

本期演練試題

談應用數學與高中數學試題之命題

羅添壽 設計

【前言】筆者觀看各校之段考，高三模擬考，只要是應用方面之試題，學生總是交白卷，由此可見我們的學生還是停留在代公式，解題目的學習階段中，若試題稍微應用且要加以分析，思考的試題就束手無策了，筆者有鑒於此特將一些應用方面之試題整理之，專攻學生演練，教師們亦可參考之。

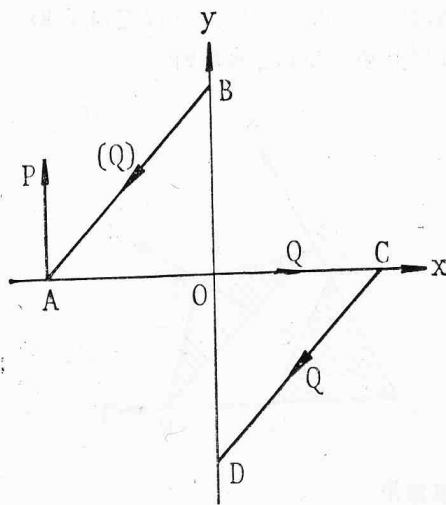
直線方程式之問題

- (單選) 在平面上取定一點 O 為原點，以正東為 x 軸正向，正北為 y 軸正向，得一正交坐標系使一直線型之高速公路 L 表為 $2x - y + 3 = 0$ ，現有五個村落位於 $A(-3, 0)$, $B(-1, 2)$, $C(0, -1)$, $D(1, 1)$, $E(2, 10)$ ，各有一條南北向道路與 L 相通，則這五個村落分別經由南北道路到達 L 的距離和為
(A)12 (B)15 (C)17 (D)18 (E)20
- (單選) 承上題各已知條件，欲在高速公路上取點 p 的路旁設一工廠 (p 至工廠的路程不計) 使五村落 A, B, C, D, E 分別經由南北道路與高速公路 L 而到達工廠的路程和最小，則 $x + y =$
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)以上皆非
- (單選) 承上題 (第 1 題) 五個村落 A, B, C, D, E 但無高速公路，設立一工廠位於 $p(x, y)$ 開闢五條直線型道路分別與五村落相通，使 p 至五村落路程平方和為最小則 $x - y =$
(A) $-\frac{11}{5}$ (B) $-\frac{9}{5}$ (C) $-\frac{7}{5}$ (D) $-\frac{3}{5}$ (E) $-\frac{1}{5}$

(註) 以上三題為北一女數學教師潘振輝老師命題

- (單選) 圖中 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 30$ 公里，質點 P 自 A 點以每分鐘 1 公里之速度在第 (II) 象限內與 y 軸平行之方向運動，同一時間質點 Q 由 B 依 $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$ 的順序作直線運動，假定 $B \rightarrow A$, $C \rightarrow D$ 的速度為每分鐘 $\sqrt{2}$ 公里， $A \rightarrow C$ 的速度為每分鐘 2 公

里。多少分鐘後，質點 P 與 Q 間之距離最短
(A)15分 (B)16分 (C)17分 (D)18分 (E)19分



- (多選) 承上題，多少分鐘後三點 O, P, Q 在一直線上? (注意 O, P, Q 三點有兩次機會共線)。
(A) $15(\sqrt{5}+1)$ 分 (B) $20(\sqrt{2}+1)$ 分
(C) $30(\sqrt{3}+1)$ 分 (D) $20(\sqrt{3}-1)$ 分
(E) $15(\sqrt{5}-1)$ 分

在條件 $3x + 2y \leq 12$ 下，當 $(x, y) = (x_0, y_0)$ 時 $f(x, y) = 33 - x^2 - y^2 + 10x + 10y$ 有最小值 M

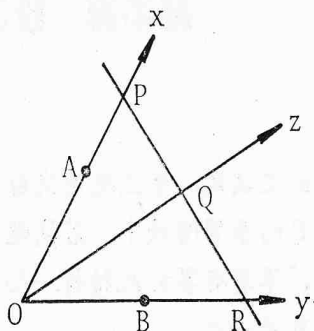
請回答 6, 7 兩題:

- (多選) (A) $x_0 = -2$ (B) $y_0 = 3$ (C) $x_0 = 1$
(D) $x_0 \leq 2$ (E) y_0 為有理數

7. (單選) (A) $M=65$ (B) $M=57$ (C) $M=80$ (D) $M=70$ (E) $M=60$

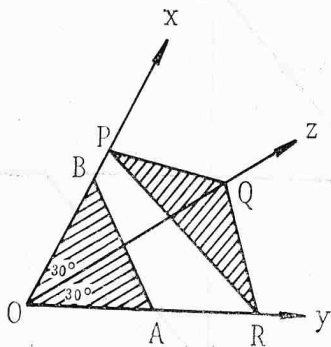
(註) 對此種試題學生必須對 $33-x^2-y^2+10x+10y$ 加以分析

8. (單選) 在平面上 $\angle xOy=60^\circ$, \vec{Oz} 為其平分線 $OA=OB=1$, 今有三動點 P, Q, R 同時自 A, O, B 出發各沿 $\vec{Ox}, \vec{Oz}, \vec{Oy}$ 向前移動如圖所示, 其速度每秒依次為 $1, \sqrt{3}, 2$ 三點 P, Q, R 位於一直線上時需時 t 秒, 則 t (A) $\sin 15^\circ$ (B) $\sin 18^\circ$ (C) $2\cos 36^\circ$ (D) $2\sin 36^\circ$ (E) $2\cos 15^\circ$



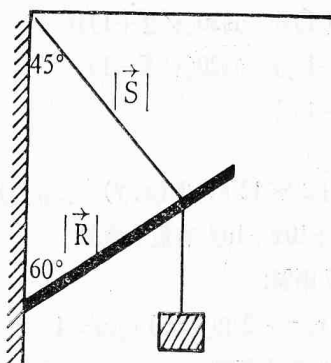
9. (多選) 承上題 $\triangle PQR$ 與 $\triangle OAB$ 面積相等, 需時 t 秒 ($t > 0$) 則

- (A) t 為質數 (B) $3 \leq t \leq 6$ (C) $t \in \{4, 6, 8\}$
 (D) t 為 12 之因數 (E) $t \in \{6, 8, 9\}$



向重及其應用

10. (單選) 下圖中, 物重 1000 公斤, 設支撐桿之重不計, 施力方向為沿桿方向且設支撐桿受力大小為 $|\vec{R}|$,



又設纜繩之張力為 $|\vec{S}|$ 則

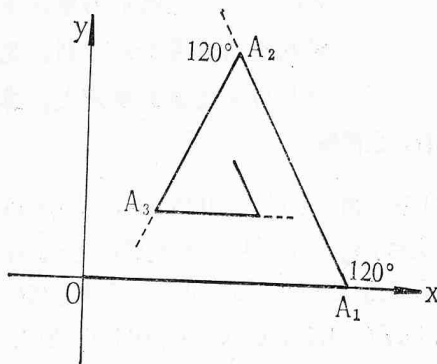
- (A) $|\vec{R}|=1000(\sqrt{3}-1)$ 公斤 (B) $|\vec{R}|=500(\sqrt{6}-1)$ 公斤
 (C) $|\vec{S}|=500(\sqrt{3}-1)$ 公斤 (D) $|\vec{S}|=1000\sqrt{3}$ 公斤
 (E) $|\vec{S}|=|\vec{R}|$

11. (多選) 如圖二點 p 由原地 o 沿 X 軸正向移動 a 到達 A_1 , 在 A_1 向左轉 120° 前進 ar 後到達 A_2 , 在 A_2 向左轉 120° 前進 ar^2 後到達 A_3 , 如此繼續運動, 若 $0 < r < 1$ 設 A_3 坐標為

$$\left(\frac{a(1-r) \cdot p}{2}, \frac{a(1-r)q}{2} \right)$$

則

- (A) $p = 1 + r$ (B) $p = 2 + r$ (C) $q = \sqrt{3}r$
 (D) $q = 2r$ (E) $p + q = 0$



2. (單選) 承上題, 若 $n \rightarrow \infty$ 時此時之坐標為

- (A) $\left(\frac{a(2+r)}{2(1+r+r^2)}, \frac{\sqrt{3}ar}{1+r+r^2} \right)$
 (B) $\left(\frac{a(2+r)}{2(1+r+r^2)}, \frac{\sqrt{3}ar}{2(1+r+r^2)} \right)$
 (C) $\left(\frac{a(1-r)}{1+r+r^2}, \frac{2ar}{1+r+r^2} \right)$
 (D) $\left(\frac{a(1-r)}{2(1+r+r^2)}, \frac{2ar}{2(1+r+r^2)} \right)$
 (E) 以上皆非

三角測量

13. 在水平面上有一正三角形 ABC , 其一邊長為一公里, 此正三角形內部一點的上空有一點 P , 今自三頂點 A, B, C 各測得 P 點之仰角依次為 $60^\circ, 30^\circ, 30^\circ$, 試估計 P 點的高度 h 準確到小數點以下第二位, 設 $h = \alpha + \beta \times 10^{-1} + r \times 10^{-2}$ 其中 α, β, r 皆為 0 至 9 之整數,

- (1) (多選) (A) $\alpha \in \{0, 1, 3, 4\}$ (B) $\alpha \in \{1, 2, 4, 6\}$
 (C) $\alpha \in \{1, 2, 3, 6\}$ (D) $\alpha \in \{4, 5, 6, 7\}$
 (E) $\alpha \in \{0, 7, 8, 9\}$

- ② (多選) (A) $\beta \in \{0, 1, 3, 4\}$ (B) $\beta \in \{1, 2, 4, 6\}$
 (C) $\beta \in \{1, 2, 3, 6\}$ (D) $\beta \in \{4, 5, 6, 7\}$
 (E) $\beta \in \{0, 7, 8, 9\}$

- ③ (多選) (A) $r \in \{0, 1, 3, 4\}$ (B) $r \in \{1, 2, 4, 6\}$
 (C) $r \in \{1, 2, 3, 6\}$ (D) $r \in \{4, 5, 6, 7\}$
 (E) $r \in \{0, 7, 8, 9\}$

(以上三小題合計一題)

14. 地平面上三點 A, B, C 測量一山頂之仰角均為 30° , 已知 $\overline{BC} = 2500$ 公尺, $\angle BAC = 30^\circ$, 若山高取三位有效數字, 令為 $p \times 10^3 + q \times 10^2 + r \times 10$ 公尺 $p, q, r \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

則

- ① (多選) (A) $p \in \{1, 3, 5, 7\}$ (B) $p \in \{2, 3, 6, 7\}$
 (C) $p \in \{4, 5, 6, 7\}$ (D) $p \in \{8, 9\}$
 (E) $p \in \{0, 8\}$

- ② (多選) (A) $q \in \{1, 3, 5, 7\}$ (B) $q \in \{2, 3, 6, 7\}$
 (C) $q \in \{4, 5, 6, 7\}$ (D) $q \in \{8, 9\}$
 (E) $q \in \{0, 8\}$

- ③ (多選) (A) $r \in \{1, 3, 5, 7\}$ (B) $r \in \{2, 3, 6, 7\}$
 (C) $r \in \{4, 5, 6, 7\}$ (D) $r \in \{8, 9\}$
 (E) $r \in \{0, 8\}$

15. (單選) 某人在岸邊小土墩上 A 點看見一漁船在海岸附近作直線航行, 已知土墩高出水面 20 公尺, 當他第一眼看到漁船在 C 點時之俯角為 30° , 五分鐘後船行至 D 點, 再測得船之俯角為 45° 且設 $\angle DAC = 45^\circ$, 則船速
 (A) $3\sqrt{2}$ 公尺/分 (B) $2\sqrt{3}$ 公尺/分 (C) $4\sqrt{2}$ 公尺/分
 (D) 6 公尺/分 (E) $6\sqrt{2}$ 公尺/分

16. 甲、乙兩人分別在 A, B 二點同時測海面上二船, 設船上旗桿頂點各為 P, Q 且 A, B, P, Q 四點共平面 $\angle PAQ = 30^\circ$, $\angle QAB = 25^\circ$, $\angle PBQ = 30^\circ$, $\angle PBA = 65^\circ$, $\overline{AB} = 100$ 公尺 ($\sin 25^\circ = 0.4226$, $\cos 25^\circ = 0.9063$, $\sin 55^\circ = 0.8191$, $\cos 55^\circ = 0.5736$), 則可求得 \overline{PQ} 之長為 $(a+b/10) \times 10^m$ 公尺 (取二位有效數字) 其中 $a \in \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$, $b \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$, $m \in \mathbb{N}$.

- ① (多選) (A) $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $a \in \{2, 4, 6, 8\}$
 (C) $a \in \{1, 4, 5, 6\}$ (D) $a \in \{2, 5, 7, 9\}$
 (E) $a \in \{3, 6, 7, 8\}$

- ② (多選) (A) $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $b \in \{2, 4, 6, 8\}$
 (C) $b \in \{1, 4, 5, 6\}$ (D) $b \in \{2, 5, 7, 9\}$
 (E) $b \in \{3, 6, 7, 8\}$

- ③ (多選) (A) $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ (B) $m \in \{1, 2, 4, 5\}$
 (C) $m \in \{2, 4, 6, 8\}$ (D) $m \in \{4, 5, 6, 7\}$

- (E) $m \in \{3, 5, 7, 9\}$

砲彈問題——物理上之應用

17. 今有高射砲, 砲管與水平夾角為 60° , 砲彈出砲口時之初速度為 600 公尺/秒, 若將空氣阻力不計且已知重力加速度為 $g = 9.8$ 公尺/秒², 試求彈道最高點與水平距離

- ① (單選) 彈道最高點之高度為
 (A) 13776 公尺 (B) 12767 公尺 (C) 13676 公尺 (D) 17676 公尺
 (E) 16776 公尺

- ② (單選) 水平距離為
 (A) 31800 公尺 (B) 32800 公尺 (C) 33800 公尺 (D) 34800 公尺
 (E) 35800 公尺

(提示) ① 拋物體之初速為 $v_0 = 600 \sin 60^\circ$

② 拋物體公式 $h = v_0 t - gt^2/2$

③ 水平距離 = 水平速度 \times 時間

空間上二點間之距離之問題

18. 空間上兩點 P, Q 分別由定點 $A(1, 0, 1), B(1, 0, 0)$ 同時出發繞 z 軸作同方向水平等速圓周運動, P 的速度是 Q 之兩倍, 若 $\angle BOQ = \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 則 $\theta = \alpha$ 時, P, Q 之間最大距離為 M , $\theta = \beta$ 時, P, Q 之間最大距離為 m , 則

- ① (多選) (A) $\alpha = \pi/2$ (B) $\alpha + \beta = \pi$ (C) $\alpha - \beta = 2\pi/3$
 (D) $\alpha = 2\beta$ (E) $\alpha > 2\beta$

- ② (多選) (A) $M > 2m$ (B) $M > 2$ (C) $M - m > 1$
 (D) $M + m > 2.5$ (E) $M = 2m$

球面坐標之應用

19. 假設地球是一個球半徑為 6370 公里, 試求緯度相差 1° 時, 地面距離相差幾公里, (指在同一經線上考慮) 設答案為 $100p + 10q + r$ 公里, 則

- ① (多選) (A) $p \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $p \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 (C) $p \in \{2, 3, 6\}$ (D) $p \in \{4, 5, 9\}$
 (E) $p \in \{6, 7, 8, 9\}$

- ② (多選) (A) $q \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $q \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 (C) $q \in \{2, 3, 6\}$ (D) $q \in \{4, 5, 9\}$
 (E) $q \in \{6, 7, 8, 9\}$

- ③ (多選) (A) $r \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $r \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 (C) $r \in \{2, 3, 6\}$ (D) $r \in \{4, 5, 9\}$

20. 承上題, 又從地圖上可讀出本島的南端在北緯 $21^\circ 54'$, 北端在北緯 $25^\circ 18'$, 利用上面的結果, 估計一下臺灣島南北向的長度設答案為 $100u + 10v + w$ 公里設 $\pi = 22/7$

則

- ① (多選) (A) $u \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $u \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 (C) $u \in \{2, 3, 6\}$ (D) $u \in \{4, 5, 9\}$
 (E) $u \in \{6, 7, 8, 9\}$
- ② (多選) (A) $v \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $v \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 (C) $v \in \{2, 3, 6\}$ (D) $v \in \{4, 5, 9\}$
 (E) $v \in \{6, 7, 8, 9\}$
- ③ (多選) (A) $w \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $w \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 (C) $w \in \{2, 3, 6\}$ (D) $w \in \{4, 5, 9\}$
 (E) $w \in \{6, 7, 8, 9\}$

圓錐曲線之應用

21. 設直圓柱底直徑 20cm, 今一平面與直圓柱之底面成 60° 夾角, 而將直圓柱截成一橢圓, 則

- ① (單選) 橢圓上任一點至兩焦點間之距離為
 (A) 30 (B) $20\sqrt{3}$ (C) 40 (D) $40\sqrt{3}$ (E) 45
- ② (單選) 橢圓之離心率 e 為

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

22. 設平面 $E: 3x + \sqrt{6}y + z - 6 = 0$ 截圓柱面 (圓筒面), $C: x^2 + y^2 = 2$ 之截痕 Γ 為: 若 Γ 在 E 上所圍區域之面積為 k , 且

$$k = \left(a + \frac{b}{10}\right) \times 10^m$$

取兩位有效數字, 其中

$a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, $m \in \mathbb{N}$, 則

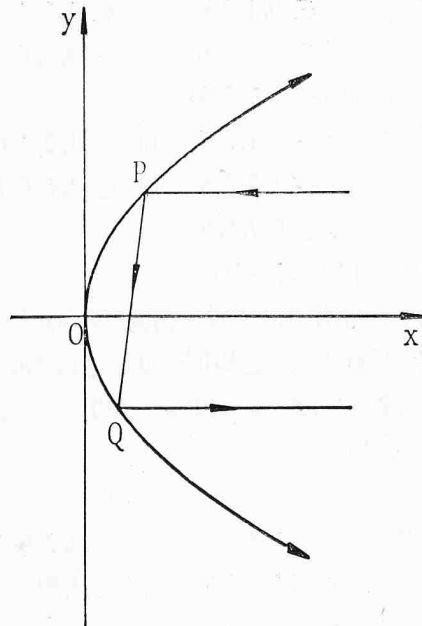
- ① (多選) (A) $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $a \in \{2, 4, 6, 8\}$
 (C) $a \in \{1, 4, 7, 9\}$ (D) $a \in \{2, 5, 7, 8\}$
 (E) $a \in \{3, 6, 8, 9\}$
- ② (多選) (A) $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 (C) $b \in \{0, 1, 4, 7, 9\}$ (D) $b \in \{0, 2, 5, 7, 8\}$
 (E) $b \in \{3, 6, 8, 9\}$
- ③ (多選) (A) $m \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $m \in \{2, 4, 6, 8\}$
 (C) $m \in \{1, 4, 7, 9\}$ (D) $m \in \{2, 5, 7, 8\}$
 (E) $m \in \{3, 6, 8, 9\}$

23. (多選) 設與 x 軸平行而進行之光線在拋物線 $y^2 = x$ 上之二點 P, Q 反射 (如圖) 令點 P 之 y 座標為 $a (a > 0)$, PQ 之長為

$$la^2 + \frac{1}{16a^2} + m,$$

則

- (A) $l = 2$ (B) $l = 1$ (C) $m = 1/3$ (D) $m = 1/2$
 (E) $m = 1/4$



24. (多選) 承上題設 PQ 長之最小值為 L , 此時 a 之值為 a_0

- (A) $L = 2$ (B) $a_0 = 1/3$ (C) $L = 1$ (D) $a_0 = 1/2$ (E) $a_0 = 1/4$

(提示) 由光學原理知, 光經折射, 必過焦點

期望值

25. 某工廠產品可分成下表內所示的 4 個等級, 各級評分各為 3 分, 2 分, 1 分, 0 分, 今知由此工廠任取一件產品的期望值是 2.2 分, 求 p, q, r, s 之值。但 p, q, r, s 為大於 1 之正整數且 $p < q < r$ 。

等級	評分	製品中所佔的比例
1 級品	3 分	p 個中有 1 個
2 級品	2 分	q 個中有 1 個
3 級品	1 分	r 個中有 1 個
4 級品	0 分	s 個中有 1 個

- ① (多選) (A) $p \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 (B) $p \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$
 (C) $p \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
 (D) $p \in \{2, 20, 200\}$
 (E) $p \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$
- ② (多選) (A) $q \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 (B) $q \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$
 (C) $q \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
 (D) $q \in \{2, 20, 200\}$

- (E) $q \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$
- ③ (多選) (A) $r \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 (B) $r \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$
 (C) $r \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
 (D) $r \in \{2, 20, 200\}$
 (E) $r \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$
- ④ (多選) (A) $s \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 (B) $s \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$
 (C) $s \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
 (D) $s \in \{2, 20, 200\}$
 (E) $s \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$

函數與極值問題

6. 有一房地產公司擁有 50 戶公寓，若每戶每月房租 2 萬

元，則可全部出租，但若每戶房租每提高 500 元，就要增加一個空戶，而每當房屋出租後，公司須每戶支出 1000 元的管理費，試求使總收益為最大時，每戶的房租及此時的總收益。設每戶房租為 $p \times 10^4 + q \times 10^3$ 元時，有最大的總收益 $a \cdot 15^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3$ 元，且 p, q, a, b, c 皆為 0 至 9 之整數，則

- ① (多選) (A) $p \in \{1, 3, 5, 7\}$ (B) $p \in \{2, 3, 6, 7\}$
 (C) $q \in \{1, 3, 5, 7\}$ (D) $q \in \{2, 3, 6, 7\}$
 (E) $q \in \{4, 5, 6, 7\}$
- ② (多選) (A) $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (B) $a \in \{2, 3, 6, 7, 8\}$
 (C) $b \in \{4, 5, 6, 7, 0\}$ (D) $b \in \{2, 3, 6, 7, 8\}$
 (E) $c \in \{4, 5, 6, 7, 0\}$

——羅添壽老師現任教於臺南新化高中