# 「階加」及其應用

陳 力 華

## 前 言

如果沒有學過排列組合，「函數個數」將是一個頗爲困難的問題，這裏介紹一個不很聰明的方法——搬纐手指，算一算——，但是卻是一個「老少咸宜」的方法。稍微有點函數觀念就看得懂了。能用些數學歸納法那就更好。

事實上，階加的延伸就是階乘，再過去的就是組合符號，所以這三者是相互關連的。

**定義:** 符號“$\phi$”爲階加符號

$$n\phi = n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+3+2+1$$

如: $3\phi = 3+2+1=6$

$7\phi = 7+6+5+4+3+2+1=28$

**定理 1:** $n\phi=\frac{1}{2}n(n+1)$(展開公式)

**證明:**

$$n\phi=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

利用移位消去法。證明略。

**定義:** 符號 "$\phi\phi$" 爲「連階加符號」

$$n\phi\phi=n\phi+(n-1)\phi+(n-2)\phi+\cdots\cdots+3\phi+2\phi+1\phi$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\phi$$

如:

$$3\phi\phi=3\phi+2\phi+1\phi=6+3+1=10$$

$$\begin{aligned}7\phi\phi&=7\phi+6\phi+5\phi+4\phi+3\phi+2\phi+1\phi\\&=28+21+15+10+6+3+1\\&=84\end{aligned}$$

**定理 2:** $n\phi\phi=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

**證明:**

$$\begin{aligned}n\phi\phi&=\sum_{k=1}^{n}k\phi=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

**定理 3:**

$$\begin{aligned}n\phi\phi&=1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)\\&\quad+\cdots\cdots+r(n-r+1)+\cdots\cdots+n\times 1\end{aligned}$$

(降階公式)

**證明:** $n\phi\phi$

$$\begin{aligned}&=n\phi+(n-1)\phi+(n-2)\phi+\cdots\\&\quad+(n-r+1)\phi+\cdots+3\phi+2\phi+1\phi\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lr}
 & =n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-r+1)+\cdots+3+2+1\\
 & +(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-r+1)+\cdots+3+2+1\\
 & +(n-2)+\cdots+(n-r+1)+\cdots+3+2+1\\
 & \cdots\\
 & +(n-r+1)+\cdots\cdots+3+2+1\\
 & \cdots\cdots\\
 & +2+1\\
+) & +1\\
\hline
\multicolumn{2}{l}{1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots}\\
 & +r(n-r+1)+\cdots+n\times 1
\end{array}$$

故

$$n\phi\phi=\sum_{r=1}^{n}r(n-r+1)$$

**定義:** 符號 "$\phi\phi\phi$" 亦爲「連階加符號」

$$\begin{aligned}&n\phi\phi\phi\\&=n\phi\phi+(n-1)\phi\phi+(n-2)\phi\phi+\cdots\cdots+3\phi\phi+2\phi\phi+1\phi\phi\\&=\sum_{k=1}^{n}k\phi\phi\end{aligned}$$

如:

$$2\phi\phi\phi=2\phi\phi+1\phi\phi=2\phi+1\phi+1\phi=2+1+1+1=5$$

$$\begin{aligned}4\phi\phi\phi&=4\phi\phi+3\phi\phi+2\phi\phi+1\phi\phi\\&=4\phi+3\phi+2\phi+1\phi+3\phi+2\phi+1\phi+2\phi+1\phi1\phi\\&=10+6+3+1+6+3+1+3+1+1\\&=35\end{aligned}$$

**定理 4:** $n\phi\phi\phi=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$ (展開公式)

**證明:**

$$\begin{aligned}n\phi\phi\phi&=\sum_{k=1}^{n}k\phi\phi\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2)}{6}\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{1}{6}\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}\end{aligned}$$

**註:** 爲方便起見, 我們寫 $n\phi\phi=n\phi^2, n\phi\phi\phi=n\phi^3\cdots\cdots$,

$\underbrace{n\phi\phi\cdots\cdots\phi}_{r\text{個}}=n\phi^r$, 表 "$r$ 次之連階加" $=\sum_{s=1}^{n}s^{r-1}\phi$

**定理 5:**

$$\begin{aligned}n\phi^3&=(1\phi)n+(2\phi)(n-1)+(3\phi)(n-2)\\&\quad+\cdots\cdots+(r\phi)(n-r+1)+\cdots\cdots+(n\phi)\times 1\end{aligned}$$

ie $\qquad n\phi^3=\sum_{r=1}^{n}(r\phi)(n-r+1)$ (降階公式)

**證明:**

$$
\begin{aligned}
n\phi^3 &= n\phi^2+(n-1)\phi^2+(n-2)\phi^2\cdots\cdots \\
&\quad +(n-r+1)\phi^2+\cdots\cdots+3\phi^2+2\phi^2+1\phi^2 \\
&= 1\times n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots\cdots \\
&\quad +r(n-r+1)+\cdots\cdots+n\times 1 \\
&\quad +1(n-1)+2(n-2)+\cdots\cdots \\
&\quad +(r-1)(n-r+1)+\cdots\cdots+(n-1)\times 1 \\
&\quad +1(n-2)+\cdots\cdots+(r-2)(n-r+1) \\
&\quad +\cdots\cdots+(n-2)\times 1 \\
&\quad \cdots\cdots \\
&\quad 1(n-r+1)+\cdots\cdots+(n-r+1)\times 1 \\
&\quad \cdots\cdots \\
&\quad 1\times 2+2\times 1 \\
+)&\quad +1\times 1 \\
\hline
&(1\phi)n+(2\phi)(n-1)+(3\phi)(n-2)+\cdots\cdots \\
&\quad +(r\phi)(n-r+1)+\cdots\cdots+(n\phi)\times 1
\end{aligned}
$$

比較

$$
\begin{cases}
n\phi=\dfrac{n(n+1)}{2} \\[2ex]
n\phi\phi=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} \\[2ex]
n\phi\phi\phi=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}
\end{cases}
$$

（展開公式）

猜測

$$n\phi^r=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r)}{(r+1)!}$$

**定理 6:**

$$n\phi^r=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r)}{(r+1)!}\quad\text{(展開公式)}$$

**證明:**

當 $r=1$，左式$=n\phi=[n(n+1)]/2=$右式，原命題成立。

設 $r=k$ 時成立

ie $\quad n\phi^k=\dfrac{n(n+1)\cdots\cdots(n+k)}{(k+1)!}$

$\Longrightarrow\quad r=k+1$

$$
\begin{aligned}
&n\phi^{k+1} \\
&=n\phi^k+(n-1)\phi^k+(n-2)\phi^k+\cdots\cdots+2\phi^k+1\phi^k \\
&=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)}{(k+1)!} \\
&\quad +\frac{(n-1)n(n+1)\cdots\cdots(n+k-1)!}{(k+1)!}+\cdots\cdots \\
&\quad +\frac{2\cdot3\cdot4\cdots\cdots(2+k)}{(k+1)!}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(1+k)}{(k+1)!} \\
&=\frac{1}{(k+1)!}[1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(k+1)+2\cdot3\cdot4\cdots\cdots(k+2)+\cdots\cdots \\
&\quad +n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)] \\
&=\frac{1}{(k+1)!}\,\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)(n+k+1)}{(k+2)} \\
&=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots[n+(k+1)]}{[(k+1)+1]!}
\end{aligned}
$$

由數學歸納法知得證。

**推論:**

(1) $n\phi^r=\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r)}{(r+1)!}$ （上下同乘 $(n-1)!$）

$=\dfrac{(n+r)!}{(n-1)!(r+1)!}=C^{n+r}_{n-1}$

(2) $n\phi^{r-1}=C^{n+r-1}_{n-1}=H_r{}^n$

**比較:**

$$
\begin{cases}
n\phi^2=1\cdot n+2(n-1)+3(n-2) \\
\qquad +\cdots\cdots+r(n-r+1)+\cdots\cdots+n\cdot 1 \\
n\phi^3=1\phi\cdot n+2\phi\cdot(n-1)+3\phi\cdot(n-2) \\
\qquad +\cdots\cdots+r\phi(n-r+1)+\cdots\cdots+n\phi\cdot 1
\end{cases}
$$

**猜測:**

$$
\begin{aligned}
&n\phi^s \\
&=(1\overset{s-2}{\phi})n+(2\overset{s-2}{\phi})(n-1)+(3\overset{s-2}{\phi})(n-2) \\
&\quad +\cdots\cdots+(r\overset{s-2}{\phi})(n-r+1)+\cdots\cdots+(n\overset{s-2}{\phi})\cdot 1
\end{aligned}
$$

**定理 7:**

$$n\overset{s}{\phi}=\sum_{r=1}^{n}(r\overset{s-2}{\phi})(n-r+1)\quad (s\geq 2)\ \text{(降階公式)}$$

**證明** (i) 利用 $n\overset{s+1}{\phi}=n\overset{s}{\phi}+(n-1)\overset{s}{\phi}+\cdots\cdots+2\overset{s}{\phi}+1\overset{s}{\phi}$ 公式仿定理 3，5，用數學歸納法展開求證，茲從略。

(ii) 當 $s=2$，左式$=n\overset{s}{\phi}=\sum\limits_{r=1}^{n}r(n-r+1)=$右式。

設 $s=k$ 時成立，

ie $\quad n\overset{k}{\phi}=\sum\limits_{r=1}^{n}(r\overset{k-2}{\phi})(n-r+1)$

$\longrightarrow s=k+1$ 時

$$
\begin{aligned}
n\overset{k+1}{\phi}&=\sum_{\lambda=1}^{n}\lambda\overset{k}{\phi} \\
&=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{r=1}^{\lambda}(r\overset{k-2}{\phi})(\lambda-r+1)
\end{aligned}
$$

$$=\sum_{(\lambda-r)=0}^{n}\ \sum_{(\lambda+r)=(\lambda-r)+2}^{2n-(\lambda-r)}(r\phi^{k-2})(\lambda-r+1)$$

$$=\sum_{\lambda-r=0}^{n}\left[(\lambda-r+1)\sum_{(\lambda+r)=(\lambda-r)+2}^{2n-(\lambda-r)} r\overset{k-2}{\phi}\right]$$

$$=\sum_{\lambda-r=0}^{n}\left[(\lambda-r+1)\sum_{r=1}^{n-(\lambda-r)} r\overset{k-2}{\phi}\right]$$

$$=\sum_{\lambda-r=0}^{n}(\lambda-r+1)\times[n-(\lambda-r)]\overset{k-1}{\phi}$$

(令$n-(\lambda-r)=\alpha$)

$$=\sum_{\alpha=0}^{n}(n-\alpha+1)\times\alpha\phi^{k-1}$$

由數學歸納法知原式得證。

※公式

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{r=1}^{\lambda}a_{\lambda r}=\sum_{\lambda-r=0}^{n}\ \sum_{(\lambda+r)=(\lambda-r)+2}^{2n-(\lambda-r)}a_{\lambda r}$$

可從 $r-\lambda$ 直角座標圖形中看出來。

**驗證:**

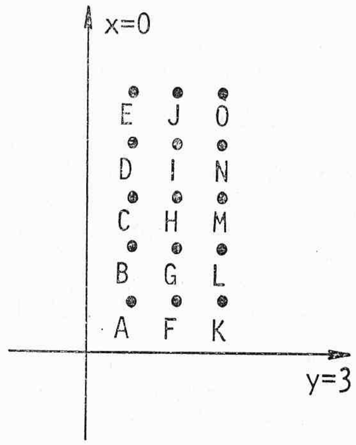
$$4\overset{4}{\phi}=(1\overset{2}{\phi})\times 4+(2\overset{2}{\phi})\times 3+(3\overset{2}{\phi})\times 2+(4\overset{2}{\phi})\times 1$$
$$=4(1)+3(1\times2+2\times1)+2(1\times3+2\times2+3\times1)$$
$$+1(1\times4+2\times3+3\times2+4\times1)$$
$$=56$$

$$4\overset{4}{\phi}=\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{5!}=56$$

例 1. 設 $A=\{1,2,3\}$ $B=\{4,5,6,7,8\}$
$A$ 到 $B$ 之絕對遞增函數個數為 $a$
$A$ 到 $B$ 之遞增函數個數為 $b$
求 $a$，$b$

**key:** 一個函數可決定一條函數曲線。在座標平面上看看有多少條曲線能夠滿足已給之條件即可算出函數個數。

**Remark:** 函數圖形不可能有鉛直線（一像源至多有一像點）絕對遞增函數之圖形不可能有水平線。本題中函數圖形之起迄點必在 $x=1$，$x=3$ 兩線上。




**解:** 絕對遞增函數其圖形必為左下-右上之傾斜折線，我們從傾斜角度小的算起。

$(A-G-)$ $A-G-M,\ A-G-N,\ A-G-O$（3 個）
$(A-H-)$ $A-H-N,\ A-H-O$（2 個）
$(A-I-)$ $A-I-O$（1 個）
$(B-H-)$ $B-H-N,\ B-H-O$（2 個）
$(B-I-)$ $B-I-O$（1 個）
$(C-I-)$ $C-I-O$（1 個）

共 $\underbrace{(3+2+1)}_{A\text{為起點}}+\underbrace{(2+1)}_{B\text{為起點}}+\underbrace{(1)}_{C\text{為起點}}=3\phi+2\phi+1\phi=3\phi\phi$

遞增函數其圖形可以為水平，但仍為左下一右上之傾斜折線。

$(A-F-)$ $A-F-K,\ A-F-L,\ A-F-M,$
$A-F-N,\ A-F-O$（5 個）
$(A-G-)$ $A-G-L,\ A-G-M,\ A-G-N$
$A-G-O$（4 個）
$(A-H-)$ $A-H-M,\ A-H-N,\ A-H-O$（3 個）
$(A-I-)$ $A-I-N,\ A-I-O$（2 個）
$(A-J-)$ $A-J-O$（1 個）
$(B-G-)$ $B-G-L,\ B-G-M,\ B-G-N,$
$B-G-O$（4 個）
$(B-H-)$ $B-H-M,\ B-H-N,\ B-H-O$（3 個）
$(B-I-)$ $B-I-N,\ B-I-O$（2 個）
$(B-J-)$ $B-J-O$（1 個）
$(C-H-)$ $C-H-M,\ C-H-N,\ C-H-O$（3 個）
$(C-I-)$ $C-I-N,\ C-I-O$（2 個）
$(C-J-)$ $C-J-O$（1 個）
$(D-I-)$ $D-I-N,\ D-I-O$（2 個）
$(D-J-)$ $D-J-O$（1 個）
$(E-J-)$ $E-J-O$（1 個）

總共有 $\underbrace{(5+4+3+2+1)}_{A\text{為起點}}+\underbrace{(4+3+2+1)}_{B\text{為起點}}$

$+\underbrace{(3+2+1)}_{C\text{為起點}}+\underbrace{(2+1)}_{D\text{為起點}}+\underbrace{(1)}_{E\text{為起點}}$

$=5\phi+4\phi+3\phi+2\phi+1\phi=5\phi\phi$

∴ $a=3\phi\phi=10,\quad b=5\phi\phi=35$

例 2. 設 $A=\{1,2,3,\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9\}$ 由 $A$ 到 $B$ 之絕對遞增函數個數為 $x$

由 $A$ 到 $B$ 之遞增函數個數為 $y$。

求 $x, y$

解: 仿例 1. 絕對遞增函數個數

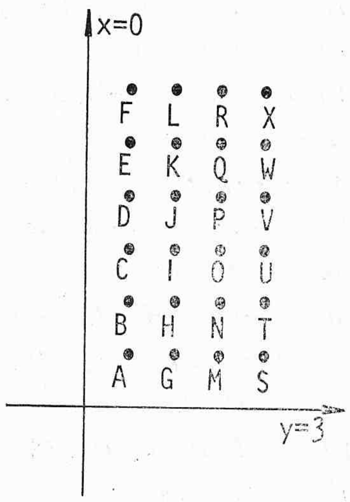
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A為起點 | $A-H-O-$ | 類 | 3 個 | $3\phi$ 個 | $3\phi\phi$ 個 | $3\phi^3$ 個 |
| | $A-H-P-$ | 類 | 2 個 | | | |
| | $A-H-Q-$ | 類 | 1 個 | | | |
| | $A-I-P$ | 類 | 2 個 | $2\phi$ 個 | | |
| | $A-I-Q$ | 類 | 1 個 | | | |
| | $A-J-Q$ | 類 | 1 個 | $1\phi$ 個 | | |
| B為起點 | $B-I-P$ | 類 | 2 個 | $2\phi$ 個 | $2\phi\phi$ 個 | |
| | $B-I-Q$ | 類 | 1 個 | | | |
| | $B-J-Q$ | 類 | 1 個 | $1\phi$ 個 | | |
| C起點 | $C-J-Q$ | 類 | 1 個 | $1\phi$ 個 | $1\phi\phi$ 個 | |

故絕對遞增函數個數

$x=3\phi^3$

$=(1\phi)3+(2\phi)2+(3\phi)1$

$=3+6+6=15$




遞增函數個數

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A-G-M-$ | 類 | 6 | $6\phi$ | $6\phi\phi$ | $6\phi^3$ |
| $A-G-N-$ | 類 | 5 | | | |
| $A-G-O-$ | 類 | 4 | | | |
| $A-G-P-$ | 類 | 3 | | | |
| $A-G-Q-$ | 類 | 2 | | | |
| $A-G-R-$ | 類 | 1 | | | |
| $A-H-N$ | 類 | 5 | $5\phi$ | | |
| $A-H-O-$ | 類 | 4 | | | |
| $A-H-P-$ | 類 | 3 | | | |
| $A-H-Q$ | 類 | 2 | | | |
| $A-H-R-$ | 類 | 1 | | | |
| $A-I-O$ | 類 | 4 | $4\phi$ | | |
| $A-I-P-$ | 類 | 3 | | | |
| $A-I-Q-$ | 類 | 2 | | | |
| $A-I-R-$ | 類 | 1 | | | |
| $A-J-P-$ | 類 | 3 | $3\phi$ | | |
| $A-J-Q-$ | 類 | 2 | | | |
| $A-J-R-$ | 類 | 1 | | | |
| $A-K-Q-$ | 類 | 2 | $2\phi$ | | |
| $A-K-R-$ | 類 | 1 | | | |
| $A-L-R-$ | 類 | 1 | $1\phi$ | | |
| $B-H-N-$ | 類 | 5 | $5\phi$ | $5\phi\phi$ | |
| $B-H-O-$ | 類 | 4 | | | |
| $B-H-P-$ | 類 | 3 | | | |
| $B-H-Q-$ | 類 | 2 | | | |
| $B-H-R-$ | 類 | 1 | | | |
| $B-I-O-$ | 類 | 4 | $4\phi$ | | |
| $B-I-P-$ | 類 | 3 | | | |
| $B-I-Q-$ | 類 | 2 | | | |
| $B-I-R-$ | 類 | 1 | | | |
| $B-J-P-$ | 類 | 3 | $3\phi$ | | |
| $B-J-Q-$ | 類 | 2 | | | |
| $B-J-R-$ | 類 | 1 | | | |
| $B-K-Q-$ | 類 | 2 | $2\phi$ | | |
| $B-K-R-$ | 類 | 1 | | | |
| $B-L-R-$ | 類 | 1 | $1\phi$ | | |
| $C-I-O-$ | 類 | 4 | $4\phi$ | | |
| $C-I-P-$ | 類 | 3 | | | |
| $C-I-Q-$ | 類 | 2 | | | |
| $C-I-R-$ | 類 | 1 | | | |

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{ll} C-J-P- & \text{類}\ 3\\ C-J-Q- & \text{類}\ 2\\ C-J-R- & \text{類}\ 1 \end{array}\right\}3\phi\\
\left.\begin{array}{ll} C-K-Q- & \text{類}\ 2\\ C-K-R- & \text{類}\ 1 \end{array}\right\}2\phi\\
\left.\begin{array}{ll} C-L-R- & \text{類}\ 1 \end{array}\right\}1\phi
\end{array}\right\}4\phi\phi\\
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{ll} D-J-P- & \text{類}\ 3\\ D-J-Q- & \text{類}\ 2\\ D-J-R- & \text{類}\ 1 \end{array}\right\}3\phi\\
\left.\begin{array}{ll} D-K-Q- & \text{類}\ 2\\ D-K-R & \text{類}\ 1 \end{array}\right\}2\phi\\
\left.\begin{array}{ll} D-L-R- & \text{類}\ 1 \end{array}\right\}1\phi
\end{array}\right\}3\phi\phi\\
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{ll} E-K-Q- & \text{類}\ 2\\ E-K-R- & \text{類}\ 1 \end{array}\right\}2\phi\\
\left.\begin{array}{ll} E-L-R- & \text{類}\ 1 \end{array}\right\}1\phi
\end{array}\right\}2\phi\phi\\
\left.\left.\begin{array}{ll} F-L-R- & \text{類}\ 1 \end{array}\right\}1\phi\right\}1\phi\phi
\end{array}\right|$$

故遞增函數個數 $y=6\overset{3}{\phi}=\dfrac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{4!}=126$ 個

**結論:** $A, B$二集合，$A$爲定義域，$B$爲對應域。
則由$A$至$B$之絕對遞增函數有

$$(|B|-|A|+1)\overset{A-1}{\phi}\text{ 個}$$

$$=H^{|B|-|A|+1}_{|A|}$$

$$=C^{|B|}_{|A|}$$

由$A$至$B$之遞增函數有

$$|B|\phi^{|A|-1}=H^{|B|}_{|A|}\text{個。}$$

**附註:** 本文所討論之集合，均爲「連續之自然數集」。

**問題:** 若$A, B$ 非爲「連續之自然數集」，則公式要不要修正?

## 後　　語

我們簡單的構築「階加」的代數系統後，以兩個例子說明了階加的應用。最後推廣到一般的情況。我們了解排列組合的方法解決此種問題是輕而易擧的，但是「階加」的概念不是可從圖形直接獲得? 不是更直觀嗎？「階加」的方法在排列組合，機率中，都是一個「簡單而直觀」的方法，你能找出更好的例子嗎？

——本文作者現就讀於海洋學院造船工程學系