2)$ 

根據 5.2 節的說明, 可以找出莫耳圓與  $x$  軸的交點為最大與最小主應力  $\sigma_1, \sigma_2$  ( $\sigma_1 > \sigma_2$ )

$$\sigma_1 = 29.5\text{MPa}, \quad (79)$$

$$\sigma_2 = -69.5\text{MPa}. \quad (80)$$

最大與最小剪應力

$$\tau_{\max} = 49.5\text{MPa}, \quad (81)$$

$$\tau_{\min} = -49.5\text{MPa}. \quad (82)$$

由莫耳圓可知(如圖十一), 應力分量兩座標點位置向量  $\overrightarrow{AB}$ , 要轉至主軸位置須於圓周上順時針轉動  $\frac{\pi}{4}$ 。故於實際觀察中, 觀察座標系統為逆時針轉動  $\frac{\pi}{8}$  會至主軸位置, 如圖十二所示。

## 6.2.2. 固有值解法

依據固有值公式可用以求其主應力, 將 (54) 式中的慣性矩陣以應力矩陣代換可得

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (83)$$

可將其簡化為

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (84)$$

並用此來計算其主應力, 因向量  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  的方向代表其主應力的角度方向, 不能有無聊解 (零解),

故  $\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda \end{bmatrix}$  的行列式值必須為零, 才能使  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  有非無聊解 (非零解), 如下所示:

$$\begin{bmatrix} -55 - \lambda & -35 \\ -35 & 15 - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (85)$$

可得一元二次方程式

$$\lambda^2 - 40\lambda - 2050 = 0, \quad (86)$$

解可得

$$\lambda_1 = 29.5, \quad (87)$$

$$\lambda_2 = -69.5. \quad (88)$$

將  $\lambda_1$  代入固有方程式 (84),

$$\begin{bmatrix} -55 - 29.5 & -35 \\ -35 & 15 - 29.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (89)$$

可得固有向量如下:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.414 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (90)$$

其中  $(a, b)^T$  代表軸的位置向量; 可以此求其角度

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{0.414} \right) = \frac{\pi}{8}. \quad (91)$$

由此可知其主軸位於原座標系統  $\frac{\pi}{8}$  與  $\frac{5\pi}{8}$  的位置。配合方向要求, 可看成單位向量

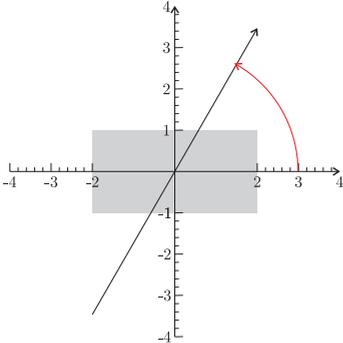
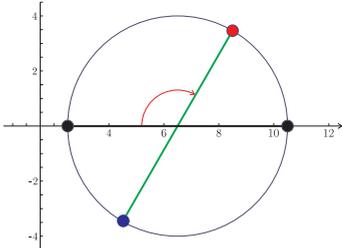
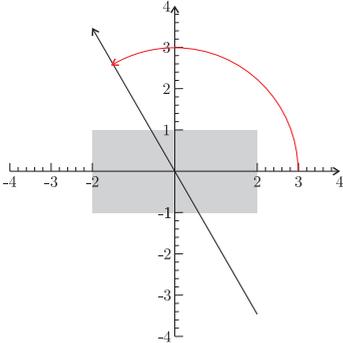
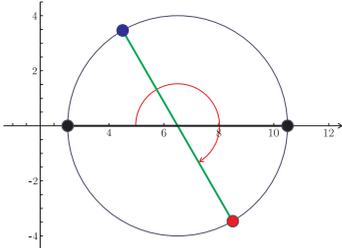
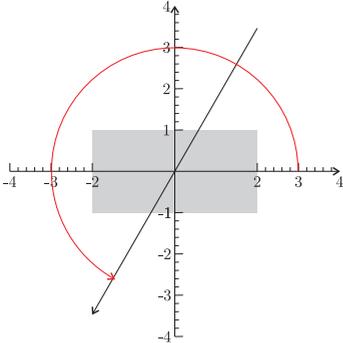
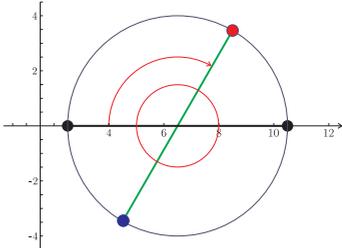
$$\nu_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{8} \\ \sin \frac{\pi}{8} \end{bmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \\ \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{8} \\ \sin \frac{5\pi}{8} \end{bmatrix}. \quad (92)$$

總結而言，兩個固有值表示最大與最小主應力，其兩個固有向量為對應的主軸方向。

### 7. 數值結果與動畫呈現

根據 Carbonell 等[2]將電腦軟體應用於工數教學上，因此我們利用洪 [15] Mathematica 符號運算軟體Tabel 指令製作動畫。希望能表現出當物體觀察座標系統旋轉時，將其物理量分量繪於為笛卡兒式座標上的旋轉方向。呈現三個面向：觀察座標系統轉動、矩陣元素變化與莫耳圓直徑軸變動，呈現兩個不同觀察座標系統的結果於表八所示。其 Mathematica 程式碼，可參閱作者海大 NTOU/MSV 網站。網址如下：<http://msvlab.hre.ntou.edu.tw/index1.htm>

表八：Mathematica 繪圖

觀察座標軸旋轉示意圖	慣性矩矩陣	莫耳圓
	$\theta = 60^\circ$ $\begin{bmatrix} 8.66667 & 3.4641 \\ 3.4641 & 4.66667 \end{bmatrix}$	
	$\theta = 120^\circ$ $\begin{bmatrix} 8.66667 & -3.4641 \\ -3.4641 & 4.66667 \end{bmatrix}$	
	$\theta = 240^\circ$ $\begin{bmatrix} 8.66667 & 3.4641 \\ 3.4641 & 4.66667 \end{bmatrix}$	

## 8. 結論

本文第一作者係台灣工業與應用數學會 (TWSIAM) 副理事長, 從事工程數學教育二十餘年, 發現工程師不甚了解張量, 數學家不熟悉莫耳 (Mohr) 圓, 而少了跨領域的交流, 本文即在此前提動機下寫成。希望透過本文, 能讓對張量卻步的工程科系學生有釐清觀念的機會, 並希望工科的學生能將力學與數學作結合, 也對數學系的同學介紹莫耳圓的圖解法。

## 致謝

感謝教育部教學卓越計畫支助海大教學中心提供本文第三作者大專生暑期實務計畫, 方有此成果與讀者分享。

## 參考文獻

1. R. Aris, *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover, 1983.
2. V. Carbonell, C. Romero, E. Martínez<sup>1</sup> and M. Flórez<sup>1</sup>, Interactive simulations as teaching tools for engineering mechanics courses, *European Journal of Physics*, Vol.34, 991-1004, 2013.
3. P. C. Chou and N. J. Pagano, *Elasticity*, D. Van Nostrand Company, 1967.
4. Y. C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, 1965.
5. Y. C. Fung, *A First Course in Continuum Mechanics*, Prentice-Hall, 1977.
6. R. C. Hibbeler, *Engineering mechanics: Statics*, 普林斯頓國際有限公司, 2010.
7. R. C. Hibbeler, *Engineering mechanics: dynamics*, 普林斯頓國際有限公司, 2010.
8. W. P. Lee, C. H. Chiu, C. L. Hwan and J. Ma, 2007, Digital simulation of the transformation of plane stress, *Computer Applications in Engineering Education*, Vol.17, No.1, 25-33, 2009.
9. B. R. Munson, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 高立圖書, 2010.
10. I. S. Sokolinkoff, *Tensor Analysis*, John Wiley, 1964.
11. 吉田總仁著 (劉松柏譯)。彈、塑性力學基礎。五南圖書出版公司, 2008。
12. 杜慶華、余壽文、姚振漢。彈性理論。科學出版社, 1986。
13. 吳文隆。大地工程學。九樺出版社, 1990。
14. 李鴻昌。材料力學。全華科技圖書股份有限公司, 2004。
15. 洪維恩。Mathematica 數學運算大師。旗標出版股份有限公司, 2008。
16. 陳正宗。工程數學 (一)。海洋大學河工系, 2013。
17. 謝元裕。初等結構分析。科技圖書股份有限公司, 2012。

—本文作者陳正宗任教國立臺灣海洋大學河海工程學系, 李家璋任教淡江大學土木工程學系, 涂雅濤投稿時就讀國立臺灣海洋大學河海工程學系—