

英才早逝的黎曼

戴久永

黎曼 (Bernhard Riemann)，鄉下牧師的次子，1826年誕生於漢諾威王國的一個小鎮。童年時代的他就已顯露出對數學的不凡天賦。中學時代，黎曼很幸運地遇到一位善於鑑人的老師，發現他對數學的敏銳領悟力，指導他接近科學的經典作品，所以當他進入大學時，他的學識背景已遠超過當時在大學所授各科學科的水準。黎曼是在1846年，當他十九歲時進入哥廷根大學的，最初專攻神學和哲學，但是不久就獲得家人的首肯改習他最熱愛的數學。或許由於當時大數學家高斯正是哥廷根大學的數學講座，使人們對數學水準的低落感到驚異。事實上高斯和其他大多數的德國大學的教授們一樣，只是講授一些基礎科目。學生們對教授的權威敬畏有加而很隔閡，教授們也很少給有天賦的學生們嘉勉鼓勵。事實上，學生完全沒有機會與教師們討論請益，也不知道教師們如何思考問題。唯一的例外是柏林大學，那裏當時正激盪著民主的思潮。同時傑可比 (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851) 和狄黎克雷 (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859) 兩位大數學家對相當多的學生講授他們自己仍然在思考中的題目。黎曼聽到這個消息，在哥廷根大學呆了一年之後，就前往柏林，在柏林膽怯不愛出風頭的黎曼認識了傑可比和狄黎克雷，並且非常留心聽著兩人的熱切討論。狄氏對黎曼非常有好感，黎曼也對狄氏相當敬重。好些黎曼的論文顯示狄氏的研究結果對他有重大的影響。在柏林過了兩年之後，回到哥廷根，在高斯指導下，完成他的博士論文 (1851)。

論文題目是 *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*，為複變函數理論的一篇基本文獻。為了獲得成為哥廷根大學講師的資格，他發表一篇論文 *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*，並且發表試講，題目是 *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* 前者是關於三角級數及分析基礎，後者則是關於幾何基礎。前一篇是分析狄黎克雷的將一函數展成傅立業級數的條件，其中條件之一為函數必須為「可積分」。這是什麼含意呢？柯西和狄氏都曾經提出一些答案，黎曼則以他自己的定義取代前人對「可積分」所下的定義。他所界定的定義就是我們現在所熟知的「黎曼積分」 (Riemann integral)。直到二十世紀，黎曼積分才又進一步地被推廣成更具一般性的「拉貝格積分」 (Lebesgue integral)。後一篇論文的發表逐漸推廣了空間的觀念，並且於近世導致成為相當廣泛且重要的抽象空間的理論。這是由於當時數學界的風尚，重視數學的嚴密化，同時逐漸趨向於抽象推廣化。黎曼對這種現代數學特徵的影響比十九世紀的任何一位其他數學家都來得大。

黎曼的博士論文導出「黎曼曲面」 (Riemann surface) 的概念，轉而引進所謂拓樸理念於分析學。在當時，拓樸學可說是幾乎完全還沒有經開發的數學新領域，只有 J.B. Listing 於 1847 年在 *Gottinger Studien* 發表過一篇這方面的論文。黎曼證實了拓樸在複變函數理論中的重要性，這篇論文同時澄清了他對一複變函數所下的定義：其實數與虛數部份必須在已知界域內滿足「柯西——黎曼方程式」， $U_x = V_y$ ， $U_y = -V_x$ 。並且進一步要滿足某些邊界與「特異點」 (singularity) 的條件。

黎曼於 1854 年成為哥廷根大學的數學講師 (Privatdozent)，也就是他可以開課，並且向來聽講的學

生收費，在這裏必須向讀者交代一下十九世紀中葉德國的大學的情況。當時科學幾乎與國家的經濟全然無關。大學的設立僅在訓練律師、醫師、教師和傳教士，以及提供貴族子弟和富家子弟渡過引人側目及受尊敬的歲月的場所。只有正教授才領有政府的津貼，並且可教授正規標準課程，這些課程都是一些基礎科目，上課的學生多，因此教授們收到的學費也就多了。這就是為什麼課程水準低落的原因，因為如果課程太難，就沒有辦法收到許多學生，從而影響到教授們的收入，畢竟貴族子弟和富家子弟上大學的目的並非真心向學。講師們則沒有政府津貼並且輪不到教基本正規課程的機會，全然靠來聽課的學生的學費維生，通常，聽課的學生不會多，因此收入也就相當微薄，生活非常困苦。擔任講師是成為正教授 (ordinary professor) 的必經途徑，但是卻無明文規定何時能將一位講師升等為教授。為了照顧特別值得重視的學者而卻沒有正教授的空缺時，政府可任命他為「客座教授」(extra ordinary professor)，使他具有教基本正規課程的資格，增多他的收入，但是這個任命附有條件，言明政府不付任何津貼。

由於黎曼的父親是個收入微薄的牧師，而且子女衆多，自顧尚且不暇，當然在經濟上無法幫助他，因此當黎曼決定順從內心的呼喚，走上了在大學任教的路子，確實有一段日子生活非常困苦，而外在現實環境在他內心也構成重大壓力。在他回到哥廷根後十年之間，他全神專注地發展關於複變函數的性質，複變函數在「亞培爾積分」(Abelian integral) 理論和「西塔函數」(theta function) 的應用的觀念，函數以三角級數的表示法，以及關於幾何基礎方面的研究。這十年的時間使他建立起科學家的聲譽，但是困苦的生活促使他得到肺病，這個病症使他後半生蒙上一層陰影，直到去逝為止。

1855年高斯去逝，狄黎克雷繼承高斯的數學講座的職位。在這個時際，或許是由於狄氏的極力爭取，黎曼得到由政府付給的少量薪津，數目僅為正教授所得薪津的十分之一。四年之後，狄氏去世，黎曼被任命為正教授，繼承了狄氏的遺缺，這時他是三十三歲，從此他再也不必為經濟問題苦惱傷神，但是他的健康情形卻因長期工作過度和營養不良而大受損傷。

哥廷根頗為潮濕並且氣候不定，為了改變環境，他經常到義大利旅行。那裏的氣候比較乾燥，同時天氣晴朗。他並且曾在義大利住過幾年。尤其是義大利比薩，在那裏他的數學同儕，包括比提 (Betti) 和貝特拉米 (Beltrami) 非常敬服他的學識，誠心地招待他。

1862年，黎曼和他的朋友的妹妹結婚，1863年，他的女兒誕生於比薩。三年後，也就是1866年七月，黎曼因身體健康惡化，在一個叫 Lago Maggiore 地方的小鎮去世，年方五十歲。

黎曼雖英年早逝，但是他所留給數學界的，在他少量的已出版的論文集，已有太多的豐富的概念，至今還未為後世數學家研究殆盡。他的每一篇論文都具有其重要性，其中有幾篇甚至開創了全然整新的數學領域。

常有人說黎曼是一位純數學家，事實上，這種說法並不完全正確。雖然他對數學有許多重要的貢獻，他對物理和數學在物質世界的應用也相當注意。他也曾寫過關於熱、光、氣體理論、磁、流體力學和音響方面的論文。他曾嘗試統一重力和光的理論，以及調查人耳的結構的情形。他對幾何基礎的研究在於探究確定什麼是我們物質空間中絕對可靠的知識。他自己曾說過他對物理定律的研究是他主要的興趣所在。身為數學家，他自如地利用數學直覺和物理推論。依據 Felix Klein 所提供的證據顯示，黎曼對複變函數的觀念很可能就是來自他對電流沿著平面流動的研究。事實上，截至上一世紀為止，一個有成就的數學家必定也在應用數學方面有所表現，那時的數學家除了數學中的抽象世界外，他們的腦海中還有一個充滿了各種自然現象的真實世界。

參 考 資 料

1. Dirk J. Struik, *A concise history of mathematics*, 3rd ed. Dover Publications Inc. N. Y.

1967.

2. Morris Klein, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press 1972.
3. Howard Eves, *An introduction to the history of mathematics*, 3rd ed. Holt, Rinehart and Winston
4. *The collected works of Bernhard Riemann*, Dover Publications, 1953.

——本文作者現任教於交大運輸工程與管理系