數學傳播 44卷1期, pp. 18-32

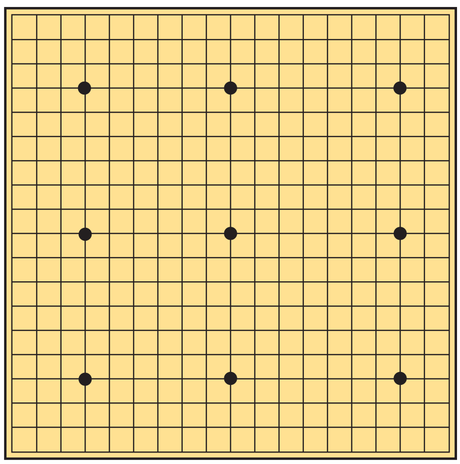
眞與美

演講者：劉太平院士

時　間：民國 108 年 10 月 26 日
地　點：中研院院區開放, 人文館第一會議室
整　理：編輯室

今天的題目是一個老課題。什麼是真? 什麼是美? 在哲學上有很多的討論。不過我今天其實是要講兩個題目, 一個是偉大的物理學家 Boltzmann。他用了很多美妙的數學, 事實上他自己也創造一些美妙的數學。他用數學來研究物理, 得到的物理上很深刻、很重要的結果。另外, 我要談的另外一個題目是圍棋。圍棋非常地美、非常地難, 已經有兩、三千年的歷史。圍棋因為它的美、它的難, 真正促進了人工智慧 AI 的發展。這兩個題目有一個共通點 : 它們的數學很困難, 都是要處理很大的量。

Ludwig Boltzmann
(1844 Vienna ∼ 1906 Trieste)



圍棋棋盤：縱橫19道

Boltzmann 研究空氣動力學。他與前人不一樣的地方是, 他認為 : 我們討論空氣變化的時候, 應該從原子出發。如果你從這個角度來看空氣的話, 問題就很大了, 因為空氣裡的分子有多少? 它有 10 的 23 次方的數量級。我隨便抓一把, 就有 10^{23} 的數量級。10 的 23 次方到底是多大的數量? 有人做了一個比喻, 是西方的比喻 : 古羅馬凱撒大帝最後去世的時候吐的那口

氣, 裡面就有那麼多分子, 而這些分子在地球四面八方散開了; 你、我現在吸的這一口氣, 裡面平均有凱撒大帝最後吐出來那一口氣裡面的5個分子; 你每次吸的氣, 有5個分子是凱撒大帝最後吐出來那一口氣的5個分子。所以這是很大一個量。

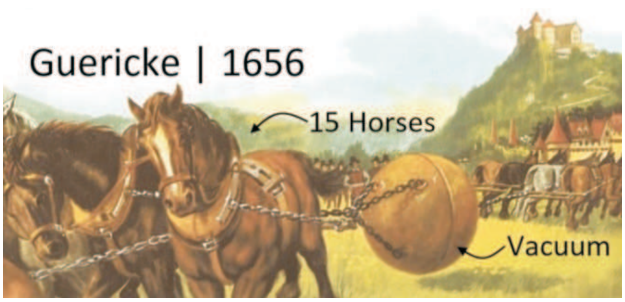
那圍棋呢? 就這麼一個小小棋盤; 可是如果你真的下圍棋的話呢, 這棋盤其實是像一片大海那麼大。你看了圍棋盤會覺得它非常大, 爲什麼你會覺得非常大? 因爲它有 19 乘 19, 361 個點。你先下, 有 361 種選擇, 然後換我下, 你下的那裡我不能下, 所以我有 360 個選擇, 那下次呢, 就 359 個選擇, 所以這一盤棋下下來之後呢, 這一盤棋的可能性差不多就是 361 乘上 360, 再乘上 359, 然後一直乘到 3、乘 2、乘 1。當然不是真正這麼大, 譬如說, 比賽下圍棋的時候, 沒有人會下在最頂端的地方。不過這個量基本上就是 361!; 361! 是多大一個量? 大家有計算過, 它超過這宇宙中所有能夠觀測得到的原子個數的總量, 要大很多。所以下圍棋是很困難的一件事。用電腦來研究如何下圍棋, 是一個很困難的課題, 這是我第二個要講的題目。

不管是在講空氣動力學、統計力學, 或是圍棋、人工智慧, 今天要強調的是, 數學思維佔了核心的地位。

Boltzmann 及 Boltzmann 方程

現在來看第一個題目 : Boltzmann。Boltzmann 於 1844 年在維也納出生, 1906 年在 Trieste 過世。我要談的是, 他運用數學的美, 來求得物理的真。

Boltzmann 討論空氣動力學 (Kinetic theory of gases) 之前, 很多人就已經討論過氣體力學 (gas dynamics), 不同的是 Boltzmann 從原子出發。之前大家怎麼討論氣體力學呢? 一個重要的里程碑是 Von Guericke (1602∼1668), 出生於德國馬德堡 (Magdeburg)。他說空氣壓力是很大的。各位同學在家裡會感覺到 : 空氣哪有什麼壓力? 我要是沒有父母的壓力, 沒有老師的壓力, 沒有同學的壓力, 沒有課程的壓力, 就海闊天空。Von Guericke 說 : 不對的, 空氣壓力非常之大, 空氣的壓力有多大呢? 他精心製作了兩個半球, 後來大家稱做馬德堡半球, 用皮革密封地非常好。他把球裡面抽成真空, 所以裡面沒有壓力。但外面有空氣壓力, 所以把兩個半球壓得很緊。有多緊呢? 那就看壓力多大了。他要告訴我們到底多緊, 所以他在左右兩邊各有一堆馬, 要兩堆馬把這個半球拉開, 但怎麼都拉不開; 大家都嚇了一跳, 原來空氣的壓力非常之大。Von Guericke 知道空氣壓力對天氣的作用, 用了氣壓計等等工具, 來告知人家隔天會有暴風雨。



氣體力學的功用非常之大, 之後又有一些很重要的結果, 譬如 Robert Boyle(1627∼1691) 的波以耳定律。接著, 19 世紀初, 科學上有一個非常重要的發現, 有人認爲這是一千年來最重要的科學發現, 就是熱力學第二定律。熱力學第二定律的發現何難之有? 主要是它不明顯。最早提出的是 Sadi Carnot (1796∼1836); 當時工業革命剛發生, 構造出蒸汽機, 大家設法要讓蒸汽機的效率提高。但 Carnot 說 : 你只能夠提高到某一個地步, 沒辦法再改進了。之後 James Joule (1818∼1889) 及 Rudolf Clausius (1822∼1888) 找出熱力學第二定律及「熵」這一個概念, 這一個「熵」量永遠增加, 不會減少。

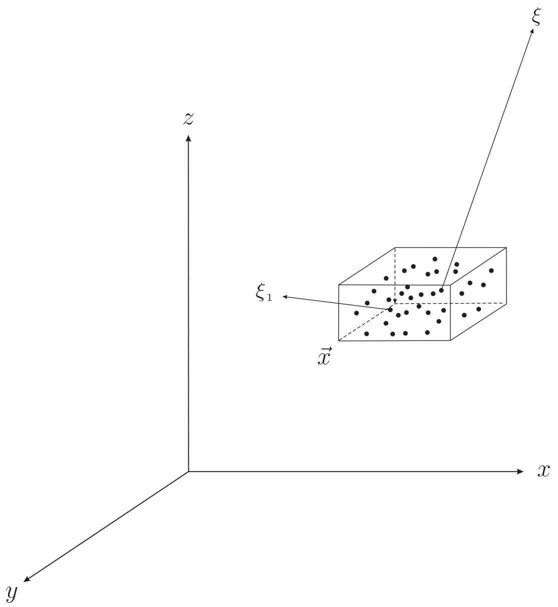
Boltzmann 在討論空氣動力學的時候, 已經有很多氣體力學的研究。工業革命已經發生了, 蒸汽機已經用在輪船上。但是 Boltzmann 認爲, 儘管這些研究符合事實, 工業上的應用也非常成功, 不過我們對空氣動力學的理解, 應該要更根本一點。我們要回到古希臘的時候, 視空氣由很多原子所組成, 從原子的碰撞來理解空氣動力學的現象。

他用的數學最主要是「機率」和「算法」。機率這門學問是在探討不確定的事情。而 Boltzmann 說 : 我要能夠算。他用一個式子 : $\log ab = \log a + \log b$。這個 log 方程人類很晚才發現, 我等一下會稍微給各位說明一下。

現在我稍微說一下 Boltzmann 遇到的困難, 這困難是很大的。首先是他的目標, Boltzmann 要做什麼? 回到古希臘的猜想, 他說空氣事實上是很多分子、很多原子構成的。原子碰撞就像打撞球般咚地出去; 從這個想法出發是非常直覺、非常古典的。而後我們用它來了解流體力學, 還有熱力學。如果你稍微從這方向去想的話, 就會發現這個問題非常之困難。這個困難有很多面向。其中之一是 : 兩個原子碰撞之後分開, 是一個可逆、可還原的物理現象。牛頓已經很淸楚碰撞的力學了, 他研究天體力學之時就很淸楚了 , 這是可逆的。我現在稍微說一下可逆不可逆這件事。地球繞太陽是可逆的, 周而復始。但是我們也知道, 世界上很多的事情是不可逆的, 其中最明顯的就是人會變老, 老了以後就不會變年輕了。這是不可逆的, 你不必等到我這個年紀就可以感覺到。科學上, 甚至是哲學上, 甚至心理學上, 可逆不可逆的問題, 給人非常重大的困擾。怎麼會有些事可逆、有些事不可逆? 而又如何由可逆變到不可逆? 蘇東坡赤壁賦裡面就有講到 : 有變有不變, 有可逆有不可逆。熱力學定律是不可逆的。熱量是由溫度高的地方流向溫度低的地方; 這是不可逆的。所以 Boltzmann 說的是 : 我要從可逆的物理理論, 導出一個不可逆的物理理論。這個事情想起來應該不可能。

另外還有一個困難 : 原子是離散的, 是一粒一粒的。但是我們談到流體的時候, 譬如風從這邊往那邊吹, 這邊壓力高一點、那邊低一點, 講的是連續體。由離散到連續, 由可逆到不可逆, 其中過程必然非常地不明顯。這過程必然非常困難。Boltzmann 用的方法, 我剛已經稍微提一下, 就是把機率、平均的概念應用到物理。當然, 機率、平均的概念一直都有, 但是真正明確把它應用到物理上, 且得到明顯的結果, 首推 Boltzmann。他用兩個平均, 第一個平均是由離散到連續, 叫做分配函數。第二個平均是由分配函數到流體的壓力與溫度等宏觀的量。這兩個平均

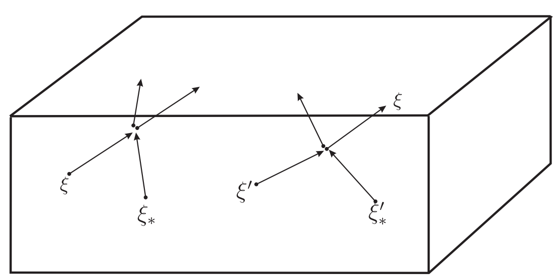
是很深奧的事情, 我現在設法說一下。



左圖裡, 這個房間是整個空間。我們在這個空間裡面找到一個小小的長方體。這個長方體非常小, 多小呢? 就是我們的顯微鏡、我們量溫度, 能夠到達的最小尺度。這個尺度雖然非常小, 我們用電子顯微鏡可以觀察更小的一區。但不管多小的一個區域, 裡面的原子都非常之多; 在這裡面分子碰來碰去, 遵循牛頓力學。這個方塊的位置我叫它爲 $\vec{x}$。(這樣講有點含糊, 因爲如果這個地方是 $\vec{x}$ 的話, 那麼另外一個端點就不是 $\vec{x}$ 了。不過在我們實驗能夠達到的精確度之內, 這個方塊其實是一點。) 這裡面有很多的分子, 每一個分子都有一個速度 ξ。Boltzmann 想描述小小方塊裡的粒子狀態; 他用 $f(\vec{x},\xi)$ 表示這個狀態。$f(\vec{x},\xi)$ 是什麼? 就是在 $\vec{x}$ 這個位置, 它有多少分子速度是 ξ。所以這是一個函數, 對不同的 ξ, $f(\vec{x},\xi)$ 有不同的值。可能有多一點分子速度在這個方向, 比較少一點分子速度在另一方向; 多一點少一點, 就用 f 來表示。這函數 f 概略地描述了微觀的狀況; 如果你真正進去這個小小的長方體裡面, 想確切知道每個分子的動向, 那麼用上面的 f 來表示是不精確的, 不過這就是一個平均, 是第一個平均。如果要看看這個方塊裡面空氣的密度, 你就說 : 可以啊, 我把所有這些 ξ, 不管它是大大小小都加起來。把 ξ 都加起來, 得到的就是這方塊裡面有多少原子, 就是我們一般所謂的密度。這是第二個平均, 描述宏觀狀態。就是把分配函數的 ξ 都加起來。如果你讀了微積分, 你就說 : 我把它積分, 積起來。

這是一個很大的觀念。這個觀念裡面有一個很重要的物理現實。就是我們觀察一件事情時, 譬如以前量溫度, 把溫度計放你嘴巴裡面, 不是量嘴裡一點的溫度, 是那一點附近的溫度。

現在來看剛剛那一個小小方塊, 我把它放大, 但你記住這是很小一個方塊。我現在要導 Boltzmann 方程。我們現在來看看, 到底分配函數 f 隨著時間的變化量是什麼? $\Delta_t f$ 就是 f 隨時間的變化量。f 隨著時間變化會增加會減少, 這是什麼意思? 這是說 : 這小小方塊有個粒子的速度是 ξ, 它有很多同伴速度也是 ξ。這些同伴的個數有時會增加, 有時會減少。圖



中有一個速度本來和你同是 ξ 的粒子, 它跟別的粒子碰之後速度再也不是 ξ; 這是「失」, 因爲碰撞使得速度在這方向的粒子變少。但它也會變得較大; 有時兩個分子速度都不是 ξ, 但碰撞之後其中一個的速度變成 ξ, 這是「得」。f 的變化量就是「得」$f(\vec{x},\xi')f(\vec{x},\xi'_*)$ 減掉「失」$f(\vec{x},\xi)f(\vec{x},\xi_*)$; 來碰的粒子的速度可以來自四面八方, 所以要把它們加起來, 這 $\sum$ 就是加起來的意思。總體的「得」、總體的「失」, 全部加起來就是這個分配函數隨著時間的增減。

$$\Delta_t f(\vec{x},\xi)=\sum_{\xi_*}[f(\vec{x},\xi')f(\vec{x},\xi'_*)-f(\vec{x},\xi)f(\vec{x},\xi_*)],$$

這是 Boltzmann equation。

我必須說, 這是一個很困難的題目, 現在講的幾個觀念都是劃時代的觀念, 所以你沒有完全聽懂的話, 是一件自然的事情。現在我們來看看方塊裡面怎麼碰撞。在這裡面碰撞, 就像撞球那麼碰撞, 遵循牛頓力學。Boltzmann 方程會有一個限制, 因爲它的碰撞遵循牛頓力學, 所以質量、動量不會改變。不會因爲碰來碰去而忽然變熱、變冷, 不會, 能量、動量不會改變。可是有一天 Boltzmann 突發奇想, 他說我要來用看看 log 函數, 這就產生了物理上的革命。log 函數的出現相當晚近。各位可能有學過 log 函數, 但是可能有一些人已經不太清楚 log 函數是怎麼運作, 所以我現在稍微複習一下, 很快地告訴你什麼是 log 函數。首先, log 函數是次方的反函數：

$$m^x=a;\quad \log_m a=x.$$

函數我們把這個東西拿到那邊, 反函數就從那邊拿回來。次方函數是什麼? 例如說2的3次方是什麼? 2^3 是 3 個 2 乘在一起, 2^4 次方是 4 個 2 乘在一起。現在把 2 的 3 次方乘上 2 的 4 次方, 就是 3 個 2 乘在一起後, 又有 4 個 2 乘在一起, 所以一共有 7 個 2 乘在一起：

$$2^3\times 2^4=2^{(3+4)}$$

我不知道你學的時候, 有沒有覺得很驚訝; 我常常搞糊塗, 爲什麼呢? 因爲左邊是乘, 而右邊是加; 一邊是乘, 一邊是加。log 是反函數, 因此有一個特殊性質：這邊是加, 那邊是乘。所以 $\log a+\log b$, 不是 $\log(a+b)$, 是 $\log(ab)$：

$$\log_m a+\log_m b=\log_m ab.$$

我們數學家會問：天下還沒有其他的函數把加變乘。數學可以證明：沒有了, log 是唯一這樣一個函數。所以這個性質 uniquely characterize log 函數, 沒別的函數會如此; 這個美妙的 log 函數!

Boltzmann 有一天想起：把這個 Boltzmann 方程上面乘上一個 log。我問了很多人爲什麼 Boltzmann 會想到 log, 有人是跟我說訊息理論裡面有 log, 統計力學裡面有 log 等等。但是訊息理論、統計力學都是跟著 Boltzmann 腳步, 是之後的事。Boltzmann 最早發現 log 的美

妙。我聽過的最好的一個答案, 是做統計力學做了一輩子的 Joe Lebowitz 說的：Boltzmann 一定試過很多方法, 都沒有 log 好。我們現在就把

$$\Delta_t f(\vec{x},\xi) = \sum_{\xi_*}[f(\vec{x},\xi')f(\vec{x},\xi'_*) - f(\vec{x},\xi)f(\vec{x},\xi_*)] = \sum_{\xi_*}[ff_* - f'f'_*]$$

乘上 $\log f$; 等號右邊、左邊都乘 $\log f$:

$$\begin{aligned}\Delta_t f\log f &= \sum_{\xi}\sum_{\xi_*}[ff_* - f'f'_*]\log f\\ &= \frac{1}{4}\sum_{\xi}\sum_{\xi_*}[ff_* - f'f'_*][\log f + \log f_* - \log f' - \log f'_*]\end{aligned}$$

第二個等號是因爲牛頓力學的對稱性：你把它乘 $\log f$ 事實上就等於乘 $\log f_*$, 也等於乘負的 $\log f'$, 也等於乘負的 $\log f'_*$, 牛頓力學有這個性質。(嚴格來說, 這裡有個四分之一; 因爲原來只有一個 $\log f$, 現在有四個, 所以有四分之一。) 現在 log 的美妙就出來了; log 加 log 是什麼? 相乘：

$$\begin{aligned}\Delta_t f\log f &= \frac{1}{4}\sum_{\xi}\sum_{\xi_*}[ff_* - f'f'_*][\log f + \log f_* - \log f' - \log f'_*]\\ &= \frac{1}{4}\sum_{\xi}\sum_{\xi_*}[ff_* - f'f'_*][\log ff_* - \log f'f'_*] \le 0;\end{aligned}$$

你可以看出來：log 美妙的性質會使這個方程式變成不等式, 小於等於 0, 因爲第一項是 ff_* 減 $f'f'_*$, 第二項是 $\log ff_*$ 減 $\log f'f'_*$, 而 log 是一個遞增函數, 所以兩項相乘小於等於 0。Boltzmann 導出這個式子的時候, 整個物理學界震驚起來：原來 Boltzmann 方程有不尋常處, 爲什麼不尋常呢? 這方程說 $f\log f$ 隨著時間變化減少, 因爲它變化量小於等於 0。一個東西隨著時間減少, 就再也回不去了; 這是不可逆的反應, 這個 log 方程告訴我們這是不可逆的, 一直減少。這是

Boltzmann H **定理**：$\sum_{\xi} f\log f$ 隨著時間遞減, 是不可逆現象。

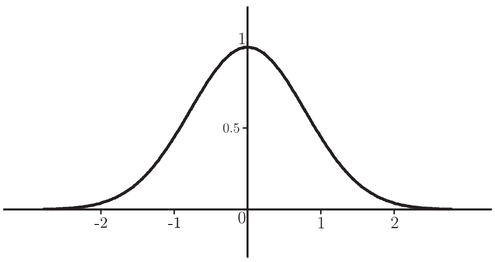
Boltzmann 導出這個不可逆的事情之後, 很多人反對, 他們說： 你當初看的是分子怎麼碰撞, 這是可逆的, 但是竟然導出一個方程是不可逆的。Boltzmann 花了很多年, 整天解釋說這是沒有錯的、我這是有道理的, 爲什麼呢? 因爲我引進了機率; 另外, 熱力學第二定律等等成功經驗顯示： 初始值在機率上應有特殊性, 分配函數在初始時應存在。不過不管怎樣, 哲學界裡有 Mach 等一干人, 數學界有偉大的數學家 Poincaré 等, 還有科學界、物理學界, 都集體反對 Boltzmann。Boltzmann 雖然不爲所動, 但深受其擾, 這說起來有點悲傷, Boltzmann 最後自殺。但是他不爲所動。Boltzmann 確認自己是對的, 所以他就繼續往前走。他說： 這是不

可逆的, 所以它會一直下降。當它下降到一個平衡狀態的時候, 他把這個平衡狀態算出來, 這個方程名爲

Maxwell-Boltzmann**分配函數**: $f(\xi) = Ae^{-B|\xi|^2}$;

Maxwell 是另外一位偉大的物理學家, 他用一些物理直覺算出方程, 而 Boltzmann 用數學嚴格推導。

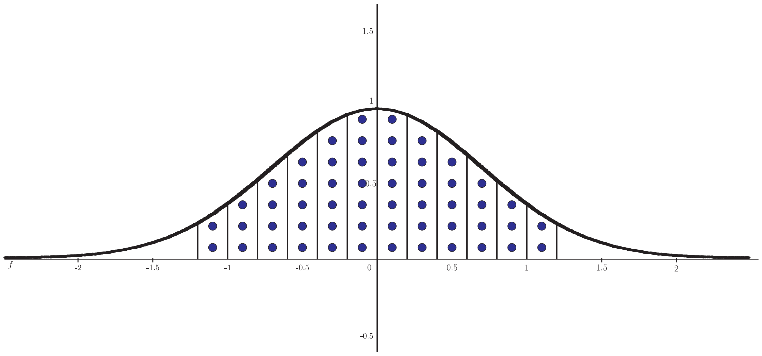
我剛講說 Boltzmann 不爲所動, 他完全是如此, 但是嚴格來說,「可逆會變成不可逆」的這個事實, 到今天科學界還沒有嚴格的論證。這是偉大的數學家 Hilbert 的第六個問題。你記住 Hilbert 第六個問題: 可逆變不可逆; 如果你做出這個問題, 那就不是一個一般的思想。



這是 Maxwell-Boltzmann 分配函數$f(\xi) = Ae^{-B|\xi|^2}$, $A = B = 1$。現在房間的空氣基本上是平衡狀態, 我手掌裡面這一塊空氣, 你說它沒有動, 但是其實它是平均沒有動, 裡面分子動來動去, 有些速度非常大; 如果它不動怎麼會有壓力? 所以它動得非常大, 但是因爲在這房間裡面, 它平均沒有動, 所以大部分的分子其實是集中在中央。ξ 是速度, 所以大部分的分子速度是 0, 有一些是往右邊跑非常快, 但其實非常少, 往左邊跑非常快的也非常少。總之它的分布是這個函數 $f = Ae^{-B|\xi|^2}$; 如果 $|\xi|$ 很大, 因爲 exponential 是負號, 所以量非常少, 但是總有些許; 總是有些空氣跑非常快, 但整塊平均起來是零, 所以你覺得它沒有動, 這是原子論, 和以前的流體力學有很大的不同。Boltzmann 說: 我要來理解這個方程式: 爲什麼最後平衡狀態是這個方程式? 這是 exponential 函數, 它要理解爲什麼會是這個函數。當然我們現在可以說: 你算出來, 數學證明就是這個函數, 但是他要理解這個函數, 什麼叫理解這個函數? 這個事情就是一個哲學上面的課題, Boltzmann 的 conscience。

Boltzmann 提出一個理論, 他說我要設法把熱力學的「熵」找出來, 這一定是因爲「熵」有極大值。我現在給「熵」一個定義。「熵」就是自由度、可能性等等的概念。我們來看看 Boltzmann 說自由度、可能性; 他是在講什麼? 首先把狀態分成有限部分, 以利計算。Boltzmann 說: 先不要有 10^{23} 個粒子, 因爲算不清楚。現在譬如說有 56 個粒子, 我不要說速度可以是 1/2、1/3、7.5, 我就說速度是 1、2、3、4, 我把它量子化。我現在把分子往某一個位置放下去; 你是一個粒子、我是一個粒子, 我可以在這裡、也可以在那裡。如果我在這裡, 就不能有另外一個粒子在這裡。這種選擇顯然不是隨意的, 位置被占了就不能選, 但是總共能有多少這種選擇, 是在排列組合裡面就已經知道的, 就是這個值

$$\frac{56!}{2!3!\cdots 7!7!\cdots 3!2!} \text{ (最多一個洞七個, 最少兩個)。}$$



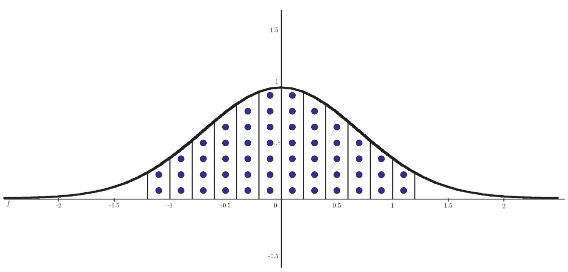
如果現在有 N 的粒子, 第一個洞有 N_1 的粒子, 第二個洞有 N_2 的粒子, $\cdots$, 第十二個洞有 N_{12} 的粒子, 那麼它的可能分配方式, 亦即自由度, 就是這個量：

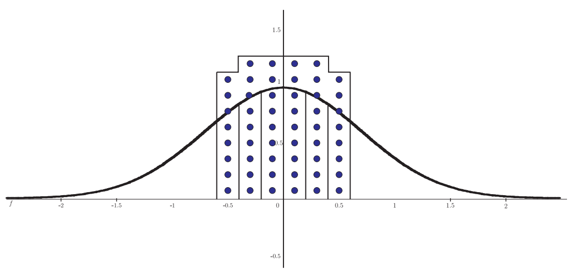
$$\frac{N!}{N_1!N_2!\cdots N_{11}!N_{12}!}.$$

Boltzmann 說：如果我定義「熵」為這個自由度的話, 就會得到剛剛那個方程。他的主要想法是： 經過無數碰撞, 粒子應分佈到各個速度。因此, Maxwell-Boltzmann 分配函數應該是讓粒子有最多選擇的分配方式。譬如現在來看下圖的範例, 左邊有三個 9, 右邊有兩個 8, 選擇性是 $\frac{56!}{8!9!9!9!9!8!}$, 選擇性變少了：

$$W=\frac{56!}{2!3!\cdots 7!7!\cdots 3!2!}>W'=\frac{56!}{8!9!9!9!9!8!}.$$

最大的選擇性是什麼? 就是 exponential 方程。





如果我們現在有N的粒子, 粒子有好幾個位置、能階可以放。如果宏觀狀態為 $i=1,2,\ldots$, 而第 i 個宏觀狀態的粒子個數為 N_i, 那麼粒子有多少放置方式的自由度? 就是這個量

$$W=\frac{N!}{\prod N_i!}.$$

他說這個量就是自由度, 自然界會讓這個自由度最終聚集到此最大值, 所以他決定了： 這個量 W 量度了熵。但是 Boltzmann 又放個 log 上去：

$$熵\ S=k_B\log W;\quad k_B\ :\ \text{Boltzmann 常數},$$

是即 Boltzmann 熵方程。放 log 的目的事實上很明顯, 我不想講太多。譬如說你這邊現在有些白的粒子、有些黑的粒子, 白的粒子它有它的自由度, 黑的粒子有它的自由度, 如果白的熵跟黑的熵合起來看, 關係應該是 : 合起來看的熵是個別熵加起來, 因爲我們有 $\log(ab) = \log a + \log b$。(註 : 講完後, 一位同學問說 : 如果把 56 個粒子各放在不同位子, 那麼就有 56! 的自由度, 比以上的自由度更多。這個問題極好, 可惜沒在講的時候即時提出, 因爲這個問題指出, 我忽略了一個重要的一點, 就是這些粒子的分佈不能隨意, 總能量必須要和函數 $f = Ae^{-B|\xi|^2}$ 的總能量相等。把 56 個粒子各放在不同位子時, 速度大的粒子太多, 總能量會變大很多。)

Boltzmann 熵方程 : $S = k_B \log W$ 是統計力學的根本, 所以大家說 Boltzmann 是統計力學之父 (father of statistical mechanics)。之後 Planck 要研究黑體輻射, 怎麼算也算不出來, 怎麼想都想不通, 最後他想說去跟 Boltzmann 學學, 分割出有限個能階, 我們叫它作量子化。這麼一量子化之後, Planck 可以解釋黑體輻射了, 也開啟了量子力學。所以有人稱 Boltzmann 爲量子力學之祖 (grandfather of quantum mechanics)。Planck 是量子力學的開山祖師, 他非常感念 Boltzmann, 把 Boltzmann 的墳墓移了地方, 重新再做過。這是 Planck 設計的 Boltzmann 墳墓, 刻上這個方程 $S = k \log W$。物理上有幾個重要的方程, 我等一下會再說到幾個; Boltzmann 方程是非常重要的方程。我等一下會回到 Boltzmann。

屈原

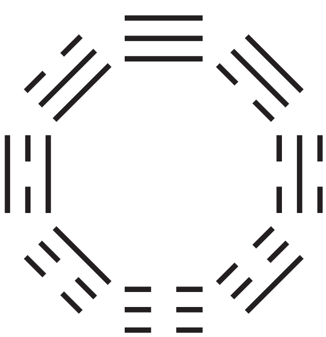
Boltzmann 是 1906 年在 Trieste 過世的。我的老朋友 Stefano Bianchini 在 Trieste 的高等研究院 SISSA 任職, 他跟我說 : Boltzmann 在 Trieste 過世, 過了一百年, 我在良心上告訴我一定要有一個 conference, 於是提議我們來組織一個 conference, 我倆就組織了一個 conference, 請了幾個重要的人物去。開會聽演講時, 我很自然地想起另外一個人, 跟 Boltzmann 很相似, 但出生在兩千多年前, 就是東方最偉大的詩人屈原。屈原是東方最偉大的詩人。我聽過一位研究文學的教授說 : 把李白、杜甫加起來才勉強是屈原, 但是屈原不止於此。屈原所以偉大, 我感覺一個重要的因素, 是屈原對自然的「真」非常堅持。我現在來談屈原對自然的「真」。屈原有兩本最重要的書, 一是離騷, 一是天問 (司馬遷在史記所言。) 天問在學術界一直是困難的書, 裡面問了一百七十幾個問題, 我現取幾個問題。最前面兩個他用來開宗明義。「遂古之初, 誰傳道之?」在很古老一個開始了開天闢地的時候, 是誰告訴我們說要怎樣?「上下


(a) Boltzmann (1844~1906)　(b) 屈原 (340~ 278BC.)

未形, 何由考之?」那個時候渾渾噩噩, 你怎麼有辦法去看是怎樣? 他不接受古代的理論, 直接問這個問題。底下這個問題是「東流不溢, 孰知其故?」所有的百川大河都往東流, 但是爲什麼海都不會滿起來? 這是一個很簡單、很直接、很根本的問題。很簡單、很直接的問題, 有時候我們因爲受太多的教育、讀太多的書而提不出來。屈原問這個問題, 已經讓我們知道屈原是一位偉大的科學家, 因爲在科學上最重要的, 不是解決問題, 而是問了重要的問題。以下兩個問題, 一個是政治、一個是宗教。「登立爲帝, 孰道尚之?」他說的帝王, 有人說是女媧, 有人說是伏羲; 他變成帝王是根據哪一部憲法? 這個問題我們現在還在問。「女媧有體, 孰制匠之?」女媧創造天地的形狀、萬物的形狀, 但是女媧自己也有形狀啊! 是誰製作女媧的形狀? 所有的宗教都會問這個問題。在這裡「自然之真」非常的深刻。經過兩千多年, 每次我們看到屈原的詩, 都感覺它們非常的真誠、非常的強烈。我想屈原的「詩的美」的重要因素, 就是他是從真開始。

Boltzmann 陳述了數學之美、物理之眞, 屈原表達了自然之眞、詩之美。

屈原沒用到數學, 不過在屈原的時代, 東方數學已經出現, 而且被當成很重要的文化元素,



八卦是什麼? 我現在把實線作爲 0, 把虛線當作 1。頂端三條實線就是 (0、0、0), 而後從左邊開始, 有 (1、0、0), (0、1、0), 到最下方有 (1、1、0); 然後我們再從右邊開始, 有 (0、0、1), 到最底下是 (1、1、1)。這是八卦。八卦是什麼? 它是二進位, 而因爲它有三條線, 所以是二的三次方, 所以有八個。八卦有什麼好處呢? 八卦正中央有一個座標系統, 我們很多東西就可以放在那裡來描述, 最簡單就是方位南、東南、東、東北、西南、西、西北、北。但是我也可以把動物放進去：馬、羊、雉、

龍、雞、豬、狗、牛。我也可以放人文的事情 : 父、少女、中女、長男、長女、中男、少男、女, 沒生太多小孩的話都可以放進去。但是也可以深入人體, 放進去腦、肺、膽囊、心、肝、腎、胃、脾。放入八卦方位之後, 可以對不同的東西做運算, 於是就產生學說, 譬如中醫。八卦主要就是一個數學語言、一個載具, 可以把東西放進去做運算。

漢朝的時候因爲社會更複雜了, 帝國變大了, 董仲舒 (179B.C∼104B.C.) 認爲二進位已經不夠用了, 要做三進位、四進位, 所以就有一個理論出來, 說我們這個皇帝任用官員的時候, 有「三公、九卿、二十七大夫、八十一元士、凡一百二十人, 而列臣備矣」, 重要的官員就是這幾個。爲什麼是這幾個呢? 這是有道理的, 因爲這三跟九是什麼? $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, 這就是三進位。但爲什麼有公、卿、大夫、元士四個官位? 董仲舒說 :「三人而爲一選, 儀於三月而爲一時也」, 就是說春、夏、秋、冬各有三個月, 那麼爲什麼有四個官位呢? 因爲「四選而止, 儀於四時而終也」; 一年有春、夏、秋、冬四時。那麼爲什麼要做這些事情呢? 因爲在做這些政治上的安排的時候, 要跟自然界做一個連結。爲什麼要跟自然界做一個連結? 因爲皇帝是天子, 皇帝的權力是天地給他的, 所以他做的事情要與天地連在一起, 天人合一。於是數學變成一個工具, 除了是一個語言及載體之外, 給了統治者權威性。雖然說用的是數學, 但是跟現在我們認爲的「數學的真」比較有點不一樣。

很多人都說屈原是愛國詩人, 這句話說雖然錯誤不大, 不過卻把屈原看淺、看窄了。我想屈原的憂心不是因爲楚國, 他憂心的是南方文化。屈原的詩是非常美的, 他的文采非常繽紛, 他的想像非常豐富, 我們看離騷上天入地。他的思想非常的理性; 當時南方還有莊子, 邏輯思考都非常嚴謹, 而我們剛剛看到屈原問問題非常直接。他最後投汨羅江, 我想他憂心的是, 南方文化會消失。遺憾的是, 從秦、漢以來, 東方大帝國建立, 南方文化未能充分發展。所以屈原的憂心, 變成屈原和我們大家的遺憾, 一直到今天。

光電效應、布朗運動、再談 Boltzmann

聯合國的文教基金會定訂公元 2005 年爲世界物理年, 台北 101 也跟著慶祝, 寫上 $E = mc^2$。爲什麼 2005 年是世界物理年? 因爲在一百年前的 1905 年, 愛因斯坦發表四篇重要的論文, 聯合國因此而把 2005 年定爲世界物理年。這四篇論文分別研究光電效應、布朗運動、狹義相對論及 $E = mc^2$。相較於後兩篇論文, 物理學家一般認爲前面兩篇文章的意義更深刻、更重要, 這兩篇文章都和 Boltzmann 有關係, 我現在稍微說一下。

第一篇文章探討光電效應。光電效應真是有用, 電視就是源自光電效應。愛因斯坦拿諾貝爾獎的緣由是光電效

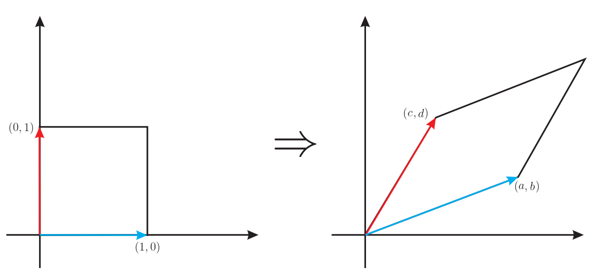
應。他用光電效應找出 Planck 常數。Planck 從 Boltzmann 那裡借來想法, 把能階離散化, 這是一種方便。愛因斯坦研究光電效應, 找出 Planck 常數, 證實量子論不是物理的方便, 而是物理的真實。

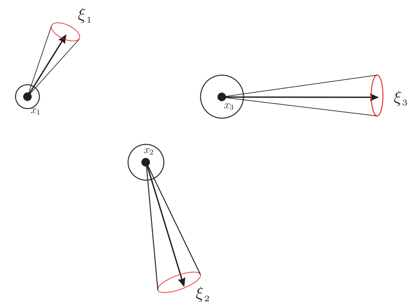
第二篇文章講布朗運動。Brown 是英國植物學家, 他用顯微鏡觀察花粉運動, 嚇了一跳, 這些花粉會動? 這花粉像動物一樣會動! 它跑來跑去, 但是它的動是不規則的動。原來花粉會動不是因爲它有生命力, 是因爲旁邊的粒子一直去碰它。但是這種碰撞是機率性的, 所以花粉像我們喝醉時那樣動, 並沒有一定的規律, 是一個隨機的過程。即便如此, 花粉運動會慢慢散出去, 擴散係數可以用顯微鏡觀察出來。愛因斯坦利用 Boltzmann 計算空氣粒子的碰撞的數學方法, 把碰撞花粉的原子個數, 與花粉飄動的擴散係數, 用一個方程連結在一起。而因爲用顯微鏡就可以看出擴散係數, 所以你可以用此理論算出原子的個數。法國人 Perrin 在 1908 年做實驗, 在花粉旁邊放不同的氣體, 按照愛因斯坦的方程, 去計算氣體裡面到底有多少分子。結果這與氣體無關, 氧氣是 6.022×10^{23}, 氫氣也是 6.022×10^{23}。早期的亞佛加厥說有這個常數, 他是對的。確定此常數存在後, 就證實真的是有原子; 這不是 Boltzmann 的信念, 而是真的是有原子。原子這個東西, 很多人反對。Maxwell 是一位偉大的物理學家, 也導出 Boltzmann 方程, 但是他說原子是一個方便, 不是真的, 不要把它當真。但 Boltzmann 把它當真。Perrin 做這個實驗之後, 證實果然有原子。可惜啊, 當時 Boltzmann 已經去世了兩年。(至今還沒人看過原子。如果要孤立原子看它什麼走, 要看朱棣文 (Steven Chu) 用雷射慢慢把它冷卻下來, 讓它做出一個 S; 這是他在 Stanford 的時候做的。但要真的看到原子, 是不可能的事情, 它非常的小。)

相空間 (phase space)

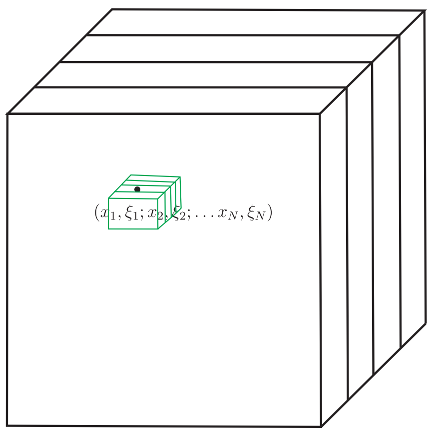
再談一下數學如何做爲載體、語言。在美國上大學的時候要考兩個語言, 一是英文, 一是數學。數學做爲一個語言, 是科學上的必要。所以我說有兩種人, 不是黑人白人, 也不是男人女人, 也不是胖的瘦的。不是, 就兩種人：一種人有基本數學知識, 一種沒有。你最好是有基本數學知識的那種人。

我現在稍微說一下數學的語言。我說一下線性代數。矩陣是一個代數式子, 但是它也可以陳述幾何轉換, 譬如說它可以把正方形變成平行四邊形。它也可以拿來運算; 矩陣可以相乘, 是把矩陣所代表的幾何轉換, 變成另外一個幾何轉換。它也可當成紀錄：$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 說西北方的數值是 a, 東南方的數值是 d 等等。譬如說你現在有個倉庫, 你要計算、要問這倉庫裡有什麼東西, 矩陣就能派上用場。





Boltzmann 也創造了一個數學語言, 這是非常重大的一件事情, 就是相空間 (phase space)。你要稍微靜下心來聽我說說。這是很奇妙的。現在這個房間有 10^{23} 個粒子, 每一個粒子都有位置、速度, 其中一個粒子的位置是 x_1, 速度是 ξ_1, 其它粒子也各有其位置、速度。現在只看第一個粒子, 它四面八方跑, 跟別的粒子碰來碰去。這第一個粒子, 會不會有朝一日又回到它原來出生地的附近? 數學上可以證明 : 這個多半是可以的。爲什麼? 因爲既然它到處亂跑, 怎麼會一直躲開它家附近呢? 那可能性太小了。我們再問另外一個問題 : 會不會有朝一日, 可能在不遠的將來, 不但第一個粒子回到它家附近, 第二個粒子也回到自家附近, 第三個粒子、第 10^{23} 個粒子也都回到自家附近。同一個時間, 大家都回到自家附近, 這個想起來有一點困難, 是吧? 不過 Boltzmann 說這件事情容易解決。我們來看相空間, 把原來的這個房間擴大成一個很大的空間



$$\{(x_1,\xi_1;x_2,\xi_2;\ldots x_N,\xi_N),\ N=10^{23}\}.$$

空間擴大之後, 整體現狀成爲定義在空間 $\mathbb{R}^{6N}$ 中的一點; 只有一點。只有一點而已, 整個現狀變成只是一個粒子。於是, 就如同我們剛剛只考慮一個粒子的位置, 這粒子終究要回來, 不可能都在外面, 一直躲開這一點到處亂跳不回來家附近。所以, 這個相空間告訴我們, 所有的粒子有朝一日都同時一起回到它們各自的家。這數學語言真是非常的奇妙。

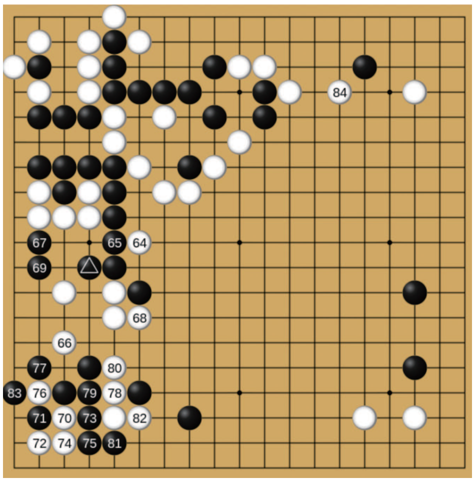
我們進一步問 : 可不可能有個時候, 所有 N 個粒子回到原始出發地 $x_i, i=1,2,\ldots,N$, 附近, 並且速度也回到初始速度 $\xi_i, i=1,2,\ldots,N$, 附近? 會的, 我們知道這情況終究會發生。

圍棋、人工智慧

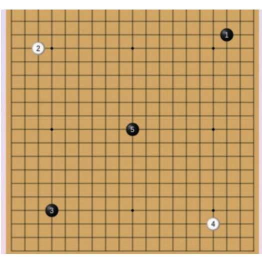
我現在來講棋盤, 縱橫十九道。圍棋的規則非常簡單。這是我歸納的一個規矩 : 除非你讓對方同時閉氣, 你閉氣對方也閉氣, 你沒有辦法呼吸, 對方也不能呼吸, 你一下下去之後對方就死, 你就把他拿下; 但是如果你自己閉氣, 對方不閉氣, 就不能下, 這是自殺。這是圍棋唯一的規矩。既然這規矩這麼簡單, 圍棋的可能性就非常之大。但是圍棋是什麼樣的活動呢? 論語裡面有一句話 :「飽食終日無所用心, 難以哉! 不有博弈者乎? 爲之猶賢乎已。」下圍棋算是個好事; 你整天沒事做的話, 對你自己不太好, 可能對別人也有不好的影響, 所以還不如下圍棋, 那還好些。明末把琴棋書畫並列, 圍棋是四藝之一, 所以那個時候圍棋基本上是一個遊戲。到了日本江

戶時代, 有了更大的架構, 豪族各設了碁所, 之間相互競爭, 圍棋的進展非常之大。義大利文藝復興就是這樣：我們這個城的人知道怎麼解三次方, 不告訴人家。我們這個城的人會做什麼數學, 你們那個城的不會做, 互相競爭, 於是近代的數學就從義大利出發。

圍棋是從十七道 ($17 \times 17 = 289$ 個交叉點) 變到十九道 ($19 \times 19 = 361$個交叉點)。並不確知十七道變爲十九道是什麼時候發生, 大概是在南北朝。十七道與十九道的差別在哪裡? 下圍棋的人呢, 覺得兩者有很大的一個差距; 因爲十七道與十九道各有 361! 和 289! 可能的下法, 差別非常之大。兩千年來, 古聖先賢殫精竭慮於圍棋, 培養直覺, 圍棋這個遊戲因此變成非常深奧。



我現在就舉兩個例子, 來說明圍棋天地之廣大。圍棋有兩位棋聖。先有道策 (1645~1702), 後有吳清源 (1914~2014)。道策不僅加深圍棋的定性研究, 還做了定量分析。下圍棋剛起頭時, 第一件事情要做包圍, 如果被包圍住了, 就希望趕快脫身。但是道策說不要如此, 你一定要定性、定量去分析。圖中白棋是道策的, 黑棋是安井知哲的。在某個時刻, 白棋下 64 這個子, 黑棋很明顯要下 65, 因爲要把 64 跟左邊另外五個白子隔絕。道策說：我就讓你隔絕; 我不但讓你隔絕, 而且又下了子 66, 讓它完完整整地被隔絕。所以他棄子, 把這五個子丟掉了。下圍棋的時候有危險不能叼住棋子。他不但棄子, 連左下方角落都棄了。角落一棄之後, 黑棋就高興了, 把左下角落也拿下來。但當此之時, 白棋做了兩件事情。第一件事是在外面築了一道隱約的牆壁, 特別是子 82。然後他又得到先手。所以下了子 84。現在就很難說得失了。到底丟掉的東西、得到的東西是什麼? 這就是手割, 他要去算, 這就是數學了。但他下了這個子之後, 隱約有了一個外勢。他取得這個外勢。他取得外勢的緣故, 是因爲他犧牲了另兩部分。這是道策的一個名局; 他非常宏觀地去看圍棋, 而且非常定量地去看。



第二位棋聖是吳清源。當時日本的圍棋取得很高的成就, 日本的棋界覺得, 爲了圍棋的發展, 應該要到別的地方找好的圍棋高手, 請來這裡跟大家琢磨。他們就到中國去找, 找到吳清源。有人陪吳清源到日本來, 日本的棋院院長跑到火車站去接吳清源。當時吳清源是才十幾歲的一個小孩, 所以他們對圍棋鄭重的程度真是不可思議。吳清源和他們

最重要的、最好的棋手秀哉名人下棋, 從 1933 年 10 月 16 日下到 1934 年 1 月 19 日。吳清源是 1914 年生, 所以那時是 19 歲, 但他可是天不怕地不怕。你看他怎麼下。他持黑棋, 先下兩個角落, 秀哉名人也下兩個角落。爲什麼下兩個角落? 圍棋都從角落下, 因爲角落旁邊就是圍牆, 在這邊做個家比較方便。可是吳清源嚇了大家一跳, 他第三子下在正中央。這正中央可是無邊無際的, 但是吳清源說 : 圍棋是天地廣大, 何處都可爲家。他這宏觀的想法, 大大擴展了圍棋的世界。
(註 : 這時數學所所長程舜仁問 : 結果吳清源贏了沒有? 這盤棋被稱爲世紀名局, 吳清源一路領先, 但在中盤時, 秀哉名人下了大家意想之外的一手妙棋。因爲名人可以隨時打掛, 和他人討論, 因之有些議論。終局吳清源小輸。)

我們現在要討論 AI, 就是人工智慧。IBM 有個 Deep Blue, 起初先去試西洋棋。西洋棋也很困難。如果成爲西洋棋的 grandmaster, 書上是會記載的。下棋的都知道有幾個 grandmaster。西洋棋雖然也很困難。不過比圍棋要容易得多。所以 Deep Blue 做 AI 的時候, 基本上用強力的計算, 把所有可能性都算出來, 再決定最好的下法。這樣做的好處是能打贏所有棋手。壞處是你沒有從裡面學到任何東西。就只是勤奮而已, 而不是因爲你聰明。但圍棋的可能性太多了, 所以計算機必須要像歷代圍棋高手一樣培養直覺。什麼叫做直覺, 我這邊隨便給了一個建議 : 在幾乎是無窮的可能, 充滿不確定的情況下, 通過長期的經驗, 能夠判別各種可能的優劣, 而得以做出合理、機率性的論斷。你自己也不完全確定做的判斷, 做的是機率性的判斷。如果要迎戰圍棋, 就要按照這類想法來做人工智慧, 讓計算機自己去培養直覺。

這裡有一個要點; 我要強調的是 : 圍棋在這裡面的角色是什麼? 因爲圍棋非常之困難。所以它爲人工智慧提供了一個試金石。它提供一個機會; 人工智慧努力到一個地步後, 努力到底有沒有成功? 你跟圍棋高手下一下就知道了。人工智慧 AlphaGo 按照棋手的想法, 首先做機率性搜索, 即 Monte Carlo tree search。計算機不能無窮無盡地搜索, 因爲圍棋的可能性比宇宙能夠觀測的原子個數還多。接下來計算機用 neural network 減少不必要的搜索深廣度。同時又建構 value network 來評估現在情勢, 再用 policy network 依情勢決定下一步該怎麼辦。這裡面用了很多的數學, 是我剛剛講的載體、語言。它用了線性代數, 組合學。它也用到最優化來找最好的下一步, 其中用到微積分, 也用到機率論, 還要配合計算機。所以圍棋的困難, 是第一次, 到目前可說是唯一一次, 促進了真正的人工智慧。現在大家在講大數據、算大數據, 我們知道這個東西不是那麼準, 對不對? 我們看美國選舉、台灣選舉, 就知道這些大數據不是很可靠。圍棋是最可靠的。因爲 AI 是和圍棋高手下, 所以是很好的試金石。圍棋的美, 吸引人類歷史上那麼多能人投入, 發展出美妙深入的想法, 而對科學求真的進程產生巨大的促進作用。

我今天就講到這裡, 謝謝。

—本文演講者劉太平任職中央研究院數學研究所—