質心之向量的解釋及其在數學上的應用

何　景　國

「質心」乃是物理學的一項觀念。本文是站在數學立場，用向量的意義及其運算技巧來解說一些有關質心的重要性質並且探討質心在數學上所扮演的角色。掌握了這種觀念，便可以在某些幾何解題方法要領上，獲得一種更新頴，更簡潔，更具體的思考途徑。不像古典幾何須要有相當的解題經驗和投機性的記憶，或借助補助線方可解題。質心的觀念除了可以用來求解形形色色的幾何定理，而且在分析學上，也應用得上。

I.　質心之向量解釋

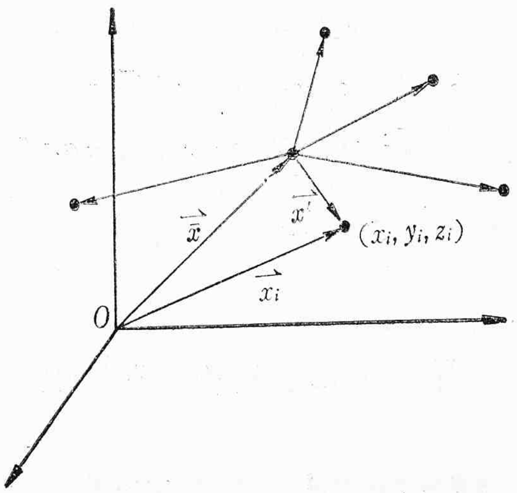
1. 質心的物理意義

假設有 n 個質點分布在空間中，且此組質點的座標爲 $(x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); \cdots\cdots, (x_n, y_n, z_n)$，而 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ 分別爲其質量則這一組 n 個質點的質心位置 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 爲:

$$\begin{cases} \bar{x}=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n} \\[2ex] \bar{y}=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n} \\[2ex] \bar{z}=\dfrac{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_nm_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n} \end{cases}$$

因爲位置可用向量來表示，亦卽質量爲m_i的質點位置 (x_i, y_i, z_i) 可以用「位置向量」$\overrightarrow{x_i}$（其中 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$）來表示；而質心的位置 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 也可以用「位置向量」$\overrightarrow{\bar{x}}$ 來表示。

$$\overrightarrow{\bar{x}}=\frac{\sum_{1}^{n} m_i\overrightarrow{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\cdots\cdots(1)$$



當我們把座標原點移到此組質點的質心位置時則諸質點對新座標的「位置向量」有如下的關係:

$$\overrightarrow{x_i'}=\overrightarrow{x_i}-\overrightarrow{x}\cdots\cdots(2)$$

(其中 $\overrightarrow{x_i'}$ 是諸質點對質心的「位置向量」)

(2)式代入(1)式得:

$$\overrightarrow{x}=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}(\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{x})+\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}(\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{x_i'})$$

$$=\overrightarrow{x}+\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}}(\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{x_i'})$$

則

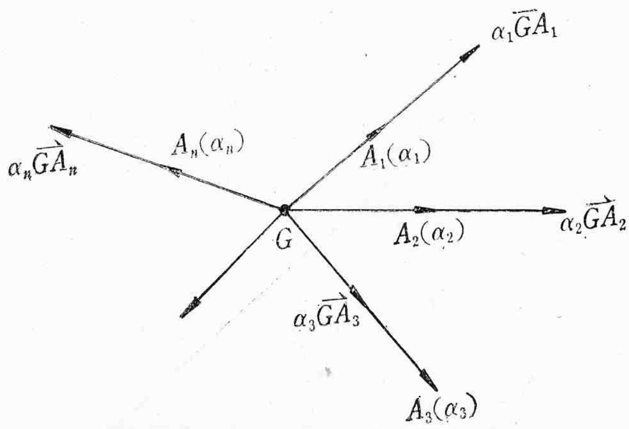
$$\sum_{i=1}^{n} m_i'\overrightarrow{x'}_i=\vec{0}$$

2. 質心的數學定義

上面是力學上的定義，現在要進入 n 個質點的質心之數學定義。

設 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 爲空間中的相異點且分別附帶着實係數 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ 但 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n\neq 0$。記作: $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, ……, $A_n(\alpha_n)$ 分別稱爲負荷質量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ 單位的質點。假如有一點 G 能滿足下列向量式子的話則點 G 便是此組 n 質點的質心了。

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$$



現在我們從最簡單的情形入手。譬如:

(一)只有兩個質點 $A_1(\alpha_1), A_2(\alpha_2)$ 時，那麼這兩質點的質心 G 必能滿足下列向量式了:

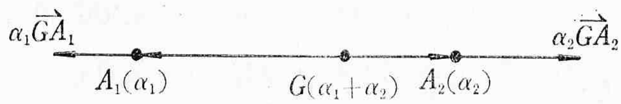
$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}=\vec{0}\qquad(\text{其中 } \alpha_1+\alpha_2\neq 0)$$

或:
$$\frac{\overrightarrow{GA_1}}{\overrightarrow{GA_2}}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

或
$$\frac{|\overrightarrow{GA_1}|}{|\overrightarrow{GA_2}|}=\frac{|\alpha_2|}{|\alpha_1|}$$

換言之，兩質點 $A_1(\alpha_1)$ 和 $A_2(\alpha_2)$ 的質心 G，就在 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 上，且把 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 分成下面這個比例:

$$|\overrightarrow{GA_1}|:|\overrightarrow{GA_2}|=|\alpha_2|:|\alpha_1|$$



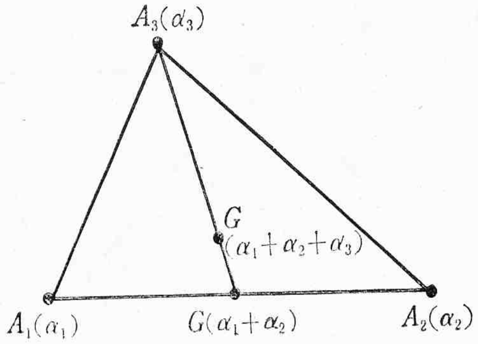
(二)假如是三質點 $A_1(\alpha_1), A_2(\alpha_2), A_3(\alpha_3)$ 時，這三質點的質心應該在什麼地方呢?

由於質點 $A_1(\alpha_1)$ 和 $A_2(\alpha_2)$ 的質心 $G_1(\alpha_1+\alpha_2)$ 必在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 上，所以質點 $G_1(\alpha_1+\alpha_2)$ 和質點 $A_3(\alpha_3)$ 的質心(也就是三個質點 $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$ 和 $A_3(\alpha_3)$ 的質心)也會在直線 $\overleftrightarrow{A_3G_1}$ 上，並且這個質心 G 將 $\overleftrightarrow{A_3G_1}$ 分成下列的比例:

$$\frac{\overrightarrow{GG_1}}{\overrightarrow{GA_3}}=-\frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2}$$

或

$$\frac{|\overrightarrow{GG_1}|}{|\overrightarrow{GA_3}|}=\frac{|\alpha_3|}{|\alpha_1+\alpha_2|}$$



此處三個質點之質心的求法是任意先取其中兩個質點求其質心，然後再取另一質點求出最後的質心即可，不受先後次序的影響。三個質點以上質心的求法亦然。因爲質心的存在是唯一的，證明如下:

a)存在性的證明

設點O爲空間上的一固定點則:

$\because$ $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$

(其中$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n\neq 0$)

$\therefore$ $\alpha_1(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OG})+\alpha_2(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OG})+\cdots$

$+\alpha_n(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OG})=\vec{0}$

或 $\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots$

$+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{OG}=\vec{0}$

即: $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n}$

由此可知質心G是存在的。

b)唯一性的證明

設另有一質心點G'同時存在，即

$\alpha_1\overrightarrow{G'A_1}+\alpha_2\overrightarrow{G'A_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{G'A_n}=\vec{0}$ ……①

$\because$ 點G爲n個質點 $A_1(\alpha_1), A_2(\alpha_2), \cdots\cdots, A_n(\alpha_n)$ 的質心

$\therefore$ $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$ ……②

②－①得

$\alpha_1(\overrightarrow{GA_1}-\overrightarrow{G'A_1})+\alpha_2(\overrightarrow{GA_2}-\overrightarrow{G'A_2})+\cdots$

$+\alpha_n(\overrightarrow{GA_n}-\overrightarrow{G'A_n})=\vec{0}$

或: $\alpha_1\overrightarrow{GG'}+\alpha_2\overrightarrow{GG'}+\cdots\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$

即 $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$

故: $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$ ($\because$ $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n\neq0$)

即 $G'=G$

這就證明了質心G是唯一的。

II. 質心在數學上的應用

(A) 這裏我們研究質心的概念在幾何定理上的應用

1. 定理

設點G爲三質點 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ 的質心，則

$$a(\triangle GBC):a(\triangle GCA):a(\triangle GAB)=\alpha:\beta:\gamma$$

(其中 $a(\triangle GBC)$, $a(\triangle GCA)$, $a(\triangle GAB)$ 爲 $\triangle GBC$, $\triangle GCA$, $\triangle GAB$ 的有向面積)。

證明

設直線 $\overleftrightarrow{CC'}$ 垂直 $\overleftrightarrow{AB}$ 且交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 C'，因點G爲 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ 的質心，所以有

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

將上式投射到 $\overleftrightarrow{CC'}$，得:

$$\alpha\overrightarrow{G''C'}+\beta\overrightarrow{G''C'}+\gamma\overrightarrow{G''C}=\vec{0}$$

$$\gamma\overrightarrow{C'C}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{G'G}$$

即: $\dfrac{\overrightarrow{C'C}}{\overrightarrow{G'G}}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}$

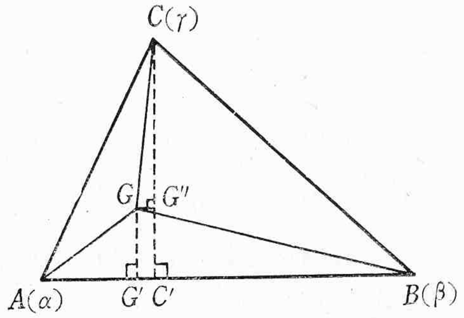
即: $\dfrac{\overrightarrow{C'C}}{\overrightarrow{G'G}}=\dfrac{a(\triangle CAB)}{a(\triangle GAB)}$

或 $\dfrac{a(\triangle CAB)}{a(\triangle GAB)}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}$

同理可證: $\dfrac{a(\triangle ABC)}{a(\triangle GBC)}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}$

$$\frac{a(\triangle BCA)}{a(\triangle GCA)}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta}$$

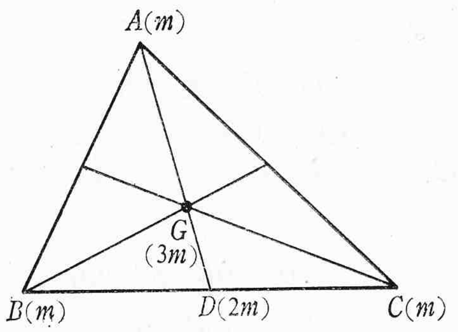
故: $a(\triangle GBC):a(\triangle GCA):a(\triangle GAB)=\alpha:\beta:\gamma$



2. 三角形的重心定理

設$\triangle ABC$的三頂點分別負荷相同質量m則$\triangle ABC$的三條中線相交在質心G且G和A, B, C的距離等於相應的中線長度之 2/3（卽質心G爲$\triangle ABC$的重心）。

證明:



設點D爲$B(m), C(m)$的質心則

$$|\overrightarrow{DB}|:|\overrightarrow{DC}|=|m|:|m|=1:1$$

故 質心$D(2m)$在$\overline{BC}$的中點處。

由三質點的求法知$A(m), B(m), C(m)$的質心G在中線$\overline{AD}$上且有

$$|\overrightarrow{GA}|:|\overrightarrow{GD}|=|2m|:|m|=2:1$$

卽
$$\overline{GA}=2\overline{GD}$$

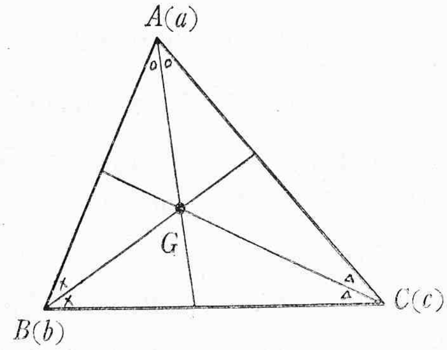
或
$$\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$$

由於質心的存在唯一性得知質心$G(3m)$爲$\triangle ABC$的三中線的交點，故定理得證。

3. 三角形的內心定理

設a, b, c爲$\triangle ABC$的三邊長且點G爲三質點$A(a)$, $B(b), C(c)$的質心則$\triangle ABC$的三條內角平分線相交在質心G（卽質心G爲$\triangle ABC$的內心）。

證明



設點D爲二質點$B(b), C(c)$的質心則

$$b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

且 $$|\overrightarrow{DB}|:|\overrightarrow{DC}|=c:b=\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{AC}$$

$\Longrightarrow$ D爲$\angle A$的內角平分線與其對邊$\overline{BC}$的交點。

依題意知: 質點$D(b+c)$和質點$A(a)$的質心爲G。

故質心G同時落在$\triangle ABC$的三內角平分線上。

由質心的存在唯一性知$\triangle ABC$的三內角平分線相交在質心G（卽質心G爲$\triangle ABC$的內心）。

4. 三角形的傍心定理

變化一下三質點的負荷量，會得到下面的傍心定理。

設a, b, c爲$\triangle ABC$的三邊長:

(i) 若G爲三頂點$A(a), B(-b), C(-c)$的質心則G爲$\triangle ABC$對應於$\angle A$的傍心。

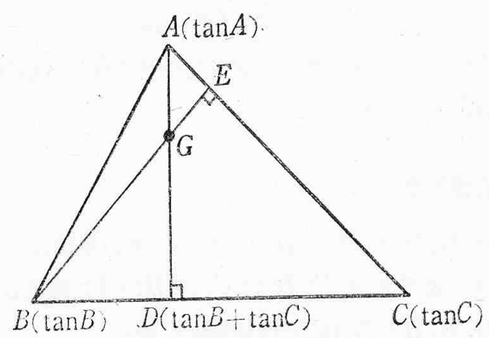
(ii) 若G爲三頂點$A(-a), B(b), C(-c)$的質心則G爲$\triangle ABC$對應於$\angle B$的傍心

(iii) 若G爲三頂點$A(-a), B(-b), C(c)$的質心則G爲$\triangle ABC$對應於$\angle C$的傍心。

5. 三角形的垂心定理

設三質點$A(\tan A), B(\tan B), C(\tan C)$的質心爲$G$則$\triangle ABC$的三條高相交於$G$（卽質心$G$爲$\triangle ABC$的垂心）。

證明



設點D爲二質點 $B(\tan B),C(\tan C)$ 的質心。

則 $$(\tan B)\overrightarrow{DB}+(\tan C)\overrightarrow{DC}=\vec{0},$$

即: $$|\overrightarrow{DB}|:|\overrightarrow{DC}|=|\tan C|:|\tan B|$$

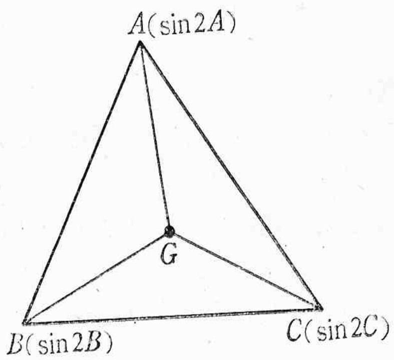
故質心 $D(\tan B+\tan C)$ 落在自頂點A引至對邊 $\overline{BC}$的垂足上，同理可知兩質點$A(\tan A),C(\tan C)$ 的質心E亦爲自頂點B引至對邊 $\overline{AC}$ 的垂足。

由於質點 $A(\tan A)$ 和質點 $D(\tan B+\tan C)$ 的質心就是三質點 $A(\tan A)$, $B(\tan B)$, $C(\tan C)$ 的質心 G，於是G就是 $\triangle ABC$三條高的交點。故定理得證。

6. 三角形的外心定理

設三質點 $A(\sin 2A)$, $B(\sin 2B)$, $C(\sin 2C)$ 的質心爲G則 $\triangle ABC$ 的三條邊的垂直平分線相交於 G (即質心 G 爲 $\triangle ABC$ 的外心)。

證明



由題意知點G爲三質點 $A(\sin 2A)$, $B(\sin 2B)$, $C(\sin 2C)$ 的質心。

故:

$$a(\triangle GBC):a(\triangle GCA):a(\triangle GAB)$$
$$=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$$

又因爲$\angle A,\angle B,\angle C$爲 $\triangle ABC$ 的三內角所以點G在三角形 ABC 的內部，而且

$$\overline{GA}=\overline{GB}=\overline{GC}$$

$\Longrightarrow\triangle ABC$ 的三邊垂直平分線相交在質心G。(即質心G爲 $\triangle ABC$ 的外心)。

7. 歐拉線的定理

設O,G,H分別爲$\triangle ABC$的外心，重心和垂心則

(1)點O爲四個質點 $A(1),B(1),C(1),H(-1)$ 的質心。

(2)三點O,G,H共線 (此直線稱爲歐拉線)

證明:

設向量$\vec{v}$使得下式成立:

$$\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+(-1)\overrightarrow{OH}$$

因爲 $$\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AB}$$

即 $$\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AB}$$

其中質點D爲 $A(1),B(1)$ 的質心

又因爲 $$\overline{OD}\perp\overline{BC};\overline{HC}\perp\overline{AB}$$

所以 $$\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

即: $$\vec{v}\perp\overrightarrow{AB}$$

同理可得: $$\vec{v}\perp\overrightarrow{BC};\vec{v}\perp\overrightarrow{AC}$$

由於向量$\vec{v}$與三個相異且不平行的向量互相垂直是不可能的除非是$\vec{v}=\vec{O}$因此得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH}=\vec{O}$$

即點 O 爲 $A(1),B(1),C(1)H(-1)$ 及的質心。因爲點G爲 $\triangle ABC$的重心，所以 G 爲三頂點 $A(1)$, $B(1')$, $C(1)$ 的質心。

故 $$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$$

即 $$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$$

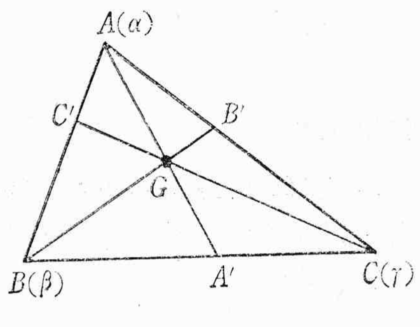
這式子證明了三點O,G,H共線而且點G位於 $\overline{HO}$ 上距點0至點H的 1/3 處。

8. 西瓦定理

(i) 西瓦 (CEVA) 的三線共點定理

設A',B',C' 分別爲 $\triangle ABC$ 中 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{CA}$ 三邊上的三個點，則$\overleftrightarrow{AA'},\overleftrightarrow{BB'},\overleftrightarrow{CC'}$三線共點的充要條件爲:

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\times\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}\times\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}=-1$$



證明:

設α, β, γ爲$\triangle ABC$的三頂點的負荷質量使得

$$\begin{cases}①點\ C'\ 是二質點\ A(\alpha), B(\beta)\ 的質心 \\ ②點\ B'\ 是二質點\ A(\alpha), C(\gamma)\ 的質心\end{cases}$$

卽所選取的三實係數α, β, γ會滿足下列條件,

$$\beta:\alpha=-k_3\ ;\quad \alpha:\gamma=-k_2$$

$\Longrightarrow A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ 的質心$G\in\overleftrightarrow{BB'}\cap\overleftrightarrow{CC'}$。

另一方面, 由於$G\in\overleftrightarrow{AA'}$ 所以A' 爲二質點 $B(\beta), C(\gamma)$ 的質心。

故 $$\gamma:\beta=-k_1$$

其中$-k_1=\overrightarrow{A'B}:\overrightarrow{A'C}$; $-k_2=\overrightarrow{B'C}:\overrightarrow{B'A}$; $-k_3=\overrightarrow{C'A}:\overrightarrow{C'B}$

因此三直線 $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ 交於一點的充要條件是:

$$(-k_1)(-k_2)(-k_3)=\left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=-1$$

卽得 $$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\times\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}\times\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}=-1$$

(ii) 西瓦 (CEVA) 的三角函數型定理

設 A', B', C' 分別爲$\triangle ABC$中三邊 $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CA}$ 的三個點則三直線 $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ 共點的充要條件爲:

$$\frac{\sin\angle A'AB}{\sin\angle A'AC}\times\frac{\sin\angle B'BC}{\sin\angle B'BA}\times\frac{\sin\angle C'CA}{\sin\angle C'CB}=-1$$

(其中各角均取有向角)

證明:

取 $$\alpha=\frac{\sin\angle A'AB}{\sin\angle A'AC},\quad \beta=\frac{\sin\angle B'BC}{\sin\angle B'BA},$$

$$\gamma=\frac{\sin\angle C'CA}{\sin\angle C'CB}$$

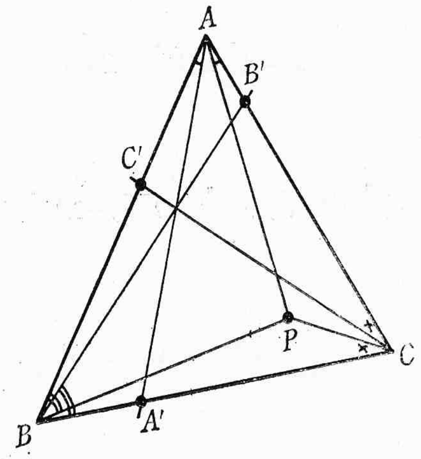
例說

設點P爲$\triangle ABC$ 內部的任一點, 若自各頂點分別引三直線 $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ 使得:

$$\angle A'AB=\angle CAP;\ \angle B'BC$$
$$=\angle ABP;\ \angle C'CA=\angle BCP$$

則 $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ 三直線共點。

說明



由題設可得:

$$\begin{cases}\dfrac{\sin\angle A'AB}{\sin\angle A'AC}=\dfrac{\sin\angle CAP}{\sin\angle BAP} \\ \dfrac{\sin\angle B'BC}{\sin\angle B'BA}=\dfrac{\sin\angle ABP}{\sin\angle CBP} \\ \dfrac{\sin\angle C'CA}{\sin\angle C'CB}=\dfrac{\sin\angle BCP}{\sin\angle ACP}\end{cases}$$

由於 $\overleftrightarrow{CP}, \overleftrightarrow{BP}, \overleftrightarrow{AP}$ 三線共點故得

$$\frac{\sin\angle A'AB}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle B'BC}{\sin\angle B'BA}\cdot\frac{\sin\angle C'CA}{\sin\angle C'CB}=-1$$

(B) 質心的數質函數

定義 設空間E中n個質點爲 $A_1(\alpha_1), A_2(\alpha_2), \cdots, A_n(\alpha_n)$, 定義一個自$E$映至實數$\boldsymbol{R}$的一個函數$f$

$$f:E\longrightarrow \boldsymbol{R}$$

使得

$$f(M)=\alpha_1\overline{MA_1}^2+\alpha_2\overline{MA_2}^2+\cdots\cdots+\alpha_n\overline{MA_n}^2,$$

則稱函數f爲質心的數值函數。

定理

1. 若Ω爲空間中的一基準點則質心的數值函數

$$f(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\Omega M}^2+f(\Omega)-2\overrightarrow{\Omega M}\cdot\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\overrightarrow{\Omega A_i})$$

2. 若點G爲n個質點 $A_i(\alpha_i)$ 的質心則

$$f(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{GM}^2+f(\Omega)$$

證明

由質心的數值函數知

$$f(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{MA_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{MA_i}^2$$

即:

$$(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overrightarrow{\Omega A_i}-\overrightarrow{\Omega M})^2$$

故:

$$f(M)=(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\Omega M}^2)+(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\Omega A_i}^2)-2\overrightarrow{\Omega M}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{\Omega A_i})$$

或

$$f(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\Omega M}^2+f(\Omega)-2\overrightarrow{\Omega M}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\Omega A_i})$$

故:

當 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ 時則 $f(M)=f(\Omega)=k$（常數）

當 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ 時則選取 $\Omega=G$ 可推得

$$f(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{GM}^2+f(G)$$

（其中 G 爲 n 個質點 $A_i(\alpha_i)$ 的質心）。

論例 1

設 a, b, c 分別爲 $\triangle ABC$ 的三邊長且三頂點分別負荷質量 α, β, γ。

(1)若點 G 爲三質點 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ 的質心則

$$\alpha\overline{GA}^2+\beta\overline{GB}^2+\gamma\overline{GC}^2=\frac{\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2+\alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

(2)若點 I 爲 $\triangle ABC$ 的內心則

$$a\overline{IA}^2+b\overline{IB}^2+c\overline{IC}^2=abc$$

(3)若點 I_A 爲 $\triangle ABC$ 內的 $\angle A$ 之傍心則

$$a\overline{I_AA}^2-b\overline{I_AB}^2-c\overline{I_AC}^2=abc$$

(4)若點 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心則

$$\overline{HA}^2\tan A+\overline{HB}^2\tan B+\overline{HC}^2\tan C=8R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$$

（其中 R 爲 $\triangle ABC$ 外接的半徑長）

(5)若點 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，且 R, r 分別爲 $\triangle ABC$ 外接圓與內切圓的半徑長則

$$\overline{OI}^2=R^2-2Rr$$

（I 爲 $\triangle ABC$ 之內心）

證明

(1)由質心的數値函數得

$$\alpha\overline{MA}^2+\beta\overline{MB}^2+\gamma\overline{MC}^2$$

$$=(\alpha+\beta+c)\overline{MG}^2+\alpha\overline{GA}^2+\beta\overline{GB}^2+\gamma\overline{GC}^2$$

令 $\qquad\Sigma=\alpha\overline{GA}^2+\beta\overline{GB}^2+\gamma\overline{GC}^2$

若 $M=A$ 則 $\beta c^2+\gamma b^2=(\alpha+\beta+\gamma)\overline{GA}^2+\Sigma$……①

若 $M=B$ 則 $\alpha c^2+\gamma a^2=(\alpha+\beta+\gamma)\overline{GB}^2+\Sigma$……②

若 $M=C$ 則 $\alpha b^2+\beta a^2=(\alpha+\beta+\gamma)\overline{GC}^2+\Sigma$……③

$a\cdot$①$+b\cdot$②$+c\cdot$③得

(1) $2(\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2+\alpha\beta c^2)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\overline{GA}^2+\beta\overline{GB}^2+\gamma\overline{GC}^2)+(\alpha+\beta+\gamma)\Sigma$

或

$=2(\alpha+\beta+\gamma)\Sigma$

或

$$\Sigma=\alpha\overline{GA}^2+\beta\overline{GB}^2+\gamma\overline{GC}^2=\frac{\beta\gamma a^2+\alpha\gamma b^2+\alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}\cdots\cdots(甲)$$

(2)設 $\alpha=a$, $\beta=b$, $\gamma=c$ 則 I 爲 $A(a), B(b), C(c)$ 的質心且由（甲）式得:

$$a\overline{IA}^2+b\overline{IB}^2+c\overline{IC}^2=\frac{bca^2+cab^2+abc^2}{a+b+c}=abc$$

(3)設 $\alpha=a$, $\beta=-b$, $\gamma=-c$ 則 I_A 爲 $A(a)$, $B(-b)$, $C(-c)$ 的質心且由（甲）式得:

$$a\overline{I_AA}^2-b\overline{I_AB}^2-c\overline{I_AC}^2=\frac{bca^2-acb^2-abc^2}{a-b-c}=abc$$

(4)設 $\alpha=\tan A$, $\beta=\tan B$, $\gamma=\tan\gamma$ 則 H 爲 $A(\tan A)$, $B(\tan B)$, $C(\tan C)$ 的質心，且由（甲）式得

$$\overline{HA}^2\tan A+\overline{HB}^2\tan B+\overline{HC}^2\tan C$$
$$=\frac{a^2\tan B\tan C+b^2\tan C\tan A+c^2\tan A\tan B}{\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}$$

在 $\triangle ABC$ 中有

$$\tan A+\tan B+\tan B=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

且 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

故 $$\overline{HA}^2\tan A+\overline{HB}^2\tan B+\overline{HC}^2\tan C$$
$$=\frac{a^2}{\tan A}+\frac{b^2}{\tan B}+\frac{c^2}{\tan C}$$
$$=2R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$
$$=2R^2(4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C)$$
$$=8R^2(\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C)$$

(5)因爲 I 爲 $A(a), B(b), C(c)$ 的質心所以

$$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+C\overrightarrow{OC}=(a+b+c)\overrightarrow{OI}$$

等式兩端各取其自身之向量內積得下式

$$(a+b+c)^2\overline{OI}^2$$

$$=a^2R^2+bR^2+cR^2+2(ab\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$+bc\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+ac\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$$

設點N為 $\overline{BC}$ 的中點則

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NB})(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC})$$
$$=\overline{ON}^2-\overline{NB}^2=R^2-\frac{a^2}{2}$$

同理可得:

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2-\frac{b^2}{2};\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=R^2-\frac{C^2}{2}$$

故:

$$(a+b+c)^2\overline{OI}^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)R^2$$
$$+2\left(abR^2-\frac{abc^2}{2}+bcR^2-\frac{a^2bc}{2}+acR^2-\frac{ab^2c}{2}\right)$$
$$=(a+b+c)^2R^2-abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow\qquad (a+b+c)\overline{OI}^2=(a+b+c)R^2-abc$$

在$\triangle ABC$ 中有

$$\begin{cases}abc=4RS\\ a(\triangle ABC)=Sr\end{cases}\quad(\text{其中 }\delta\text{ 表之}\triangle ABC\text{半周長})$$

故 $$2\delta\cdot\overline{OI}^2=2SR^2-4SRr$$

即: $$\overline{OI}^2=R^2-2Rr$$

論例 2

設 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 為相異實數，且函數 $f(x)$ 為

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$$

(1)試求 x_0,y_0 使函數值 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 處有極小值 y_0

承上題，設函數 $f(x)$ 為

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=5}(x-n)^2+\sum_{n=21}^{n=25}(x-n)^2$$

試計算 x_0 和 y_0 使函數f在$x=x_0$處有極小值 y_0

解

在直線座標系中，設點P的坐標為X則

$$f(P)=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{PA_i}\cdot\overrightarrow{PA_i})$$

欲求點 P_0 的坐標 X_0 使得 $f(P_0)$ 為極小值，可以假想諸質點 $A_i(a_i)$ 之質心為 G，且用質心的函數值可得下式

$$f(P)=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{PA_i})^2=n\overrightarrow{GP}^2+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}^2$$

$$\text{其中}\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}^2=K\ (\text{正常數})$$

(2)設諸點 $P_1,P_2,\cdots\cdots,P_5,P_6,\cdots\cdots,P_{10}$ 的坐標分別為 $1,2,\cdots\cdots,5,21,\cdots\cdots,25$ 且點 G 為這組質點 $P_1(1)$, $P_2(2)$, $\cdots\cdots,P_5(5),P_6(21),\cdots\cdots,P_{10}(25)$ 的質心。

若P與G的坐標為X和 X_0 則

$$f(P)=\overline{PP_1}^2+\overline{PP_2}^2+\cdots\cdots+\overline{PP_5}^2+\overline{PP_6}^2+\cdots\cdots+\overline{PP_{10}}^2$$

即

$$f(P)$$
$$=10\overline{PG}^2+\underbrace{\overline{GP_1}^2+\overline{GP_2}^2+\cdots+\overline{GP_5}^2+\overline{GP_6}^2+\cdots+\overline{GP_{10}}^2}_{\text{常數}}$$

當$P=G$時得 $\overline{PG}^2=0$ 且上式寫成:

$$1+2+\cdots\cdots+5+21+\cdots\cdots+25=10x_0$$

即 $$x_0=13,\ y_0=1021$$

(C) 質心與凸函數

這裏，我們透過質心的概念來解說凸函數及證明一些重要定理。

(1) 凸集合

點集合Γ若稱為凸集合則就是指集合Γ中任意兩質點 x, y 的質心 z 亦包含在 Γ 中，其中兩質點的負荷質量 m_1 及 m_2 須為正數且滿足 $m_1+m_2=1$.即

設 $\overline{xy}=\{t\mid t=m_1x+(1-m_1)y,0\le m_1\le1\}$ 則

$$\Gamma\text{為凸集合}\Longleftrightarrow\forall x,y\in\Gamma,\ xy\subset\Gamma$$

(2)凸集合上的凸函數

定義

若實函數f在凸集合Γ上滿足下列的不等式則稱f為Γ上的凸函數。

$$f(m_1x_1+m_2x_2)\le m_1f(x_1)+m_2f(x_2)$$
$$(\text{其中 }x_1,x_2\in\Gamma\text{ 且 }m_1,m_2>0,m_1+m_2=1)$$

定理 1 設$\Gamma^+=\{(x,z)\mid x\in\Gamma,z\ge f(x)\}$。則函數$f$為$\Gamma$上的凸函數之充要條件是 Γ^+ 為 $\boldsymbol{R}^3$ 中的凸子集合。

證明

(1) 充分的條件　設點 (x_1,z_1) 與 (x_2,z_2) 為 Γ^+ 中的相異點，且 l 為該兩點的連結線段

則
$$\forall(x,y)\in l,\begin{cases}x=m_1x_1+m_2x_2\\ y=m_1z_1+m_2z_2\end{cases}$$

其中 $m_1,m_2\in \boldsymbol{R}^+, m_1+m_2=1$

$$\Longrightarrow \quad z_1\geq f(x_1);z_2\geq f(x_2)$$

$$z=m_1f(x_1)+m_2f(x_2)\geq f(x)$$

故
$$(x,z)\in\Gamma^+$$

亦就是說 Γ^+ 爲 $\boldsymbol{R}^3$ 中的凸集合。

(2) 必要條件 (用反證法) 設 f 不是 Γ 上的一個凸函數，則對 $x_1,x_2\in\Gamma$，且兩正實數 m_1,m_2 且 $m_1+m_2=1$ 而言點 $(m_1x_1+m_2x_2,m_1f(x_1)+m_2f(x_2)\in l'$

(其中 l' 爲 Γ^+ 中兩點 $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$ 的連結線段

因爲
$$(m_1x_1+m_2x_2,m_1f(x_1)+m_2f(x_2))\in\Gamma$$

所以

Γ^+ 不是凸集合 (此與假設不符合)。

故

f 爲 Γ 上的凸函數。

定理 2 設 Γ 爲高維空間中的一集合，且
$$\{x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\}\subset\Gamma$$
則 Γ 爲凸集合 $\Longleftrightarrow \forall x\in\Gamma$, x 爲 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 的凸組合。

證明

(1) 充分條件　設 z 爲兩點 $x_1(t_1),x_2(t_2)$ 的質心，其中 $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}^+$

則
$$t_1zx_1+t_2zx_2=0$$

令
$$\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\in\Gamma \text{ 且 } x=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{t_i}{1-t_n}x_i\in\Gamma$$

$$(\text{其中}\sum_{i=1}^{n-1}t_i=1-t_n)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}t_ix_i=(1-t_n)x+t_nx_n\in\Gamma$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\in\Gamma$$

(2) 必要條件

$\because$
$$\forall x\in\overline{x_1x_2}.\Longleftrightarrow\exists t_1,t_2\in R^+$$

滿足
$$\begin{cases}t_1+t_2=1\\ t_1xx_1+t_2xx_2=0\end{cases}$$

$\therefore$ x 爲 x_1,x_2 的凸組合

故 Γ 爲凸集合

定理 3 若函數 f 爲凸集合 Γ 上的凸函數則下列不等式成立:

$$f(\sum_{i=1}^{n}m_ix_i)\leq\sum_{i=1}^{n}m_if(x_i)$$

其中 $m_i\in\boldsymbol{R}^+(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

且 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n=1$

由歸納法易得證，故從略。

——本文作者現任教於延平中學