方 根 的 探 討

王 湘 君

您曾經爲了想幫助學生學習一些新的數學概念，而尋求一些有趣的問題嗎？這裏就是一個有趣的問題，可以幫助學習「極限」。

從任何兩個正整數的比出發，我們可以導出2的平方根來，您相信嗎？下面就是:

$$\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1+2(2)}{1+2}=\frac{5}{3}\longrightarrow\frac{5+2(3)}{5+3}=\frac{11}{8}$$

$$\longrightarrow\frac{11+2(8)}{11+8}=\frac{27}{19}\longrightarrow\frac{27+2(19)}{27+19}=\frac{65}{46},\cdots\text{等等。}$$

我們可以看出每一個步驟，都是由比變成以 a/b 變成 $(a+2b)/(a+b)$ 以$\sqrt{2}$的近似值1.4142135 來看，65/46=1.4130435 假如我們再繼續同樣的步驟，我們可以得到

$$\frac{65}{46}\longrightarrow\frac{157}{111}\longrightarrow\frac{399}{268}\longrightarrow\frac{915}{647}\longrightarrow\frac{2209}{1562}=1.414\frac{2125}{8}$$

請注意我們從 1/2 出發，並非必要的，最重要的是新的比，其分子是前一比值的分子與兩倍分母的和，分母是前一比值的分子與分母的和。

讓我們從 3/2 出發，看看會發生什麼結果？

$$\frac{3}{2}\longrightarrow\frac{3+2(2)}{3+2}$$

$$=\frac{7}{5}\longrightarrow\frac{12}{17}\longrightarrow\frac{41}{29}\longrightarrow\frac{99}{70}\longrightarrow\frac{239}{169}\longrightarrow\frac{577}{408}$$

$$=1.414\frac{2156}{1}$$

您甚至可以從 5/1 開始，也能辦得到，不妨試試看! 爲什麼這樣行得通呢？要回答這問題必須將

$$\frac{a+2b}{a+b}\text{改變成}\frac{a+2b}{a+b}=\frac{a/b+2}{a/b+1}=\frac{x+2}{x+1}\left(x=\frac{a}{b}\right)$$

這樣，將 x 重複地改變成 $(x+2)/(x+1)$。在每一步驟中，x 與 $(x+2)/(x+1)$ 的差愈來愈小。事實上，到後來很難區別 x 與 $(x+2)/(x+1)$。這時我們可以說它的極限是L

$$L=\frac{L+2}{L+1}\ (L+1\neq 0)$$

解出L來

$$L(L+1)=L+2$$

$$L^2=2$$

所以

$$L=\sqrt{2}\ (L\text{不爲負})$$

上述過程中我們可以用任何自然 n 代替 2，於是我們可以把這過程一般化而求出任何自然數的平方根。只須

$$\frac{a}{b}\longrightarrow\frac{a+nb}{a+b}\text{就可得}\sqrt{n}\text{。}$$

從 2/3 開始，來逼近 $\sqrt{9}$。

$$\frac{2}{3}\longrightarrow\frac{29}{5}\longrightarrow\frac{74}{34}\longrightarrow\frac{380}{108}\longrightarrow\frac{1352}{488}\longrightarrow\frac{5744}{1840}=3.121\frac{7391}{3}$$

也許當你知道 $\sqrt{9}=3$ 時，你會覺得這樣很做作，但是這個過程很令人感到興趣。假如我們親手去做，將會有更好的方法，去求平方根的近似值。假如我們用小型電算機，只須費很有限的工夫就能夠求得方根的近似值。只要由 $a/b\longrightarrow(a+nb)/(a+b)$，一連串的做下去，我們就可求得$\sqrt{n}$的近似值，要多近就有多近。

更高階的方根，也可以用這種方法求得。讀者不妨試試由

$$\frac{a}{b}\longrightarrow\frac{ab+nb^2}{a^2+b^2}$$

可以收斂到n的立方根。

——本文作者現任教於師大附中