圓錐截痕的離心率

許明隆

我在家教之餘，對二次曲線的圓錐截痕觀點，始終感覺課本（實驗本）所證的「$e=\sin\theta/\cos\omega$」牽涉許多空間立體的觀念，又無模型可實際觀察，因此總是無法很清楚的了解。所以，我想到一個問題「是否可以利用坐標變換把平面截圓錐所得的曲線標準化？」經過一段時間的研究後，終於解決了這個問題，並證出「$e=\sin\theta/\cos\omega$」。

（一）先介紹一個預備定理

$$S\equiv(O;u_1,u_2)\longrightarrow \text{舊坐標系}$$
$$S'\equiv(O';u_1',u_2')\longrightarrow \text{新坐標系}$$

若 $\begin{cases}\overrightarrow{OO'}=hu_1+ku_2\\ \begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\end{cases}$

則任一點P舊坐標 $(x,y)_s$ 換成新坐標$(x',y')_{s'}$，新舊坐標間存在有如下的關係:

$$(x,y)=(x',y')\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+(h,k)$$

證明:

$$\because\ \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$$

且 $\begin{cases}\overrightarrow{OP}=(x,y)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{OO'}=(h,k)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\end{cases}$

$$\overrightarrow{O'P}=(x',y')\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}=(x',y')\left[\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right]$$
$$=\left[(x',y')\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

代入得

$$(x,y)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=(h,k)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\left[(x',y')\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

消去 $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow(x,y)=(x',y')\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}}_{\text{以下稱“基底變換矩陣”}}+\underbrace{(h,k)}_{\text{以下稱“新原點”}}$$

同理，三度空間坐標亦有類似關係，證明亦同。故可略寫結果如下:

若知 $\begin{cases}\text{新原點 }(\alpha,\beta,\gamma)\\ \text{基底變換矩陣 }\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\end{cases}$

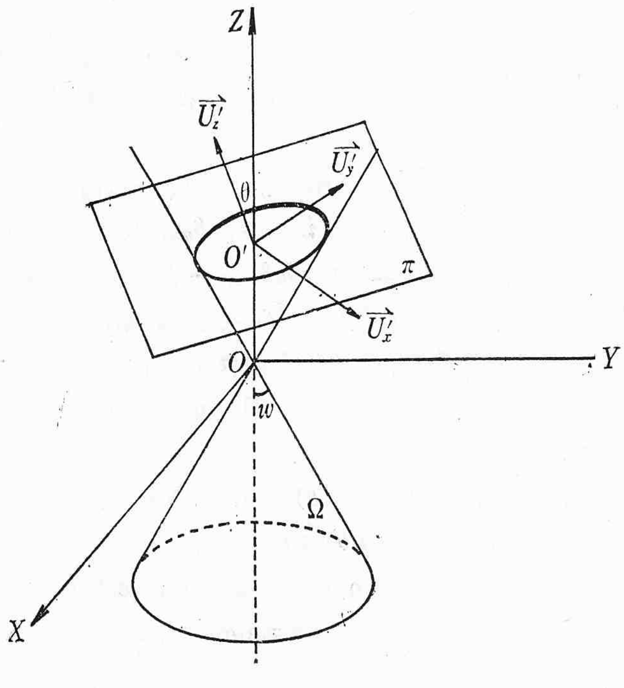
則新舊坐標間有如下關係

$$(x,y,z)=(x',y',z')\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}+(\alpha,\beta,\gamma)$$

（二）舉一例（含標準化過程及 e 值的驗證）

令 $\begin{cases}\text{圓錐 }\Omega\text{ 方程式為 }x^2+y^2=z^2\\ \text{平面 }\pi\text{ 方程式為 }2x-y+3z=3\end{cases}$

求 Ω 被 π 所截出之截痕方程式及 e 值。



我們先用公式求出 e 值留待截痕方程式標準化後，來印證用。

θ 為 π 平面之法向量 $(2,-1,3)$ 與圓錐之軸（可以 $\overrightarrow{OO'}$ $(0,0,1)$ 代表）的夾角

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{2\times 0+(-1)\times 0+3\times 1}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(3)^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

故 $$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$$

而 $$\omega=\frac{\pi}{4}\Longrightarrow\therefore\cos\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad e=\frac{\sin\theta}{\cos\omega}=\frac{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

接著，我們來標準化此截痕:

①先定新原點爲 $(0,0,1)$⟶即平面與圓錐軸之交點。

②取 π 平面之單位法向量爲新坐標系之 z 向

$$\therefore\overrightarrow{u_{z'}}=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{-1}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

取 $\overrightarrow{u_{z'}}$ 與 $\overrightarrow{OO'}$ $(0,0,1)$ 之公垂線方向爲 $\overrightarrow{U_{x'}}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{u_{x'}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},0\right)$$

取 $\overrightarrow{u_{z'}}$ 與 $\overrightarrow{u_{x'}}$ 之公垂線方向 (以右手定則定出: ∵一般空間坐標系 X 軸 Y 軸定出後，Z 軸之正向是用右手定出) 作爲 $\overrightarrow{u_{y'}}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{u_{y'}}=\left(\frac{-6}{\sqrt{70}},\ \frac{3}{\sqrt{70}},\ \frac{5}{\sqrt{70}}\right)$$

因此基底變換矩陣爲

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{-6}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$$

∴由預備定理可得新舊坐標間有如下關係

$$(x,y,z)=(x',y',z')\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{-6}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}+(0,0,1)$$

今要求

$$\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ 2x-y+3z=3\end{cases}$$

之交集

先將此二方程式換成新坐標系之方程式

則變成

$$\begin{cases}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{-6}{\sqrt{70}}y'+\dfrac{2}{\sqrt{14}}z'\right)^2\\ \qquad+\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{3}{\sqrt{70}}y'+\dfrac{-1}{\sqrt{14}}z'\right)^2\\ =\left(\dfrac{5}{\sqrt{70}}y'+\dfrac{3}{\sqrt{14}}z'+1\right)^2\\ z'=0\end{cases}$$

再把 $z'=0$ 代入圓錐之新方程式，得

$$x'^2+\frac{2}{7}y'^2-\frac{\sqrt{70}}{7}y'=1$$

(此乃視 $2x-y+3z=3$ 爲 $x'y'$ 平面而得的方程式)

再簡化之，得

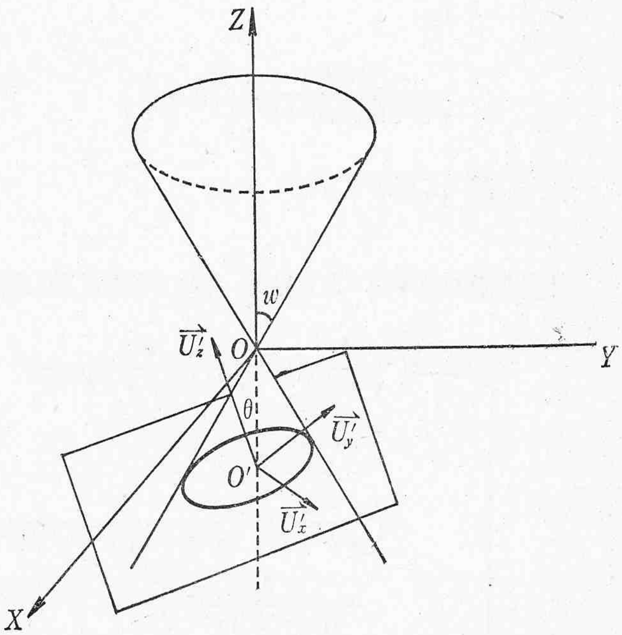
$$\frac{x'^2}{\dfrac{9}{4}}+\frac{\left(y'-\dfrac{\sqrt{70}}{4}\right)^2}{\dfrac{63}{8}}=1$$

$$\therefore\quad a=\sqrt{\frac{63}{8}}\qquad b=\sqrt{\frac{9}{4}}\Longrightarrow c=\sqrt{\frac{45}{8}}$$

故 $$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{\dfrac{45}{8}}}{\sqrt{\dfrac{63}{8}}}=\sqrt{\frac{5}{7}}$$ ⟶與先前公式代出符合

(三) 一般證法

$$\begin{cases}\text{圓錐 }\Omega:\ x^2+y^2=(z\tan\omega)^2\\ \text{平面 }\pi:\ ax+by+cz=k\end{cases}$$



先用公式代出 e 值，供以後驗證。

$$\begin{cases} \theta \text{ 視爲 } (a,b,c) \text{ 與 } (0,0,1) \text{ 之夾角} \\ \therefore \cos\theta=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Longrightarrow \sin\theta=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \therefore\quad e=\dfrac{\sin\theta}{\cos\omega}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\dfrac{1}{\cos\omega} \end{cases}$$

取新原點 $O'(0,0,k/c)$

同例示之取法，取各軸之單位向量如下:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_z'}=\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \\ \overrightarrow{u_x'}=\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right) \\ \overrightarrow{u_y'}=\left(\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\right. \\ \left.\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \dfrac{-(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \end{cases}$$

∴新舊坐標之關係式如下:

$$(x,y,z)=(x',y',z_\prime)\begin{pmatrix} \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & 0 \\ \dfrac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, & \dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, & \dfrac{-(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2b^2+c^2}} \\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, & \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}+\left(0,0\ \frac{k}{c}\right)$$

代入圓錐Ω及平面 π 之方程式，得此二者之新方程式爲

$$\begin{cases} \Omega\Longrightarrow\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x'+\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y'+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z'\right)^2 \\ \quad+\left(\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}x'+\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2+c^2}}y'+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z'\right)^2 \\ \quad=\left(\dfrac{-(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y'+\dfrac{c}{\sqrt{a_z+b^2+c^2}}z'\quad\dfrac{k}{c}\right)^2(\tan\omega)^2 \\ \pi\Longrightarrow z'=0 \end{cases}$$

π 代入 Ω，得

$$x'^2+\frac{[c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega]}{(a^2+b^2+c^2)}y'^2+\frac{2\sqrt{a^2+b^2}\cdot k\cdot\tan^2\omega}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y'-\left(\frac{k}{c}\tan\omega\right)^2=0$$

上式，若

①$c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega=0$

則可化爲

$$x'^2+\frac{2\sqrt{a+b^2}\cdot k\cdot\tan^2\omega}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y'-\left(\frac{k}{c}\tan\omega\right)^2=0$$

必可化爲

$$x'^2=4Cy' \text{（抛物線之標準式）}$$

②$c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega>0$

則可化爲

$$(a^2+b^2+c^2)x'^2+[c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega]y'^2+\frac{2k}{c}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}+c^2\tan^2\omega\cdot y'-\left(\frac{k}{c}\right)^2\tan^2\omega(a^2+b^2+c^2)=0$$

$$\therefore\quad \underbrace{(a^2+b^2+c^2)x'^2}_{\text{正數}}+[c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega]\Bigg(y'+\underbrace{\frac{k\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\tan^2\omega}{c[c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega]}}_{\text{令爲}\alpha}\Bigg)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{k^2(a^2+b^2+c^2)\tan^2\omega}{[c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega]}\right)}_{\text{令爲}\eta}$$

則化成

$$\frac{x'^2}{B^2}+\frac{(y'+\alpha)^2}{A^2}=1 \qquad \text{（橢圓）}$$

其中

$$A^2=\frac{\eta}{c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega},\qquad B^2=\frac{\eta}{(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\therefore c^2=\frac{\eta(a^2+b^2)(1+\tan^2\omega)}{(c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega](a^2+b^2+c)}$$

$$e=\frac{C}{A}=\sqrt{\frac{C^2}{A^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(1+\tan^2\omega)}{(a^2+b^2+c^2)}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2+c^2)\cos^2\omega}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\frac{1}{\cos\omega}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\omega}$$

③$c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega<0$

則化為

$$\underbrace{(a^2+b^2+c^2)}_{\text{正數}}x'^2-\underbrace{[(a^2+b^2)\tan^2\omega-c^2]}_{\text{正數}}\left[y'-\frac{k\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\tan^4\omega}{c[(a^2+b^2)\tan^2w-c^2]}\right]^2$$

$$=-\underbrace{\frac{k^2(a+b^2+c^2)\tan^2\omega}{(a^2+b^2)\tan^2\omega-c^2}}_{\text{負數（即 }\eta\text{）}}$$

故化為

$$-\frac{x_{\prime}^2}{\frac{(-\eta)}{a^2+b^2+c^2}}+\frac{(y'+\alpha)^2}{\frac{(-\eta)}{(a^2+b^2)\tan^2\omega-c^2}}=1\ (\text{雙曲線})$$

$$\therefore A^2=\frac{(-\eta)}{(a^2+b^2)\tan^2\omega-c^2},\ B^2=\frac{(-\eta)}{(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\Longrightarrow C^2=A^2+B^2=\frac{(-\eta)(a^2+b^2)(1+\tan^2\omega)}{(a^2+b^2+c^2)[(a^2+b^2)\tan^2\omega-c^2]}$$

$$e=\sqrt{\frac{C^2}{A^2}}=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(1+\tan^2\omega)}{(a^2+b^2+c^2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2)}}{(a^2+b^2+c^2)}\quad\frac{1}{\cos\omega}=\frac{\sin\theta}{\cos\omega}$$

故可證得 $e=\dfrac{\sin\theta}{\cos\omega}$

另外，

$$\begin{cases} c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega=0 & & \dfrac{\sin\theta}{\cos\omega}=1 & \\ c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega>0 & \text{分別} & \dfrac{\sin\theta}{\cos\omega}<1 & \text{同義。} \\ c^2-(a^2+b^2)\tan^2\omega<0 & & \dfrac{\sin\theta}{\cos\omega}>1 & \end{cases}$$

茲舉一例證之，餘類推

$$\frac{\sin\theta}{\cos\omega}>1\Longleftrightarrow\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\omega}>1$$

$$\Longleftrightarrow\sin^2\theta-\cos^2\omega>0$$

$$\Longleftrightarrow\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}-\cos^2\omega>0$$

$$\Longleftrightarrow(a^2+b^2)-(a^2+b^2+c^2)\cos^2\omega>0$$

$$\Longleftrightarrow(a^2+b^2)(1-\cos^2\omega)-c^2\cos^2\omega>0$$

$$\Longleftrightarrow(a^2+b^2)\sin^2\omega-c^2\cos^2\omega>0$$

$$\Longleftrightarrow(a^2+b^2)\tan^2\omega-c^2>0$$

$$\Longleftrightarrow c^2-(a^2+b^2)\tan^2w<0$$

由於坐標系之適當選取，可使截痕標準化，以了解截出的曲線究竟是什麼，這不是很令人興奮的事嗎？又若有討論到空間中一平面上的問題時，亦可將之轉化為純粹平面上的問題，如此，化三度為二度不是簡單多了嗎？

我有個建議→可把這個坐標變換的方法，放入高中的課程，因說法平實且又可免牽涉立體想像的困擾！

附註一：

我想我寫這篇的主要目的並非在證明 $e=\sin\theta/\cos\omega$ 而主要是要介紹這種標準化的做法。當初的想法是以為，平面上的二次曲線都可經由旋轉或平移而簡化之，為什麼空間的問題不發展類似的方法。於是著手研究，很幸運地，由現成的平面上旋轉，平移的方法獲得很多啓示，終於僥倖成功地推展至三度空間問題的簡化。

附註二：

新舊坐標關係式中

$$(x,y,z)=(x',y',z')\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}+(\alpha,\beta,\gamma)\longrightarrow\text{(A)}$$

適合由已知新坐標要求其舊坐標。

若要反之亦可，可改上式為

$$(x',y',z')=(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}^{-1}\longrightarrow\text{(B)}$$

理論上可以，但是反矩陣計算麻煩多了。

其實，實際上還是(A)式較實用。

例如，用我們剛開始所舉的那個例子而言，我們已得出

$$\frac{x'^2}{\frac{9}{4}}+\frac{\left(y'-\frac{\sqrt{70}}{4}\right)^2}{\frac{63}{8}}$$

之新方程式。

根據此式；很容易可求出

$$\left.\begin{array}{l} C\left(0,\dfrac{\sqrt{70}}{4}\right)\\ V\left(0,\dfrac{\sqrt{70}}{4}\pm\sqrt{\dfrac{63}{8}}\right)\\ F\left(0,\dfrac{\sqrt{70}}{4}\pm\sqrt{\dfrac{45}{8}}\right)\end{array}\right\}z'\ \text{成份省略。}$$

等

再代入(A)式即可得各中心、頂點、焦點之舊坐標，例如求中心C之舊坐標

$$(x, y, z) = \left(0, \frac{\sqrt{70}}{4}, 0\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}, & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-6}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} + (0, 0, 1)$$

$$= \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

另外若想求此橢圓之面積， 亦可很容易求出 。即如此例， 橢圓面積$=ab\pi=\sqrt{a^2b^2\pi}=\sqrt{(9/4)\cdot(63/8)}\pi=9\sqrt{7}\pi/4\sqrt{2}$ 我想這些若不如此做是無法求出的。因以前只能利用 $e=\sin\theta/\cos\omega$ 來判斷是屬於那種類型之二次曲線， 而無法知其究竟有多大，在空間的位置如何?

簡言之，以前只能定性，而現在用了空間坐標變換我們就可定量了，且因已轉化成純粹平面的式子，更使我們容易 handle 這個截痕。

——本文作者現就讀於臺大醫學系

切 圓 系 列

余 文 良

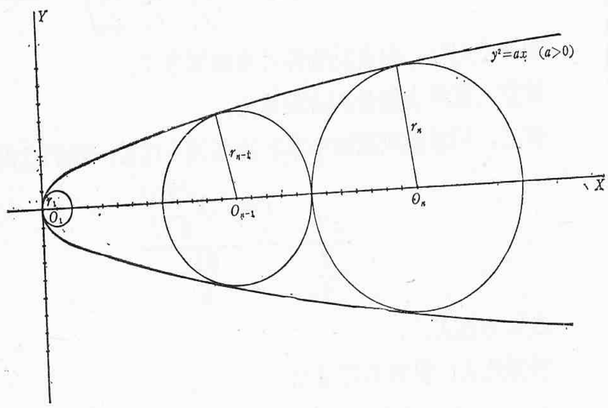
(一)拋物線與內切圓

設①拋物線 $y^2=ax(a>0)$ 外切於圓 $o_i(i=1, 2, 3, \cdots\cdots n, n+1, \cdots\cdots)$。

②圓 O_n 與圓 O_{n+1} 互相外切，$(n\in N)$

③圓 O_i 之圓心坐標 $(O_i, 0)$ (位於 x 軸上)

④圓 O_i 之半徑 r_i。 (如圖一)



則①$|r_{n+1}-r_n|=a$

②$r_n=a\cdot n-a/2$

③$O_n=a\cdot n\cdot(n-1)+a/2$

解:

①先確定第一個圓是否存在:

令圓 O_1 切 $y^2=ax(a>0)$ 於頂點，則$r_1=O_1$。

$$\begin{cases} y^2=ax(a>0) \\ (x-O_1)^2+y^2=r_1{}^2=O_1{}^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+(a-2O_1)x=0$$

$\because$相切於 $(0,0)$，即 $x=0$，$\therefore O_1=a/2=r_1$

②第 $n-1$ 個圓時

$$\begin{cases} y^2=ax(a>0) \\ (x-O_{n-1})^2+y^2=r_{n-1}{}^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+(a2O_{n-1}-r_{n-1}{}^2=0$$

$\because$相切，即切點之 x 坐標相同

$\therefore$判別式 $(-2O_{n-1})^2-4(O_{n-1}{}^2-r_{n-1}{}^2)=0$

$\Rightarrow a^2-4aO_{n-1}+4r_{n-1}{}^2=0 \cdots\cdots(1)$

③第 n 個圓時，同理可得 $a^2-4aO_n{}^2+4r_n{}^2=0 \cdots\cdots(2)$

④$((1)-(2))/4$

$a(O_n-O_{n-1}=r_n{}^2-r_{n-1}{}^2=(r_n+r_{n-1})(r_n-r_{n-1})$

$\because$圓 O_n，圓 O_{n-1} 相外切， 而兩外切圓的圓心距=兩半徑之和。

$\therefore O_n-O_{n-1}=r_n+r_{n-1}$ (參看圖一)

$\Rightarrow r_n-r_{n-1}=a$

⑤

$$\begin{array}{rcl} r_n-r_{n-1} & = & a \\ r_{n-1}-r_{n-2} & = & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ +)\ r_2-r_1 & = & a \\ \hline r^n-r_1 & = & a(n-1) \end{array}$$

$\therefore r_n=r_1+a(n-1)=a\cdot n-a/2$ $(r_1=a/2)$

⑥ $O_n-O_{n-1}=(a\cdot n-a/2)+(a(n-1)-a/2$