「聯想」舉隅

葉東進

藉著某些工具的發明，而發現了某些法則，是人類心智的獨特能力。這種能力的展現，常常建立在觀察與聯想的基礎上。

日常的教學，如果能在傳佈知識之外，多花些精神在觀察與聯想上，不僅課堂可以顯得更活潑，思維也將變得更靈活。

底下舉一個「聯想」的例子。

問題 1.

線段 AB 內的點 P 如果滿足:

$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}=\vec{0}$ (其中 α, $\beta>0$)

則 $\overline{PB}:\overline{PA}=\alpha:\beta$ ($\overline{PB}$ 表線段 PB 的長)

證明:

$$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\quad \alpha\overrightarrow{PA}=-\beta\overrightarrow{PB}$$
$$\Rightarrow\quad \alpha|\overrightarrow{PA}|=\beta|\overrightarrow{PB}|$$
$$\Rightarrow\quad \overline{PB}:\overline{PA}=\alpha:\beta$$

問題 2.

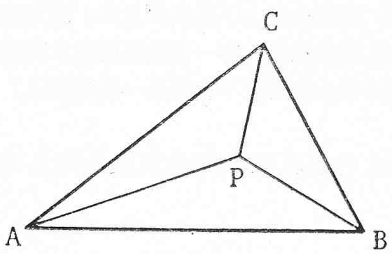
三角形 ABC 內的點 P 如果滿足:

$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ (其中 $\alpha,\beta,\gamma>0$)

則 $\triangle PBC:\triangle PAC:\triangle PAB$

$=\alpha:\beta:\gamma$ ($\triangle PBC$ 表三角形 PBC 的面積)

證明: 爲了行文方便，令 $\vec{a}=\overrightarrow{PA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{PB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{PC}$



按向量的外積（註）的性質知:

$$\triangle PBC=\frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}|$$
$$\triangle PAC=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{c}|$$
$$\triangle PAB=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

又，由已知 $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha\vec{a}\times\vec{a}+\beta\vec{b}\times\vec{a}+\gamma\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}\\ \alpha\vec{a}\times\vec{b}+\beta\vec{b}\times\vec{b}+\gamma\vec{c}\times\vec{b}=\vec{0}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta|\vec{a}\times\vec{b}|=\gamma|\vec{a}\times\vec{c}|\\ \alpha|\vec{a}\times\vec{b}|=\gamma|\vec{b}\times\vec{c}|\end{cases}\quad(\because\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0})$$

$$\Rightarrow\triangle PBC:\triangle PAC:\triangle PAB$$
$$=|\vec{b}\times\vec{c}|:|\vec{a}\times\vec{c}|:|\vec{a}\times\vec{b}|$$
$$=\frac{\alpha}{\gamma}:\frac{\beta}{\gamma}:1$$
$$=\alpha:\beta:\gamma$$

說明:

(1) 上面兩個問題，第一題可以說是第 2 題的特例:
將三角形 ABC 的頂點 C 擠壓至線段 AB 上，此時整個三角形被壓縮成線段 AB，而 P 點也就同時被壓至線段 AB 上（因而 $\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ 而成第 1 問題的情形。由第 1 問題的內容而聯想到有第 2 問題這樣子的內容實在是可理解的。

(2) 使上述兩個問題能夠呈現出相同內涵的一個主要工具便是向量。這便給了我們啓示:
工具的選取或是工具的創新，常可擴大視野，帶動創作的楔機。

(3) 將上述兩個問題分別看作是一維空間與二維空間的情形，我們不禁聯想:

三維空間也有一個相同內涵的問題存在嗎？寫成敍述便是:

三角錐 $ABCD$ 內的點 P 如果滿足:

$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}+\delta\overrightarrow{PD}=\vec{0}$ (其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$)

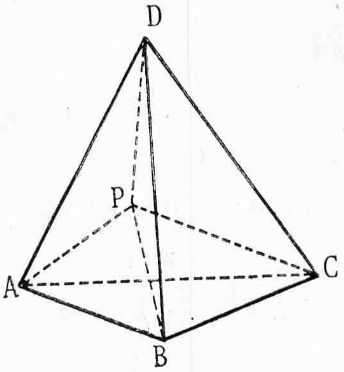
則 $PBCD:PACD:PABD:PABC$

$=\alpha:\beta:\gamma:\delta$ ($PBCD$ 表三角錐 $PBCD$ 的體積)

這個命題正確嗎？不錯！底下給予證明。

證明: 令 $\vec{a}=\overrightarrow{PA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{PB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{PC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{PD}$

由向量的內積與外積的性質（註）



知三角錐 $PBCD$ 的體積$=\frac{1}{6}|\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})|$

$PACD=\frac{1}{6}|\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})|$

$PABD=\frac{1}{6}|\vec{a}\cdot(\vec{d}\times d)|$

$PABC=\frac{1}{6}|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$

又，由已知　　$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=\vec{0}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha\vec{a}\times\vec{a}+\beta\vec{b}\times\vec{a}+\gamma\vec{c}\times\vec{a}+\delta\vec{d}\times\vec{a}=\vec{0}\\ \alpha\vec{a}\times\vec{b}+\beta\vec{b}\times\vec{b}+\gamma\vec{c}\times\vec{b}+\delta\vec{d}\times\vec{b}=\vec{0}\\ \alpha\vec{a}\times\vec{c}+\beta\vec{b}\times\vec{c}+\gamma\vec{c}\times\vec{c}+\delta\vec{d}\times\vec{c}=\vec{0}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+\gamma\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=0\\ \alpha\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+\gamma\vec{d}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})=0\\ \alpha\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})+\delta\vec{b}\cdot(\vec{d}\times\vec{c})=0\end{cases}$$

($\because\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{d})=0$ 等)

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|=\gamma|\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})|\\ \alpha|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|=\gamma|\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})|\\ \alpha|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=\delta|\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})|\end{cases}$$ (註)

$\Rightarrow PBCD:PACD:PABD:PABC$

$=|\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})|:|\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})|:$

$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times d)|:|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$

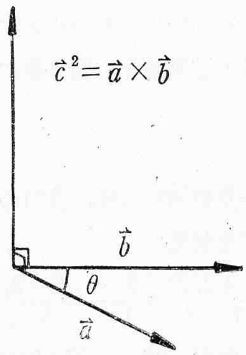
$=\frac{\alpha}{\delta}:\ \frac{\beta}{\delta}:\ \frac{\gamma}{\delta}:\ 1$

$=\alpha:\beta:\gamma:\delta$

(註) R^3 中向量的外積:

對於 R^3 中的非零向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，如果存在唯一向量 $\vec{c}$ 滿足:

(i) $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$，且 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 成右手系位置（見圖示）



(ii) $\vec{c}$ 的長度 $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，其中 θ $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 爲的夾角。

(即 $\vec{c}$ 長度與由 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所張之平行四邊形面積等值)

則稱 $\vec{c}$ 爲 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積，記爲 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

另外，定義 $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$

由上述定義可得出下列性質:

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

$(|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{a}|)$

(2) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(3) $\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$，$\lambda$ 是常數

(4) 假定 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 爲不共面的非零向量，

則 $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

因而

$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})|=|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|$$

其值均表由 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 所張之平行六面體的體積。

特殊情形爲 $|\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|=0$

——本文作者任敎於臺中曉明女中