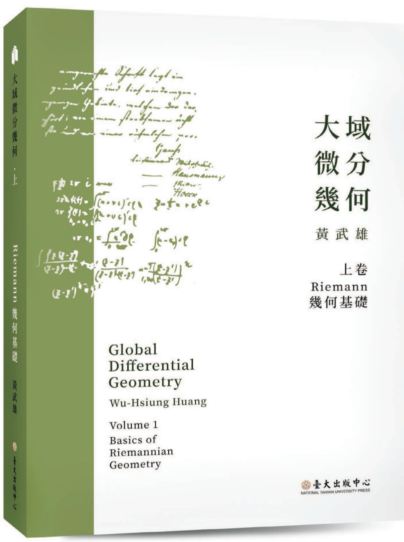
大域微分幾何引言
—細談整部書的脈絡

黃武雄[1]

像這樣多達八百多頁, 分上、中、下三卷的專業數學書, 很難想像有人會埋頭讀完整部書。寫這篇引言, 是爲了鋪陳全書的脈絡, 讓讀者看到一連串自然而有趣的提問, 像一幕幕風景一樣, 沿路開展。是這些自然的風景, 帶進來嚴謹的數學理論。讀者閱讀這部書時, 不妨隨時來回翻閱這篇引言。若心中存著這條脈絡, 讀起書來或許會更有動力, 也不容易在這部大書的理論中迷失方向。

1. 較早的脈絡



— 獻給 摯愛的人們

我們都漂泊於
世界之河
理性的殘骸　散落水面
自由與創造　在河灘擱淺

歷史暗啞失聲
嗩吶時斷時續　不搭調的吹著

遺忘的行列　寥寥落落
從淒迷的星光下走來
穿過　寂寞的市集

1.1. 白話

寫這部書時, 我力求脈絡清晰, 直接切入問題, 減少「不那麼必要」的形式語言。人與自己的經驗連結, 是引入抽象概念的前提。雖然這部書是專業研究的書籍, 我仍然盡量把它寫得白話。

[1]編按：黃武雄教授的著作《大域微分幾何》本年二月由台大出版中心發行, 本刊獲黃教授及台大出版中心授權刊登其前言。

什麼是白話? 白話就是鋪陳要自然：以自然的提問作爲背景, 一層層引入數學概念, 使數學概念與人的感覺聯繫起來, 讓人發生興趣, 一步步深入數學未知的、複雜的抽象世界。

以「上卷」的脈絡, 作爲例子, 來說明我力求白話的意義。微分幾何要處理的主要對象是「彎曲的空間」。空間如何彎曲? 1860 年代, Riemann 的重要貢獻, 就是引入 Riemann 曲率張量, 來描述空間的彎曲。因此後人把彎曲的空間, 稱爲 Riemann 空間, 或進一步叫 Riemann 流形。

一般幾何書籍都直接定義 Riemann 曲率張量 [Ch. 3 (26) 式; Ch. 6 (19) 式]。但我們寧可回溯 Riemann 最早的思路：從詢問

「什麼時候空間是平直 ?」

而發現 :「某個張量是否等於 0 ?」爲空間是否平直的關鍵。其中某個張量, 就是後來的所謂 Riemann 曲率張量, 以下簡稱 Riemann 張量。

「什麼時候空間是平直 ?」必須借助坐標來描述。換句話說, Riemann 空間的坐標, 什麼時候可以換成平直的新坐標? 這牽涉到「新坐標該滿足的微分方程組, 可否積分 ?」的問題。因此, 我們必須先討論可積分條件。爲了處理這樣的問題, 我們證明了更普遍的 Frobenius 可積分定理—有時普遍反而變得自然。見 Ch. 2 §2。

根據 Frobenius 可積分定理, 便不難找到用來描述曲率的 Riemann 張量。一旦有了 Riemann 曲率張量, 測地線的二階變分 [Ch. 7 (21) 式, 有時稱爲第二變分式], 就容易看出意義, 因爲計算出來的那一大堆式子, 整併起來, 原來就是 Riemann 曲率張量。

爲了考慮二階變分等於 0 的情況 (這相當於在初等微積分中找 inflection point：亦即找 x, 使 $f''(x)=0$), 所謂的 Jacobi 場出現了。

如果測地線上, 首度出現非零的 Jacobi 場 [Ch. 10 (2) 式], 我們說兩端點互爲共軛 (conjugate)。等到熟悉測地線與 Jacobi 場的遠方行爲 [Ch. 9, 10, 11] 之後, 例如知道 :「兩共軛點之間的測地線, 若往外延長一 點, 便不再穩定 (stable), 當然也就不是最短路徑」, 我們便能夠利用測地線與 Jacobi 場, 去了解 Riemann 空間 (或稱 Riemann 流形) 的整體樣貌, 切入大域微分幾何的內核。譬如, 我們可以控制正曲率流形的直徑 [Bonnet-Myer 定理, Ch. 12], 也可以掌握負曲率空間的形狀 [Hadamard 定理, Ch. 12]。

所有的概念, 像 Riemann 張量、Frobenius 可積分條件、Jacobi 場、共軛點、cut point、$\cdots$ 都不是空穴來風, 而是爲了瞭解彎曲空間的形狀, 沿著一層層問題的思路, 而發展出來的重要概念。這一切都很自然, 而且整條脈絡清晰易明, 一氣呵成。如此「上卷」忽忽結束。這就是白話的意思。

當然, 發展這條脈絡的路邊, 有很多花草, 像共變微分、平行性、Riemann 尺度、指數映照、凸鄰域、$\cdots$, 都必須一一引介。這整條脈絡, 加上周邊的花草, 就是「上卷」的主要內容。

1.2. 零四講稿

這部書 (以下有時稱本書) 有：

上卷　前篇 A､B､C 三章
　　　篇一到篇三, 含 Ch. 1~Ch. 12
中卷　篇四到篇六, 含 Ch. 13~Ch. 21
下卷　篇七到篇九, 含 Ch. 22~Ch. 30
衍篇　三文

它最早的形式是 1998~2004 年春, 我多次在台大數學研究所, 開幾何課的講稿 — 以下稱爲「零四講稿」。

零四講稿的內容是：現今前篇的章 C、上卷三篇、及中卷到篇五。前篇的章 C 簡述可微流形。有了可微流形, 加上 Riemann 尺度 (metric), 才成爲 Riemann 流形。

可微流形最根本的出發點是維數 (dimension)。從日常的生活經驗, 一維、二維、三維、$\cdots$ 等維數的概念, 似乎明白易辨。但 1890 年 Peano 曲線的出現, 使數學家對維數這樣司空見慣的概念, 開始感到不安。在前篇的章 C, 開始定義可微流形之前, 我們也證明了維數的拓樸不變性。

很多數學者都相信, 維數在拓樸變換之下不變, 但一生從來沒讀過或做過證明。這部書主張人進入幾何專業之前, 總要讀過一遍維數拓樸不變性的證明 (當然, 能自己證明出來更好)。這是流形概念的基礎, 它的證明是 nontrivial。對數學專業者來說, nontrivial 是數學品味的判準之一。

一旦確認維數的拓樸不變性, 並引入坐標鄰域疊合延拓的概念, 可微流形的簡介也就結束。我們跳過可微流形最有趣也最 nontrivial 的內容：Poincaré-de Rham-Hodge 的理論, 這是令人遺憾的事。但 de Rham 的理論龐大而深刻, 篇幅相當於一本書。我們不得不略過, 爲了早點進入本書的主題：「彎曲的空間」。就這樣, 本書談過前篇的章 C 之後, 我們依剛剛 1.1 所說, 一路討論完上卷。

零四講稿的後面兩篇 [即中卷篇四、篇五], 在 2004 春的課堂中, 並沒來得及討論, 因爲講過前篇章 C 及上卷到 Ch.12、一個學期已匆匆過去。

1.3. 大域與局部

大域微分幾何, 經常在考慮局部與大域之間的辯證問題。曲率是由局部幾何 (而且是 infinitesimally local) 決定的, 那麼局部的曲率如何影響空間大域的形狀? 前述 1.1 提到的 Bonnet-Myer 與 Hadamard 定理, 便是這樣的兩個例子。

關於這層辯證關係, 古典的 Gauss-Bonnet 定理, 是最早出現的重要成就：「在封閉的曲面上, 高斯曲率的總積分決定曲面的拓樸!」[前篇章 A §8]。

Gauss-Bonnet 定理的證明, 主要的觸媒是 Hopf-Poincaré 的標數定理。後者把整體拓樸, 歸結到向量場在一個奇異點附近的標數 (index), 這使得大域與局部的幾何聯繫起來。Hopf-Poincaré 的標數定理意義深刻, 卻不難理解, 我們提早在前篇的章 A, 便加以詳述, 雖然那裡所考慮的, 還只是二維曲面。這個利用標數的精神, 可以延伸到後來高維的情況, 完成高維 Gauss-Bonnet 定理的證明 [中卷篇六, Ch. 19], 揭開最早局部與大域之間的辯證關係。

其實這層辯證關係 (亦即聯繫曲率與拓樸), 可以說是大域微分幾何的主要課題。Gauss-Bonnet 之後, 我們看到 Synge-Frankel 類型的大域定理。在上卷中, 我們注意到一個有趣又重要的事實:「曲率越大, 測地線也越不穩定。」[Ch. 7 §3]。這個事實可以從測地線的二階變分得到。利用它, 我們容易得到 Synge 與 Frankel 等幾個定理的證明 [Ch. 7]。

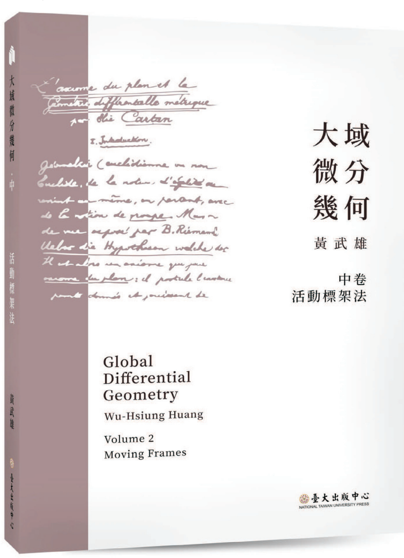
Synge 定理說的是:封閉的 Riemann 流形, 若爲偶數維、可定向而且正曲率, 則必爲單連通。在這裡,「正曲率」如何影響流形的整體樣貌? 這又是局部與大域辯證關係的另一個好例子。我們注意到透過測地線的二階變分, 局部性的曲率起了作用, 影響到測地線是否穩定的大域行爲, 亦即:封閉測地線在正曲率流形中的不穩定性, 使得任何封閉測地線必須越縮越小, 終至變成一個單點, 所以流形必然是單連通。

這類利用測地線的變分, 是切入大域幾何的第一道重要方法。

事實上, 前言 1.1 談到 Bonnet-Myer 與 Hadamard 定理, 也都是這方法的例子。

這方法的延伸, 我們稱爲「幾何變分學」。幾何變分學 (calculus of variations in geometry) 是這部書下卷的主題。在上卷中我們利用測地線的變分; 測地線是一維的。到了下卷, 我們會提升幾何變分學的層次, 把一維的測地線, 提高成二維以上的最小曲面, 或常均曲率的曲面, 而得到更多、更複雜、更深刻的大域定理。

2. 活動標架法



如果歷史的墨漬
塗寫不出　孩子們的笑

如果暮色中的平野
只有遺忘的風

2.1. 第二道方法

中卷引入的活動標架法 (moving frames), 是另一道切入大域幾何的重要方法。這是 Darboux-Cartan-Chern 發展出來處理彎曲空間的有效方法。

爲什麼活動標架法可以處理大域的問題? 十九世紀, 甚至到二十世紀初期, 處理彎曲空間, 我們用的是古典的張量分析 (tensor analysis), 取局部坐標來運算。但利用局部坐標, 不只運算繁複, 而且經常看不出一些式子的意義。即使像自然界處處存在的那個 Laplacian, 在彎曲空間用坐標表示, 寫下來就是一長串, 其中 Riemann 尺度 g_{ij} 若以所取的特殊坐標, 加以展開時, Laplacian 更是模糊難辨。[Ch. 13 (32) 式]

大約 1950 年左右, 代替張量分析的向量場法出現了。Kobayashi- Nomizu 的經典 Foundations of differential geometry 所採用的就是向量場法。向量場法在概念上清楚易懂, 但計算仍然繁複。James Simons 在 1967 年有一篇重要的文獻, 談高維的最小曲面, 用向量場法計算第二基本式的 Laplacian, 一併得到 6 維以下的 Bernstein 定理, 見本書 Ch.25。他的計算耗上論文幾十頁; 隔年 Chern (陳省身) 在 Kansas 出版小冊子, 改用活動標架計算, 只用幾頁便得到同樣的結果, 並延伸到最小曲面 M^n 在球面 S^{n+1} 中的某種剛性 (rigidity)。

活動標架法的好處是計算簡潔。特點是利用微分式 (differential form), 及關鍵的外微分 exterior derivative d-算子 [見本書 Ch. 15]。它的理論基礎是結構方程 [Ch. 16]; 後者稱爲結構方程, 是因它完全決定了局部幾何 [參考 Ch. 4 : 曲面論基本定理, 就明白此意]。有關活動標架法這些重要的背景, 我們借篇五 Ch. 16∼Ch. 18 三章, 給予完整的論述。

2.2. 活動標架法與大域行為

回到 : 活動標架法如何處理空間大域行爲的問題。

第一, 找不變式 (invariant form), 例如 curvature form [見 Ch. 19 (3) 式] 是在整個流形上勻滑定義的概念, 不依賴於局部選取的活動標架。又例如 Ch. 19, 兩組由 (15) 與 (16) 式定義的微分式, 幾乎遍佈於 sphere bundle。第二, 取外微分 d, 其後把它積分, 就變成邊界項, 於是所計算的式子有了眉目。

當然很多問題遠比這兩條取徑細膩而複雜。在這裡說的只是, 用 moving frames, 如何能處理大域問題的 philosophy。

在 Ch. 19, 我們重現 1940 年代 Chern 對高維 Gauss-Bonnet 定理所做出的內在證明。這個內在證明最能表現這種 philosophy。隨後, 在 Ch. 20∼Ch. 21, 我們介紹 Bochner 技巧, 及相關的問題, 例如特徵值的估計, 藉此把活動標架法的精神進一步深刻運用。注意 Laplacian, 就是 gradient 的 divergence, 基本上對應於某個 $d\omega$ 的微分式, 所以一積分, 就變成邊界項, 而容易控制 [例如 Ch. 20 (35) 式與 (36) 式]。

在 Ch.20∼Ch. 21 兩章中, 我們也提到 Lichnerowicz-Obata 堪稱里程碑的定理。Obata

大域定理的證明, 揉合了活動標架法的應用, 與測地線二階變分, 是大域幾何兩道方法的組合。本來依我的寫作計劃, 在 Ch. 21 也要放入王藹農與 Choi 漂亮的工作 [W-C], 但 2006 年寫作因故中斷而遺漏, 幸好在本書下卷的結尾有衍篇提到這工作, 並約略加以證明 [見衍篇之一, Thm. 3]。

活動標架法的運用是中卷篇六的主要內容。當然, 爲了探討這些, 我們要先鋪陳篇四「張量的微積分」(即 Ch. 13∼Ch. 15), 與篇五「Riemann 幾何的結構」(即 Ch. 16∼Ch. 18)。

寫完活動標架法及其運用, 本書中卷也就結束。

2.3. 前篇的章 B

活動標架法是本書中卷的主要內容。但作爲白話數學的書, 我不能直接在抽象的結構, 鋪陳活動標架法, 於是我回頭在上卷的前篇補寫了

章 B 活動標架法初步。

對活動標架法作些準備, 尤其著重與讀者的直覺連結。我們在前篇, 引入 $\mathbb{R}^N$ 中的結構方程 [章 B §2.1] 與活動標架法初步。

利用它們, 巧妙的計算出 $\mathbb{R}^4$ 中標準環面 (即 Clifford torus) 的曲率爲零, 所以 Clifford 環面是平直的; 同時, 我們直觀的呈現這環面在四維空間中的整體樣貌。[章 B §3.2∼3.4]

對於正曲率的球面、與負曲率的 Lorentz 雙曲面, 我們也利用結構方程, 漂亮的計算出它們的曲率。這是古典的張量分析, 與後來的向量場法, 不易辦到的事。

我們取 Clifford 環面、球面、與 Lorentz 雙曲面, 作爲例子來計算, 是因它們分別代表高斯曲率爲零、正、負, 然後三者皆爲常數。

進入中卷, 我們則考慮一般 Riemann 流形的結構方程與活動標架法。

2.4. 前篇的章 A

爲了事先沒讀過基礎「曲線曲面論」的讀者, 我在章 B 之前還加寫

章 A 大域曲面論。

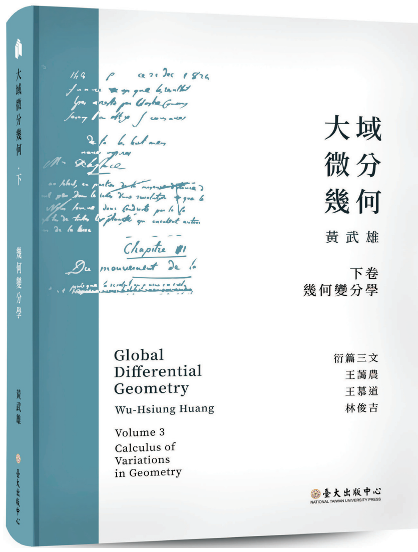
1978 年我曾出版另一本小書, 供大學部的微分幾何課程採用, 書名是《初等微分幾何講稿》。現在這部書前篇的章 A, 基本上, 就是 1978 年那本講稿的濃縮版, 方便從未好好讀過大學微分幾何課的讀者, 很快進入狀況。對於那些在數學與物理的不同領域, 已有一定成熟度的專家們, 章 A 是很好的入門。

章 A 除了把二維曲面的 Gauss-Bonnet 定理, 與 Hopf 標數定理, 連結起來之外, 我們

也證明了 Gauss 曲率是內在的, 不依賴於它如何等尺度的 (isometrically) 放在三維空間中。Gauss 這項創造性的認知, 是日後 Riemann 探討彎曲空間的重要伏線。

在零四講稿加了前篇的章 A 與章 B, 是 2008 年的事。這樣, 本書便算自給自足了 (self-contained)。

3. 幾何變分學



舞台的衣袖　辨不清
面目真假　憂傷漂流於街巷

山腳下的溝水　靜靜流過
橋頭坐著戴紅帽的幽靈

他仰著頭　用天邊的彩雲
　　　　　編織燦爛的笑顏

3.1. 幾何變分學的鋪陳

現在我們來說下卷： 幾何變分學。2012 年之後, 我開始寫下卷, 陸陸續續完成篇七、篇八、篇九, 即 Ch. 22∼Ch. 30 共九章。

大域微分幾何, 如果有所謂第三道方法, 那就是二十世紀中期之後, 蓬勃發展的幾何分析 (Geometric Analysis)。

幾何分析涵蓋甚廣, 動態、複雜而深刻。幾何變分學只是其中的一支。我們選幾何變分學作爲下卷的主題, 主要因爲它的提問, 自然而有趣。同時它與幾何分析的基礎概念相通。

像 Hopf 最大原理 (maximum principle)、比較原理 (comparison principle)、流形上的變分、最小曲面及常均曲率曲面的穩定性、stability operator 的特徵值、絕對最小與 calibration、Sobolev 函數、值譜定理、$\cdots$ 等, 都是幾何分析必要的基礎概念。這些全放進了書的下卷。

幾何變分學中很多經典的 idea 與貢獻, 則爲下卷探討的主題, 例如：Laplace 的毛細估計、Plateau 問題、Bernstein 問題、迷人的 Hopf 猜想與凸性問題等。

在下卷的開始, 即篇七 Ch. 22、Ch. 23 兩章, 我們談均曲率的一些基礎概念, 但同時鋪陳一些自然的問題。例如 Ch. 22 中, 談曲面積的絕對最小、引入 calibration、作出 $\mathbb{R}^4$ 中的

Plateau 解; 又從二階變分式的計算, 至少證明 Barbosa-do Carmo 有趣的定理 : $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的封閉區面 M^n, 若均曲率爲常數 (簡稱 cmc=constant mean curvature), 且爲穩定, 則 M^n 必爲球面。這個所謂 stable sphere theorem, 其實是 1950∼1980 年間許多幾何學家在思考 Hopf 猜想的一條分出去軌跡。

Ch. 23 也一樣, 在探討最小曲面的穩定性這條自然的脈絡中, 我們介紹了 Jacobi 場, Sobolev 空間, 並證明一般的值譜定理 (spectrum theorem)。然後我們以特徵值的估計說明: 鼓面愈大聲音低沉; 而且在面積相同的情況下, 證明鼓面愈對稱, 聲音低沉。同時, 我們把這些有趣的古典分析, 與現今問題相連結。

3.2. Plateau 與 Bernstein 問題

Plateau 問題與 Bernstein 問題的交會, 是 1960∼70 年代幾何界的大事。下卷篇八中的三章 (Ch. 24、25、26) 集中在說這個故事。著名的 Plateau 問題是古典的問題。1930 年代 Jesse Douglas 有突破性的進展, 他用「三定點手法」成功的控制面積泛函的 minimizing sequence, 使其極限成爲 Plateau solution。我們用 Ch. 24一整章, 完整的敘述他原創性的證明。然後我們進入 1960 年代之後最小曲面極盛時期綻放的美麗花朵。

Plateau 問題的原始觀點粗略的說, 是給定 $\mathbb{R}^3$ 中的一條封閉曲線, 有沒有以這曲線爲邊界, 而面積爲絕對最小的曲面 (稱爲 Plateau solution)? 又如果有解, 解曲面是否沒有奇點? Bernstein 問題則爲 : 在 $\mathbb{R}^2$ 上全定義的 minimal "graph" (即表成 $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$), 是否必爲平面? Bernstein 定理就某種意義來說, 可以說是一種非線性的 Liouville 定理。

有趣的是, Plateau 解曲面有沒有奇點, 與 Bernstein 定理對不對是同一件事 [Ch. 25]。如果我們躲進 Plateau solution 那奇點的無限小鄰域去看 Plateau 的解曲面, 我們會看到一個 cone (錐面)。相應的, 如果我們跑到無限遠處去看 Bernstein 解曲面, 也會看到一個 cone。

於是問題轉化成 $\mathbb{R}^N$ 空間是不是存在非平面的 minimal cone 的問題? 亦即 : 是不是有這樣一個面積爲絕對最小的錐面 (稱之爲 minimal cone), 它不是 $\mathbb{R}^{N-1}$? 有, 則 Plateau solution 有奇點, Bernstein 定理也不對。沒有, 則 Plateau solution 爲 regular (沒有奇點), Bernstein 定理正確。

這是兩個問題美麗的交會。

3.3. 意大利學派

藉 Ch. 25, 我們先介紹 Bernstein 問題的古典背景, 亦即在最簡單的 $\mathbb{R}^2$ 上考慮 minimal graph, 並用 Chern 的觀點, 把最小曲面的 metric 改造 [見 Ch. 25 (14) 式], 將問題歸結爲 Liouville 定理。隨後我們進入 1960 年代最小曲面論的 highlight : James Simons 對兩問題交會所做的貢獻, 並用活動標架法估計第二基本式, 而得到維數不大於 6, 不會有平面之外的 minimal cone。

藉 Ch. 26, 我們進入意大利學派 Bombieri, de Giorgi 的世界, 引入 BV 函數 (functions of bounded variation), 延伸 Bernstein 定理到 7 維, 建構 $\mathbb{R}^8$ 中非平面的 minimal cone, 並給出 8 維以上著名而深刻的反例。另外, 1970 年代 Schoen-Simon-Yau 直接估算第二基本式, 一方面標誌活動標架法的威力, 另一方面開啟幾何分析的研究, 把幾何與分析做緊密而漂亮的結合, 這工作也放在 Ch. 26, 作爲篇八的結束。

4. 常均曲率曲面

4.1. 毛細液面

篇九從 Young-Laplace-Gauss 對毛細液面的貢獻談起, 1805 年 Thomas Young 導出: 液面的內外壓力差爲均曲率 (mean curvature) 的常數倍 [Ch. 27 (1) 式]。同時, Laplace 觀察到：液面的均曲率與液柱高度成正比 [Ch. 27 (4) 式]。他們的工作, 開啟了毛細液面與均曲率的研究。我們知道在無重力的狀態下, 毛細液面的均曲率必爲常數, 亦即 cmc (常均曲率曲面)。

對於 Young-Laplace 方程 [Ch. 27 (4) 及 (5) 兩式], Gauss 用虛功原理加以證明, 打開變分學的一頁。在 Ch. 27 我們用現代語言重新詮釋這些, 並建立普遍的理論架構, 據此深入毛細液面 (包含 cmc) 及相關曲面的探討。

毛細現象有很多有趣的問題, 例如一棵樹爲什麼可以把地裡的水分吸到樹頂? 根據 Laplace 的計算, 以現有導管的粗細, 毛細現象最高只能把水分吸到 10 英尺 [Ch. 27 (32) 式]。但很多樹都遠高於 10 英尺。植物學者認爲原因是： 葉面水分蒸發具有真空吸力的效果。可是很多溫帶的大樹, 冬天葉子都掉光, 如何能存活? Robert Finn 給出了答案：因爲導管的橫截面, 實際上不是圓形 (如 Laplace 所假設), 而是偏向六角形。秘密就在那些角, 當角夠小時, 毛細液面會以 $1/r$ 的速度爬升。

這樣的例子揭示我們必須正視毛細液面的複雜性。接連很多問題都與毛細液面的幾何有關。

當重力越小, 管壁對液面分子的吸附力, 或排斥力的影響越大, 液面越變化多端。尤其重力爲零時, 幾何越豐富。例如有趣的凸性問題, 見 Concus-Finn [Ch. 27 定理 4]、Korevaar [Ch. 27 定理 5] 與 Chen-Huang [Ch. 27 定理 6]。

又例如一個封閉的容器, 裡面除了留有一些空隙之外, 幾乎注滿水, 把容器拿到太空中, 這時重力爲零, 那些空隙變成什麼? 是不是一個球狀? 答案是對的 (當然也可能是 n 個球狀)。理由是： 這時空隙的邊界是常均曲率的液面。Alexandrov 在 1956 年證明任何一個安裝 (embedded, 或譯爲鑲映) 於 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的 n 維封閉曲面 M^n, 若均曲率定常 (即 cmc), 則必爲球狀 [Ch. 28 定理 2]。

於是 Hopf 猜想出現了： 假定 (cmc 的) M^n 不限定 embedded (鑲映), 而只知 immersed (浸映) 於 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中呢? Hopf 自己證明了 M^2 若與球面 S^2 同胚, 則浸映的 cmc M^2 只能是標準球面。然後是一些有趣的努力 : 例如 Barbosa/do Carmo [Ch. 21] 與 Hsiang (項武義)。到了 1983 年, Wente 證明 Hopf conjecture 不對, 存在很多環面的反例。

篇九前兩章 [Ch. 27 與 Ch. 28], 把 Hopf's differential 與 Alexandrov 的 symmetrization 分別做了介紹, 並得出他們的定理。在衍篇中, 我們附上王藹農簡介 Wente 環面的幾何。

4.2. cmc 的幾何

篇九的後兩章 (Ch. 29 與 Ch. 30), 主要的工作與本書的作者有關, 例如 : 凸性問題、大凹陷定理與 Jacobi 場的分布。

從 1950~1983 年間, 幾何學家會支持 Hopf 猜想, 其直覺的理由是 cmc 封閉曲面 M 似乎不能有凹陷 (指 Gauss 曲率爲負的地方)。如果這個直覺是對的, 那麼由 Hadamard 定理, M 必然圍出一個 convex body, 亦即 M 鑲映於 $\mathbb{R}^3$ 中, 因此根據 Alexandrov 定理, M 必爲球形。

Wente 的衆多反例, 告訴我們上述的直覺是錯的 : M 確實有凹陷。Huang-Lin 的大凹陷定理, 在釐清上述直覺成立的範圍。它說, 如果範圍不大, cmc 封閉曲面確實不能有凹陷。換句話說, 它若有凹陷, 凹陷的範圍必須很大, 至少包含一個 extremal domain。

任何一個 domain 都可以一直拓廣到成爲 extremal [即 $\lambda_1(M)=0$, 見 Ch. 29 §2], extremal domain 是相當大的面域, 例如 M 中的一塊面域, 若爲 non-parametric (即可以表成 $u=u(x)$, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 時, 它都比 extremal domain 小。可見凹陷的範圍很大。大凹陷定理的證明, 也支持早先我對凸性問題的主張 : 1970~80 年代 Brascamp-Lieb, Caffarelli-Friedman, Finn, Korevaar, Chen-Huang, Shih, A. Wang 等人處理的凸性問題, 關鍵在於 : 問題是不是 well-posed?

亦即, 當我們期望在凸區域 (convex domain) 上的任何一個橢圓方程解, 也是 convex 時, 邊界條件不能加在零階 (Dirichlet), 或一階 (capillary 或 Neumann), 而應加在二階 [Ch. 29 §1]。

另外, 一個在 cmc 曲面上的 domain 隨著時間 t, 從一個點鄰近的小小範圍連續增大, 記成 $\{D(f), 0\le t<b\}$, 歷經 extremal (即 $D(t_1)$, 記成 $D[\lambda_1=0]$), 到由 stable 變成 unstable 時, 會出現第一個非零的 Jacobi 場。之後呢?

在篇九 Ch. 30, 亦即, 在本書的最後一章, 我們把這問題與 Morse index 定理連結起來, 一如在測地線的情況一樣 (最簡單的一維測地線, 現在變成二維以上的 cmc 曲面)。本章的主要結果是 : 介於 $D[\lambda_{k-1}=0]$ 與 $D[\lambda_k=0]$ 必有 Jacobi 場出現過, 而且其重數 (multiplicity) 可以控制。[Ch. 30 定理 8]。

於是, 下卷結束了, 全書 30 章。

4.3. 白話數學的故事

有個故事綿亙高中數學、大學線性代數、多變數函數、研究所泛涵分析與偏微分方程 ⋯ 到本書最後的 Jacobi 場分布與 Morse index 定理, 這漫漫長路有條主軸把其間許多重要的題材全都串連在一起。

先說故事的背景：在二維曲面上, 從一點 p 出發的一條測地線, 到了所謂第一共軛點 q, 例如在球面上從北極 p 沿大圓出發到南極 q, 此時根據第一共軛點的定義, 有非零 Jacobi 場 J, 出現在兩端點之間 $(J(p) = 0 = J(q))$。過了 q 之後, 測地線就從 stable 變成 unstable。這件事是 Morse index 定理最簡單的狀況, 看看它的證明, 我們需要辛苦的製作一個 unstable 變分函數 [Ch. 11 定理 B]。

爲什麼說, 它是 Morse index 定理最簡單的狀況? 因爲 Morse index 定理的意思是：就能量泛函來說, 不論 q 點沿測地線跑到多遠, q 點之前累加的 nullity ν (即獨立 Jacobi 場的個數) 等於在 q 點的 index i (即 unstable 變分函數族的維數)。最簡單的特例是：剛過了第一共軛點之後, 累加的 nullity ν 是 1, index i 也是 1。即使這最簡單的狀況, 證明都要大費周章 (製作出合適的 unstable 變分函數), 何況對一般的 (ν, i)? 又何況 Ch. 30 所考慮的是, 要從簡單的測地線段, 延伸到在高維的 cmc 曲面上連續增大的面域 $D(t)$!

結果呢? 在 Ch.30, 我們不需辛苦製作複雜的 unstable 函數族, 便輕易證明了 cmc 曲面上的 Morse index 定理, 同時描繪了 Jacobi 場的分布。一個 nontrivial 問題, 竟化爲 trivial! 這如何可能?

關鍵在於: 我們利用了值譜分解 [Ch. 23 定理 3 及 Ch. 30 §6], 亦即考慮一橢圓型 operator A, 任何函數 $v \in L^2(\Omega)$ 可用特徵函數 u_i 作爲基底, 做值譜展開, 而且知道：特徵值 λ_i 的分布爲 $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \cdots \to \infty$。換句話說, $\langle Av, v\rangle = \lambda_1|v_1|^2 + \lambda_2|v_2|^2 + \cdots$, 這無疑是高中數學二次曲線轉軸問題的一步步延伸。

4.4. 一條故事的脈絡

我們來看看故事的整條脈絡：

起點是：高中數學二次曲線的轉軸。但轉軸問題延伸出去, 就是大學線性代數中矩陣的對角化, 亦即在 n 維線性空間尋找特徵方向的問題, 這是第二站。我們接著來到第三站：大學多變數函數的二階展開, 利用尋找特徵方向, 可以判別極大極小的問題, 亦即確認是峰點、谷點、鞍點、⋯。第四站是：研究所學泛函分析與偏微分方程, 我們需要把 Fourier 展開一般化, 亦即在無限維 (Hilbert) 空間考慮值譜分解 (spectrum)。最後利用值譜分解, 我們來到終點站,

抽象的 Morse index 定理與 cmc 曲面的 Jacobi 場分布。

第四站的值譜分解, 本質上也是尋找特徵方向, 只是現在我們從 n 維空間延伸到無限維空間 (所謂特徵方向現在稱爲特徵函數)。我們在 Ch. 23 §7 鋪陳了它的證明, 最自然的想法, 還是線性代數中尋找特徵方向的路線, 在某個子空間 W_i 的單位球面上, 求二次式 $\langle Av, v\rangle$ 的極值, 其相應的方向 u_i 便是特徵方向。

可是現今在無窮多維空間求極值, 緊緻性 (compactness) 必然是關鍵。爲此我們引入 Sobolev 空間, 使 Rellich 緊緻定理可以運用。Rellich 緊緻定理的概念來自高等微積分中的 Arzela-Ascoli。很多分析的重要概念, 就這樣連結起來了, 然後我們得到了值譜分解。

當我們面對 Morse index 定理及 Jacobi 場分布, 我們紮紮實實的利用了值譜分解的大定理, 代替辛苦製作 unstable 變分函數族。後者的複雜度難以想像。

原來是這麼一回事 : nontrivial 問題還是 nontrivial, 只是我們把 Morse index 與 Jacobi 場的困難, 歸之於值譜分解的證明。

故事這條長長的脈絡, 把數學很多重要的概念, 由淺入深全部連結在一起, 看看吧, 轉軸、對角化、特徵值、二階展開、Fourier 級數、compactness、Arzela-Ascoli、Sobolev 空間、Rellich 緊緻定理、值譜分析, 到 Morse index、Jacobi 場 $\cdots$, 原來這些重要的概念, 都有一條清澈的溪水貫穿其間, 把一個看來簡單的問題 (例如轉軸) 一節節往神秘的深山開拓, 進入數學的深層世界, 這就是白話數學。

於是, 我們爲這部白話數學的專業書劃下了句點。

5. 結語

5.1. 衍篇

2015 年開始寫篇九時, 我邀請王藹農、王慕道、林俊吉三位同行, 各寫一篇 survey 之類的文章, 放在書末, 稱爲衍篇。目的在讓讀者在讀完本書之後, 看到幾何研究正在發展的一些新方向。

不久我接到三篇完稿。很高興他們的論點與本書準備的基礎知識, 不只搭配得很好, 更有畫龍點睛之妙。我畫龍, 他們點睛。

例如 : 書中各章反覆利用二階變分式, 處理許多問題。慕道在 〈從一個方程式談起〉一文中, 選擇二階變分式, 並點出這式子的神髓 : 把它與 Perelman 的工作、與 Schoen-Yau 的正質量定理, 關連起來。另外, 他又說明二階變分式在相對論中所扮演的角色, 指出它如何鋪陳 Penrose-Hawking 的奇點定理。慕道的短文, 引領讀者看到自然深層, 看到近年這些偉大的工作, 存在著某種有趣的連結。

藹農所寫的 survey, 也提供第三隻眼睛, 重看近代微分幾何的發展, 他把似乎零星的一些

結果, 串連在一起, 包括 Herman Weyl 經典的 embedding 定理、Nirenberg、Chern、Choi-Wang (崔炯仁-王藹農)、··· 等人的工作。有很多地方, 他也扣合著一些與我相關的工作。例如, 他用簡練的文字, 詮釋大凹陷定理; 同時, 他把 Henry Wente 著名的反例, 給予幾何的描述, 讓人易於了解。這是我書中該做而沒做的事。

俊吉所談 ⟨曲線與幾何分析⟩, 是一個正在開展而處處未知的領域, 其中很多概念都還有待定義。1980 年代我曾注意到 DNA 本身的動力問題, 並到生化所演講。DNA 的性狀, 鬆坦或糾結, 與它影響生物體的強度有關。數學上的彈性桿 (elastic rods) 正是 DNA 的原始力學模型。俊吉在文中介紹彈性桿的精確定義, 並分析當前相應的發展。他在文中又從微分幾何的觀點, 申論 Möbius bands, 與幾何扭結 (geometric knots, 即在拓樸扭結上加尺度結構)。這些研究都還在開創階段, 充滿活力。俊吉的 survey, 從界定問題的困難出發, 讓我們看到第一線研究工作各種 approach 的利弊, 非常有趣而深具啟發, 值得年輕的研究者投入。

非常感謝三位同行分別爲本書的衍篇撰文, 替這部書生色不少, 也爲這部書的讀者, 打開多面窗。這正是當初我邀他們撰稿的目的。他們的撰文, 讓這本書鋪陳的內容, 活了起來。

5.2. 校訂序

這部書有中央研究院兩位資深研究員, 黃振芳與鄭日新, 一路協助我校對。他們耗費很多時間與心力, 逐字閱讀全書, 指出錯誤。數學書有一點點錯誤, 都可能誤導讀者。寫數學書我最擔心的, 就是這件事。

書不是我自己打字的, 錯誤一定會有, 更何況我自己的手稿也可能寫錯。兩位校訂打字稿的時候, 我故意不提供手稿。這就是說, 這部書背後, 有兩位很好的專業數學家, 委屈自己當作初學的讀者, 逐字閱讀, 一邊計算, 檢核錯誤。經過他們看過的打字稿, 我當然完全放心。

每次讀他們傳回的勘誤, 看他們逐行逐字的修訂, 有著莫名的感動。書稿完成時, 我請兩位寫校訂序, 他們下筆時節制筆墨, 隻字不提他們校訂時的艱辛。字裡行間, 熱情如故。振芳雖臥病經年, 落筆時仍然意氣飛揚, 日新則始終內斂謙和。

振芳心念數學白話。事實上, 先前提到的《初等微分幾何講稿》於 1978 年出版, 內容是 1976∼7 年我在台大數學系教大三微分幾何時的講義。年輕時的振芳正是那班的學生。講稿封面的左上角印有「白話數學」四個字。

事隔五十年, 振芳在校訂序的第一句話說 :「這是一本構思 50 年的書, ··· 作者半世紀所想寫的書, 是白話數學, ···。」說實話, 這是振芳從旁觀察, 做出來的詮釋。或許也反映他自身對白話數學的熱情。

但白話數學的構思, 果如振芳所言, 一直是我教學與撰文的指導原則。

2004 年我寫完現今這部書的「零四講稿」之後, 因故延宕多年, 未繼續下筆, 是振芳多次敦促, 並自願幫我逐字校對, 這部書才有今日的面貌。

這部書還有三位年輕數學研究者李盈嬌、蔡李承與蘇瑋栢先後幫我校對過。大約 2006 年, 蔡李承上過我的課。學期結束後, 他更針對「零四講稿」(即上、下兩卷) 細心閱讀, 提供寶貴的意見。蘇瑋栢則在 2010 年, 加入編輯團隊。瑋栢大四時修過我的課, 此後斷斷續續協助我打字校對, 直到下卷完成。

5.3. 白話數學的意涵

1966 年九月, 我初抵 Rice 大學研究所, 摯友楊維哲從 Princeton 來信, 同我聊起數學的 jargon, 他把這字眼譯成「黑話」。我一直記憶深刻。

像數學專業這麼艱深冷僻的領域, 當然需要 jargon (直譯爲行話)。但如何讓它變得更容易領悟? 或說, 如何使黑話變成白話? 在我們年輕的心思中, 是時而會想起的問題。

半個世紀過去, 因振芳重提舊事, 我動了心念, 想藉本書出版時, 對白話數學多寫幾行字, 加以界定。

對我來說, 白話數學就是要直入核心, 不在不那麼必要的術語之間打轉。行話之所以變成黑話, 就是因爲太依賴術語。

白話數學不是說些無關痛癢的 triviality。正好相反, nontrivial 的內容, 才會是數學有意思的東西。因爲 nontrivial, 數學才變得深刻而好玩。

白話數學, 提出自然有趣, 而且重要的問題, 作爲鋪陳材料的方向; 搭配故事與脈絡, 使讀者眼睛發亮, 與說書者一起走入數學的深處。但做數學 (do mathematics) 比學數學 (learn mathematics) 重要。讀者不能只聽故事, 不能只跟著書本走、跟著說書人走。只有做數學才能學好數學, 讀者要投入心力去做, 盯著重要問題去思考、去嘗試、去動手。這部書中我沒有力氣, 擬出很多演習性的題目。不過這話不只是藉口, 到了專業的階段, 那些演習的題目已非絕對必要。反而是定理本身, 讀定理的證明之前自己先動手去證明, 這就是做數學。

由於列在書中的定理, 多半是大定理, 初學的讀者不一定能夠自己證明出來, 但因用心思考過定理的條件與結論, 有無道理; 思考過某些關鍵的例子, 而且自己嘗試過證明, 這時閱讀書上的證明, 立即心領神會, 一目了然。1963 年, 我自己大三, 那時讀 John Kelly 的拓樸學 (General Topology), 便用這個自然的方法, 靠動手做, 讀完全書, 因此自覺融會貫通。就數學成熟的程度來說, 也提升一大步。

所以說, 白話數學不只是說書者的責任, 也是聽書者的工作。

當然白話數學有對象上的差異。在專家之間, 幾句切中要害的話, 就是白話; 但對初學者則需多加鋪陳。

5.4. 周邊工作

對我來說, 寫這部書的過程, 耗在打字稿的編排、校對等周邊工作的時間心力, 遠比起書寫數學本身多上好幾倍, 而且這些細瑣的周邊工作, 時時讓我疲憊, 而感氣力不繼。

如果不是李盈嬌多年來一直協助我, 打字編排與整合, 這部書不可能完成。爲了這部書, 她真是耗盡心力, 保持極大的耐性, 對她, 我深致謝意。

爲了書的周邊工作, 許多數學界或非數學界的人士, 都曾經幫助過我。記憶所及, 早期有台大數學系的黃瑞霖、黃信元、左岸出版社的王湘瑋、師大數學系的鄭永明, 近年更有台大數研所的蘇瑋栢、呂治鴻、胡亦行、葉宗樺, 與智準編譯社的林秉均、台大出版社的編輯吳育嫾、李協芳, 他們都爲此書貢獻很多心力。

對於數學式子的編排, 我希望它在書中, 就像在黑板上的計算一樣, 是二維的形式, 而非一維 [例如：Ch. 6 (18) 式;Ch. 13 (42) 式;Ch. 29 (46) 與 (48) 之間]。

數學式子編排成二維格式, 讀起來一目了然。尤其複雜的計算, 可以一氣呵成, 有利於心算檢核, 歸納重點, 並將運算過程儲存心中。同時, 亦能節省篇幅。但要用電腦編排二維格式, 並不容易; 符號的位置亦經常會跳動, 偏離原處。爲了上述閱讀的好處, 我堅持二維格式的編排, 也因此增加編排人員的困擾。但終於, 我們用這樣的形式完稿。朋友們不懈的堅持與努力, 是成功的關鍵。

另一個困難是, LaTeX相關的中文軟體, 不斷更迭, 本書寫作前後又長達十多年, 格式不易統一。初稿完成之後, 幸好有台大資訊系及社會學研究所畢業的李航先生, 自願承擔整合工作。電腦繪圖在李航安排整部書重繪之後, 許多手繪圖仍必須重畫, 僅僅爲了這事我們又耗掉一個多月的時間。這艱難的過程有呂治鴻、石苔、宋政蒲費心協助。最後石苔還幫我做封面設計。

封面放上 Gauss/Riemann、Elie Cartan、Pierre Simon de Laplace 的手稿, 緊扣著上、中、下卷的主題。諸家數學物理的歷史人物, 是本書相關領域的 founder(開創者)。喜歡數學史的葉宗樺, 幫我蒐集與分析, 挖掘出很多有趣的史料。可惜因篇幅有限、或字跡模糊、或解析度不足, 只好割愛。但我們還是放進了一些珍貴的、令人喜愛的手稿。行家多少可以辨識大略的內容。

去年底不幸辭世的大姐夫鄭文濤兄與靜姐兩人, 十多年來從各方面, 包括物力資源與生活照護, 予我無價的支持; 家弟黃德慈 Robert Huang 贊助原稿多年來龐大打字編輯的費用; 麻州大學 (U. of Mass.) 的物理學講座教授許仲平, 幾次提出要捐點錢, 幫助書的出版, 他認爲這部書對理論物理學家要跨入幾何領域, 會有很大助益。還有台大摯友楊維哲教授去年看到這部書稿, 立即推薦我把書交付台大出版中心出版, 並劍及履及付諸行動。此外台大出版中心聘請的兩位審稿專家極力推薦這部書出版, 並極有耐心一字一句的勘誤。這一切我都銘感在心。

歲月匆匆, 十多年忽焉而過。書稿推積如山, 紙頁間有形或無形, 留存很多珍貴的記憶與情誼。無論如何, 這部書是匯聚很多人的心力才能完成。可惜無法一一列名敘說, 僅此數語, 一併誌謝。

—本文作者爲台大數學系退休教授—