蘇俄莫斯科大學入學口試的故事

朱 建 正

即使是現在，當西方的年輕數學家受到數學家市場嚴重不景氣的影響時，蘇俄仍然非常注重數學。這個傳統大概可以追溯自 Euler 。許多有才智的高中畢業生都希望能夠擠入莫斯科大學的力學數學系的窄門。進入莫斯科大學就一躍龍門了。

猶太人作爲一個少數民族，在蘇俄的處境很困難，大概是不爭的事實。俄國統治當局在號稱要平衡猶太人在學術界偏高的人口比例的政策下，對力學數學系的考生採用一項差別的口試測驗。就像日據時代，臺灣學生若想進入中學讀書，非得比日本學生加倍用功不可。現在俄國的猶太人或不滿分子的子弟也得經過這場嚴酷的考驗。所有學生先通過筆試，然後是口試。口試每題限二十分鐘完成。這樣子一題接一題下去。

以下是一些考古題。給「黑五類」做的。

1. 證明 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 \geq \cos x;\ 0 < x \leq \dfrac{1}{2}$

2. 求下式所有的有理數解。
$$(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}$$

3. 已知有兩變數函數 $f(x,y)$ 至少取三值。且存在特定的 a，b，使 $f(a,y)$ 及 $f(x,b)$ 分別爲 y 及 x 的非常數函數。求證存在 p，q，r，s，使 $f(p,q), f(r,q), f(p,s)$ 三值兩兩不等。

4. 令 $ab=4, c^2+4d^2=4$，求證 $(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 1.6$

著名的物理學家及不滿分子 Sakharov 從其中選一題他喜歡的做。在他家裏很從容的氣氛下，花了一個多小時才解出，答案相當漂亮，非得有些聰明不可。

第二類是給普通學生做的。

1. 寫出餘弦定律。

2. 函數 $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在原點有導數嗎?

3. $\sin\cos x$ 和 $\cos\sin x$ 那一個大?

4. 做圖 $y=2^{|x-1|}$

以下又有六題也是給「黑五類」做的。

1. 令 $ABCD$ 爲四面體。$DB \perp DC$ 過 D 且垂直 ABC 平面的垂線通過 $\triangle ABC$ 的垂心。求證

$$(AB+BC+AC)^2 \leq 6(AD^2+BD^2+CD^2)$$

（此題爲第12屆高中國際數學奧林匹克試題之一，但考生四小時內只需做三題。）

2. $\sqrt[3]{60}$, $2+\sqrt[3]{7}$ 孰大？

3. $ABCD$ 爲梯形。底爲 AB 及 CD。K 爲 AB 上一點，在 CD 上求一點 M，使得三角形 AMB 和 CDK 的交集（四邊形）爲最大。

此題爲 1973 年，由莫斯科物理科技學院主辦的物理數學學校的優等生的物理數學競試的題目。這些高中生在5小時內只要做3題數學，3題物理。

4. 證明 $x\cos x<0.71$ 對所有 $x\in[0, \pi/2]$ 成立。

5. 有沒有辦法把任意兩個正方形剪成幾個多邊形後，再組成一個正方形？

6. 解

$$\begin{cases} y(x+y)^2=9 \\ y(x^3-y^3)=7 \end{cases}$$

（取自 notices of A.M.S. 1980, 4月）

我們高中生可以做Ⅰ的2，3，4，Ⅱ的1，3，4，Ⅲ的2，6。

——本文作者現任教於臺大數學系