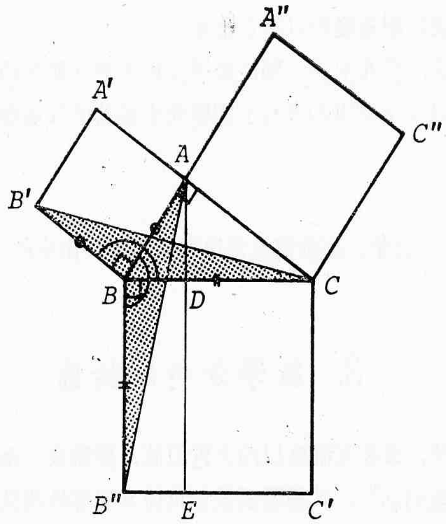
淺談代數、幾何與分析

賴漢卿

傳統數學，以比較大的分枝來說，自古以來大致分成代數、幾何與分析。新近雖然分得較細，那只不過是各人研究之一小分科，事實上數學本身是一個整體，各分科之間也多有連繫，不易眞正的分開，尤其是基礎數學，不論你將來想走代數、幾何、分析或應用方面，仍得要有相當的基礎。本文主要目的，是介紹這三方面的原始觀念，以及其名稱概念，讓高中或大學初年級的學生，能對於數學的名稱有一個概括的認識。內中的許多資料及看法，是參考京部大學名譽教授秋月康夫先生在「數學セミナー」的報導而來。

1. 代數與幾何的歷史

到目前爲止，我們在代數中看到的是以數或文字表成式子爲對象，用來學習其計算法。幾何則以圖形爲對象，考察其特性及其量的一門數學，其原名爲 Geometry 似乎音譯爲幾何 (Ge-o)。就像這樣，在代數爲數、式；而幾何爲圖形，是有着嚴明的區別，其間看來在他們相互間之關係似乎很少，實則不然。舉個例來說，像$\sqrt{2}$，雖然可以無限地計算其近似值，可是卻永遠不可能寫成一小數。但如果以單位長爲一邊之正方形的對角線，則可斷定其長爲$\sqrt{2}$單位。這是由直角三角形之邊的平方定理（畢氏定理），可以確知的事實。畢氏定理的證明有許多種方法。如下圖所示的證明，正是充分表現幾何意味的一種。



($2\triangle BCB'=$正方形 $ABB'A'$ 的面積；$2\triangle BB''A=$矩形 $BDEB''$ 的面積)

在歷史上，希臘人對於數的記述較差拙，所以看不到代數的發展，但印度則巧妙地運用 0，做爲十進位的記數法成功以後，代數的想法才開始萌芽。因此在希臘的幾何學全盛時期，對於用新結果求其計算的代數，乃完全放在探究爲什麼其爲正確的理由做重點；卽欲找出更簡單，更基本的性質爲依據，做爲論證方法。於是導出追溯萬事根源的希臘哲學精神，因之而有公理化體系，以及有其輝煌的歐幾里得幾何之建

立。

由於當時，過分沈溺於嚴正圖形的興趣，以致歐氏幾何，乃止於圓錐曲線的研究。

2. 笛卡兒，牛頓，萊布尼茲

數學以及理論科學，最輝煌的時代，就是在笛卡兒，牛頓，萊布尼茲三位天才所活躍的第十七世紀。

笛卡兒有着近代精神開山祖之稱。他在其著作方法的敍說中，有下面一段用意的敍述:

「自明性以外的一切，都不能給予承認，由自明性且正確（敍述）的公理出發的理論，開展出來的就是數學。所以沒有比數學更確實的學問。看着有這麼好的數學，對人生沒有像預想的那樣有效益，（卽不能成爲重要的學問），那到底爲什麼呢？可說是因幾何立刻需要很深難的想像力，而代數則有很繁瑣的規約，限制其計算所致。因此我們得極力採用各門的長處，截去其短處，提供出完全新且好的方法來。」

於是笛卡兒乃在平面上導入直交的二直線，在此平面上的點P，以此兩直線爲坐標軸，決定一數組(x,y)做爲P的坐標。使平面上的曲線，如以原點爲中心，半徑爲r的圓，與方程式 $x^2+y^2=r^2$ 相對應；而在此曲線上之點坐標 (x,y)，則滿足此方程式。像這樣將圖形用式子來表現，將以往僅用想像力去觀察圖形的工作，變換成適當的式子，以便用計算來處理問題——這就是他開創了解析幾何的由來。以此方法，乃將希臘人覺得很難於解明的圓錐曲線，歸倂在二次方程式中，簡易地解決了。

笛卡兒坐標的解析精神，不只是創立了解析幾何，也奠定了這時代，與天體物理相呼應的理論科學的基礎。卽 Galileo (1564-1642) 的**慣性法則**觀念，Kepler (1571-1630) 的**運動法則**，Galileo 的**落體運動**，與**萬有引力**所引起之現象，由牛頓獨自想出以微積分法去證明等。由這些天體運動法則之產生，地上之牛頓力學的創設，乃使今天的理論科學基礎得以建立起來。

另一方面，以重視函數概念的萊布尼茲，則從數學分析方面（與牛頓分別獨立創始）想出微、積分。

在代數與幾何之發展史，以中文寫成的書有王懷權先生編著的代數學發展史及幾何學發展史，可供欲探知這方面的讀者參考。

下面我們來介紹數學分析。這是以函數概念爲出發點而拓展出來的一門數學，可說是數學整體的重心。

3. 數學分析的輪廓

我們想在某點 $x=a$ 的近傍，求在某限度以內之近似值，便構成一函數的近似式子；由此再將近似的程度逐漸提高，（要是屬於可能的話），其極限函數便可使其局部性明朗化。以這種結果，我們可以求得高度的近似值（函數值），進而獲得函數變化的情形。這種探討與思考，可看作分析（解析）數學的一面。

取一個初等且又是古典的例子來研討如何能做其近似。首先以自然繁殖的問題爲例來說明：「如細菌的繁殖，與當時的總數成比例增加」，以這種增加現象來觀察，就如下面所述之本利和的計算中，所看到的複利事象之近似系列相同。

實際上，年利率爲 j，本金爲 a 之單利，在一年終了時可得的本利和是 $a(1+j)$（如圖一）。如果半

年復利一次，則半年後之本利和爲 $a(1+j/2)$，這是後半年開始的本金，所以在後半年終了時（即開始到一年終了時）的本利和（如圖二）爲

$$a\left(1+\frac{j}{2}\right)^2$$

要是再換成一年三次複利，也可同樣的考慮，在一年終了時之本利和（如圖三）爲

$$a\left(1+\frac{j}{3}\right)^3$$

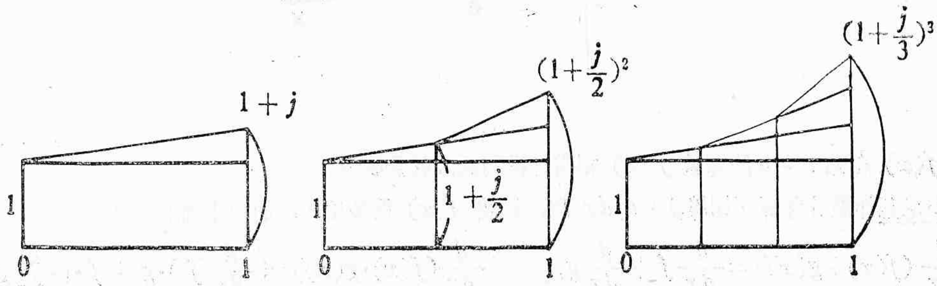


圖 一　　圖 二　　圖 三

一般，若一年以m次換成複利計算，則一年後的本利和爲

$$a\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

在此自然繁殖現象下，m無限地增大所得的極限，是易於看得出來，所以應爲

$$a\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right\}$$

但不管那本書，極限都寫作

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}=e=2.71828\cdots\cdots$$

而

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right\}=e^j(=\exp(j))$$

下面我們來看看函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的近傍，以多項式

$$b_0+b_1(x-a)+\cdots\cdots+b_n(x-a)^n \qquad (1)$$

來近似。即在(1)的形式中，求能與 $f(x)$ 最爲接近的

$$c_0+\frac{c_1}{1}(x-a)+\frac{c_2}{2!}(x-a)^2+\cdots\cdots+\frac{c_n}{n!}(x-a)^n \qquad (2)$$

例如 $f(x)=\sin x$，$a=0$ 時，就有

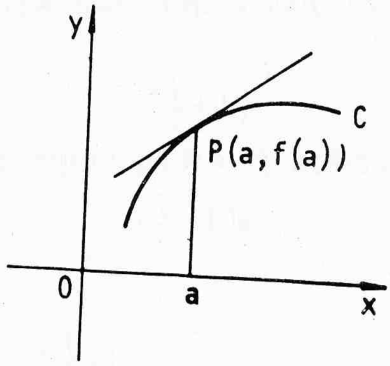
$$\sin x \doteqdot x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

這到底是如何得到的呢？顯然，$c_0=f(a)$，而 c_1，可如下來着想：問題是通過點 $P(a,f(a))$ 的直線

$$y=f(a)+b_1(x-a) \qquad (3)$$

中，與函數 $f(x)$ 的圖C最爲接近者，那不外乎求曲線C在點P的切線。那就是求

$$c_1=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



也與求 $f(x)$ 在點 $x=a$ 的導數 $f'(a)$ 相當。換句話說就是微分。

萊布尼茲作微分運算（切線法）d/dx 時，只要 $f(x)$ 爲多項式，而用下面的道具

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}f+\frac{d}{dx}g, \qquad \frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x))=\left(\frac{d}{dx}f\right)\cdot g+f\cdot\left(\frac{d}{dx}g\right)$$

乃得下面的結果:

$$\frac{d}{dx}x=1, \quad \frac{d}{dx}x^2=2x, \quad \frac{d}{dx}x^3=3x^2, \cdots\cdots$$

依我們前面所舉的例: $f(x)=\sin x$，於 $a=0$ 時，即在 $x=0$ 附近有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

所以

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

即 $c_1=1$。

其次對於 c_2，乃以二次曲線

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)+b_2(x-a)^2$$

將 b_2 逐漸變化，則與曲線 C 最接近的函數就能出現。解此問題的定理，就是所謂的**平均值定理**（平均值定理在敎微分法的課程中，視爲初步且重要外，尙有其他理由値得重視的，即有許多根基有賴此定理才能建立）。

設在給定的區間 $(a, a+h)$ 內，$f(x)$ 爲可微分，則當 k 爲使

$$f(a+h)=f(a)+k\cdot h$$

時，必存在 $\theta(0<\theta<1)$，滿足

$$k=f'(a+\theta h)。$$

將此結果擴張至一般有 n 次可微之函數時，k 則爲滿足

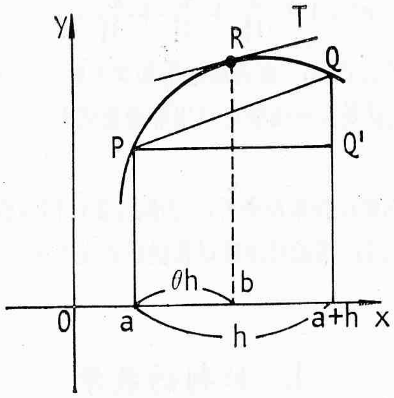
$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}h+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{k}{n!}h^n$$

且存在 $\theta\ (0<\theta<1)$，使 $k=f^{(n)}(a+\theta h)$（開始之問題就是上式 $n=1$ 的情形）。

今再回到原先的問題來看:

$$k=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

此値從下圖可看到與 $\tan\angle Q'PQ$ 相等，即等於 PQ 之傾斜度。



在圖示區間內之各點，都可自 $f(x)$ 的圖形上引切線，此時切線與弦 PQ 平行，所以能在 f 圖形上存在一點 $R(b,f(b))$ 引切線。此處因 $b-a<h$，令 $\theta=(b-a)/h$，$0<\theta<1$，則 $b=a+\theta h$。這種方法欲擴張成一般情形，則因 $n=1$ 時成立，故以數學歸納法證明卽可。

當 $f(x)=\sin x$ 時，由其微分法知

$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)-\cos x,\cdots\cdots$$

於是 $a=0$ 時，

$$f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\cdots\cdots$$

一般情形爲

$$f^{(2n)}(0)=0,\quad f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$$

以此代入擴張的平均值定理得

$$\sin h=\frac{1}{1!}h-\frac{1}{3!}h^3+\frac{1}{5!}h^5-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(\theta h)\cdot h^{2n}$$

由此式卽得前述近似值

$$\sin h \fallingdotseq h-\frac{1}{3!}h^3+\frac{1}{5!}h^5-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

由上述擴張的平均值定理，知近似值的誤差 ρ 爲

$$\rho=f^{(2n)}(\theta h)\frac{h^{2n}}{(2n)!}=(-1)^n\sin\theta h\frac{h^{2n}}{(2n)!}$$

因而不論 h 的值如何，

$$|\rho|<\frac{h^{2n}}{(2n)!}$$

但上式右邊，當 n 無限增大時，則該值愈小，因此乃知 $\sin h$ 可以展成無限的冪級數

$$h-\frac{1}{3!}h^3+\frac{1}{5!}h^5-\cdots\cdots$$

這不只是 $\sin x$，對於 $\cos x$ 也完全一樣，卽知

$$\begin{cases}\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\\[2ex]\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\end{cases}$$

關於指數函數 $f(x)=e^x=\exp(x)$，也可以知道

$$f'(x)=f''(x)=\cdots\cdots=e^x$$

所以幾乎完全一樣的方法可得下列冪級數:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$$

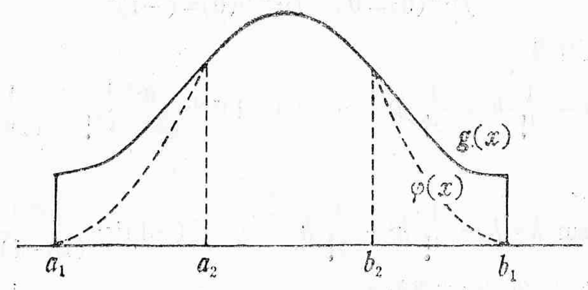
因此這些函數，都依各多項式取其近似値，而逐漸地增加其次數。這不只是局部性可以，就在廣大的區間，也可以無限地接近原函數。也就是說原函數可以用冪級數來表現。

在萊布尼茲時代，對於三角函數或指數函數外，仍期待對任何函數，祇要非常平滑（可以逐次地微分），在近似法中，以增高其近似度，都能將函數以冪級數表現出來。但這種希望，到後來我們知道是不可能的。

4. 批判的數學

在一點的近傍，若能表成冪級數的函數，則稱爲**解析**。設 $f(x)$ 在含 $x=a$ 之區間爲解析時，不論 a 是如何，在 $x=a$ 任意小近傍，$f(x)$ 都可決定一值，則可證明在解析函數 $f(x)$ 所存在的全領域中，$f(x)$（之值）就因而完全決定。

但若只以函數爲平滑，而有無限多次之可微分性（此時寫作 C^∞）條件，則不一定能完全決定。蓋因如 $g(x)$ 在 $a_1<x<b_1$ 之各點爲 C^∞ 且 $g(x)\neq 0$ 時，取 $a_1<a_2<b_2<b_1$ 使一 C^∞ 函數 $\varphi(x)$ 在 $a_2<x<b_2$ 與 $g(x)$ 完全相等，而在 $x>b_1$ 及 $x<a_1$ 時，$\varphi(x)=0$，則在 $a_1<x<b_1$ 之區間，C^∞ 的函數並未能完全決定，將上述 $g(x)$ 與 $\varphi(x)$ 的圖表示如下，則易於瞭解。



不過此 $\varphi(x)$ 並不是解析，此原因是 $\varphi(x)$ 在 $x<a_1$ 時爲0；要是 $\varphi(x)$ 爲解析，則在 $a_2<x<b_2$ 也必爲 $\varphi(x)=0$，故不可能在此區間爲 $\varphi(x)=g(x)\neq 0$。因此我們知道平滑函數的近似，是不可能像萊布尼茲當時所期待的能成立。

以直觀的感受，對於連續函數，除了有限個點以外，似乎該能從函數圖形來引出切線。換句話說，除了一些點以外好像都可微分。但 Weierstrass 證明了在某區間連續卻在各點都不能微分的函數是的確存在的。

因此在「無限地接近」或「在無限……」等含有無限問題時，都必須要有嚴正的檢討。（像這種理論判斷之被要求，是 Cauchy 等在 18 世紀所用的無限級數中揭發了有不收斂的級數存在）。

首先函數的概念，由集合到集合的**映射**來說，沒有比**連續映射**更爲重要的了。此基本概念就是**位相**（以往我們叫做**拓撲**，是由 topology 音譯而來），這種概念得先定義：**極限值**、**集積值**、**連續性**等不可。於是就有（ε,δ）形式登場。這些就留給「位相空間論」到「$\varepsilon-\delta$」的故事中去說明，在此我們就省略了。

總之數學分析之對象，基礎性範圍，必須在一維之連續統的**實數**確立，Dedekind 切斷的定義，也在此主旨下，以公理性構成的。

在這裏雖沒涉及抽象代數的諸概念，以及位相空間的基礎，但它們都是建立在公理法則下，負起希臘的幾何學精神，是必需在此強調。

5. 實數，虛數，複（素）數

由 Dedekind 切斷，有理數體的位相閉包，乃得實數，在實數全體的代數運算成爲一體，且作成順序集合。因此對於任意實數 x，$x^2>0$，所以二次方程式

$$x^2+1=0$$

在實數體 $\boldsymbol{R}$ 中不會有根存在。不過要是新導入記號 i（稱爲**虛數單位**），

$$i=\sqrt{-1}\,;\,(i^2=-1)$$

且取集合

$$C=\{a+ib\,|\,a,b\in \boldsymbol{R}\}。$$

在 C 中定義相等的元素爲

$$a+ib=a'+ib'\Longleftrightarrow a=a',\ b=b'$$

則成爲大家所熟習的**複數體** C，其元素 $a+ib(a,b\in\boldsymbol{R})$ 稱爲**複（素）數**。

實數係數的二次方程式，在 $\boldsymbol{R}$ 中並未必恒存在有根，然將 $\boldsymbol{R}$ 擴大到 $\boldsymbol{C}$，就成爲衆所週知，在 $\boldsymbol{C}$ 中必有兩根。

要是方程式 $f(x)=0$ 之次數增加，如 3 次，……，n 次之方程式 $f(x)=0$，能恒有解，那就非擴大其係數體爲複數係數體 $\boldsymbol{C}$ 不可。這就是下列所謂的**代數基本定理**。

定理 實係數體 $\boldsymbol{R}$（因而爲複數係數體 $\boldsymbol{C}$）上之任何次數方程式 $f(x)=0$，必定有一根（此根爲複數）。

這種虛數 i，在代數上甚具有意義，尤其在函數論上，更有驚人的性能。

我們若以複數變數 z，取代實數變數 x，y，並寫成

$$z=x+iy$$

來考慮複數值的可微分函數:

$$w=U(x,y)+iV(x,y)$$

（U,V 爲實變數 x，y 的函數）。於此若設 z，$\bar{z}$ 爲共軛之複數，則

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

形式上複變數函數恒能寫成

$$w=F(z,\bar{z})$$

今設 z 在某領域 D 內變化，而 w 則隨變數 z 而變化，寫作 $w=f(z)$ 之函數，如果 $w=f(z)=U+iV$ 在 D 內可微分——一般可微分之複變數函數稱爲**正則**，（在單變數之複變數函數時正則與解析是等價的）則

$$w=U(x,y)+iV(x,y)$$

與

$$z=x+iy$$

兩式之間，與 x，y 無關之函數關係式（即 Jacobian）成立，此關係式在 D 內爲

$$\frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(U+iV,x+iy)}{\partial(x,y)}=0$$

即

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)+i\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}\right)=0$$

因此實數部分及虛數部分別都等於0，也就是 **Cauchy-Riemann 等式:**

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

在D內成立。

利用 Cauchy-Riemann 等式，很容易便導出 Cauchy 的積分定理。爲此先設領域D的邊界 $\partial D=C$ 是單純連結可求長度的曲線，若函數 $A(x,y), B(x,y)$ 在D內可微分，則由 Green 的定理得知

$$\int_C A(x,y)dx+B(x,y)dy=\iint_D\left\{\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right\}dxdy$$

所以

$$\int_C(U+iV)(dx+idy)=\int_C f(z)dz=\iint_D\left\{-\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)+i\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right\}dxdy$$

上式右端以 Cauchy-Riemann 等式代入便得

$$\int_C f(z)dz=0$$

這就是 **Cauchy 的積分定理**。

於是以 Cauchy 的積分定理，就很容易得到 Cauchy 的積分公式:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

式中 $z\in D$, $C=\partial D$ 而 $\zeta\in C$，$f(z)$ 在D內正則。

由此公式乃得一著名的性質; 即 $f(z)$ 在 $z_0\in D$ 的近傍爲解析（即能展開成 $z-z_0$ 的冪級數）。

在實變數 x 之函數，屬於 C^∞ 之函數有許多種類，但在複變數 z 之函數，是 C^∞ 者，卻僅有解析函數一種而已。對於虛數 i，深藏許多很有趣的性質。特別是對於指數函數及三角函數來說，有

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\cdots$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\cdots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\cdots$$

若在 e^z 之展式中，將 z 改換以 ix 代入便得

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\right)$$

右邊的展開，可看出分別是 $\cos x$ 與 $\sin x$，故得

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

這就是**尤拉 (Euler) 公式**。這一節我們從自然繁殖問題，想到指數函數，到後面與三角函數竟有如此密切的關係，眞令人不可思議，這也是 Euler 的眼光有着驚人的洞察力。

下一節我們介紹矩陣之表現，當能看出此公式是很自然可得到的。

6. 向量與矩陣

平面上所有向量，都表示由原點爲始點之位置向量。設 (e_1, e_2) 爲一組直交軸上的單位向量，任意向量 $\overrightarrow{OP}$ 以列向量 (x,y) 表示，

$${}^t(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

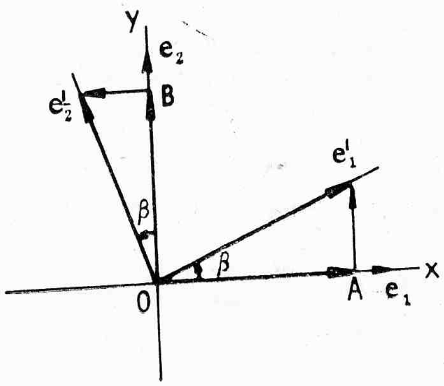
表示 (x, y) 的轉置，是一行向量。於是位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 可用單位直交向量 (e_1, e_2) 為算子作用於 ${}^t(x, y)$ 而得，即

$$\overrightarrow{OP}=e_1x+e_2y=(e_1, e_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

單位向量 (e_1, e_2) 之軸 OX, OY 旋轉一個β角時，$(e_1, e_2)\longrightarrow(e_1', e_2')$，此時 $\overrightarrow{OP}\longrightarrow\overrightarrow{OP'}$ 故

$$\overrightarrow{OP'}=(e_1', e_2')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

但是此時的 e_1' 是 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{Ae_1'}$，$e_2'$ 是 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{Be_2'}$（如下圖）

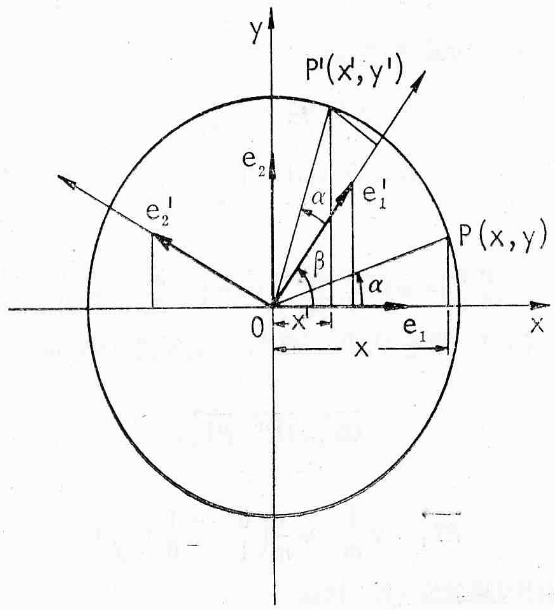


而 $\overrightarrow{OA}=e_1 \cos \beta$，$\overrightarrow{Ae_1'}=e_2 \sin \beta$（即大小為 $\sin \beta$，方向為 $\mathbf{e}_2$），$\overrightarrow{OB}=e_2 \cos \beta$，$\overrightarrow{Be_2'}=-e_1 \sin\beta$ 結果

$$\begin{cases} e_1'=e_1 \cos \beta+e_2 \sin \beta \\ e_2'=e_1(-\sin \beta)+\mathbf{e}_2 \cos \beta \end{cases}$$

換句話說

$$(e_1', e_2')=(e_1, e_2)\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$



因此

$$\overrightarrow{OP'}=(e_1', e_2')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(e_1, e_2)\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

令上式右邊爲

$$(e_1, e_2)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

則

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\overset{\rightarrow}{=}\mathrm{Rot}_\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Rot_β 表示旋轉角β，視作一算子以左乘作用於向量 ${}^t(x, y)$。

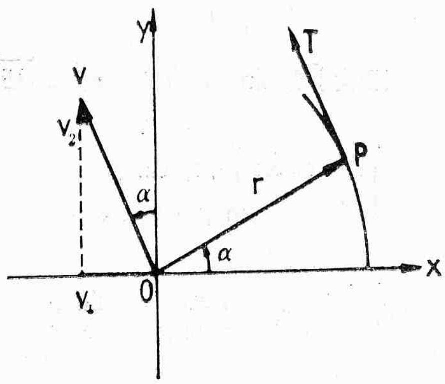
如前頁圖取 $\overline{OP}=1$，$\angle XOP=\alpha$，$\angle XOP'=\alpha+\beta$，${}^t(x, y)={}^t(\cos\alpha, \sin\alpha)$; ${}^t(x', y')={}^t(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$，以這些代入(1)式得

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

於是便得三角函數的兩角和定理

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$$

下面我們來觀察在力學上之旋轉性質：以原點爲中心，定角速度ω的旋轉。如下圖在點P的速度向量之大小爲 $r\omega$ $(\overline{OP}=r)$，其方向是沿圓O在點P之切線



$\overrightarrow{PT}$，於是速度向量 $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$ 的分量 v_1, v_2 爲

$$v_1=\omega r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\omega r\sin\alpha$$

$$v_2=\omega r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\omega r\cos\alpha$$

所以

$$\mathbf{v}=r\omega\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}=\omega\begin{pmatrix} -r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}=\omega\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}=\omega\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

如果 t 秒後轉了角β，則 $\omega t=\beta$。當連 O, P 之繫線，在此瞬間斷掉，則點P必循切線方向直進，於是經 t/m 秒後的位置向量就是

$$\overrightarrow{OT_1}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PT_1}$$

其中

$$\overrightarrow{PT_1}=\mathbf{v}\frac{t}{m}=\omega\frac{t}{m}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

T_1 表示P在 t/m 秒後經由其切線抵達之點。因此

$$\overrightarrow{OT_1}=\left(E+\frac{\beta}{m}J\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \left(\text{令其}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$

此處

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

同樣的要是以 T_1 爲初始點，由 T_1 沿切線方向，再經 t/m 秒後，抵達 T_2，則

$$\overrightarrow{OT_2}=\left(E+\frac{\beta}{m}J\right)\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\left(E+\frac{\beta}{m}J\right)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

按此順序，由 P 至 T_1，T_1 再至 T_2……經折線，最後到 $T_m=(P'')$，則由上述原理得

$$\overrightarrow{OP''}=\left(E+\frac{\beta}{m}J\right)^m\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

於是 m 無限增大時，則上面之折線性運動，就可想像爲角速度 ω 的回轉運動（視作逐次近似法），而於 t 秒後的位置 $\overrightarrow{OP'}$ 爲

$$\overrightarrow{OP'}=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(E+\frac{\beta}{m}J\right)^m\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\}$$

於是

$$\mathrm{Rot}_{\beta}=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=(\cos\beta)E+(\sin\beta)J$$

也可如下表成

$$\mathrm{Rot}_{\beta}=\lim_{m\to\infty}\left(E+\frac{\beta}{m}J\right)^m$$

但實數體 $\boldsymbol{R}$ 與 E 作積，再添加與 J 作積的集合:

$$\{a\cdot E+b\cdot J\,|\,a\cdot b\in\boldsymbol{R}\}$$

則由 $J^2=-E$ 乃得與複數體:

$$\{a+bi\,|\,i^2=-1\}$$

同構之體（可換體），此處 J 與 i 對應，而

$$a\cdot E+b\cdot J=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

與 $a+bi$ 之實數表現對應。故如同在自然繁殖時所敍述的一樣，可寫成

$$\lim_{m\to\infty}\left(E+\frac{\beta J}{m}\right)^m=\mathrm{Exp}(\beta J)$$

這就是與 Euler 公式相當之公式，很自然的可導出下式:

$$\mathrm{Exp}(\beta J)=(\cos\beta)E+(\sin\beta)J$$

7. 綜合摘要

由自然數開始，如在其間的四則運算一樣，可自由地進行四則的數，首先得將數的概念推廣到有理數。有理數全體的集合，構成一代數體的有序集合。再取有位相的閉包，作成實數體，因而建立了一維連續統上之數學分析理論。

將實數體 $\boldsymbol{R}$，添加虛數 $i=\sqrt{-1}$ 所成的複數體 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}(\sqrt{-1})$ 爲代數封閉，所以複（素）數是可看到的數之最終完結者。但前節初所述之 Euler 公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

就此也足夠奇妙的。因而我們不限定基礎的對象爲「數」，而如前節所說明的推廣到「矩陣」那樣，以回轉公式說明微分法，是在力學上極爲自然的反映。

對於數學之基本概念的擴展，起先看來眞有不可思議的關係，實際上是屬當然的結果，又在開始認爲「數學雖未能明確的證明，是否就此使用」之問題，在新概念上，是可由嚴然的論理得到，乃是大家所知道的事實。

例如對 C^{∞} -微分形理論，在 L. Schwartz 超函數（或稱荷布）中，Dirac 函數才開始在嚴密數學上之概念建立。

像這樣的基本概念之擴張，可以說是由代數——有時爲幾何——方法乃致於態度上所得的。這裏可看出代數、幾何與分析，有極深奧的交瑣關係。

因而 Dirac 函數也是一樣，在理論物理上發生。由複變數函數所引發的超函數，據說也常應用於量子論上，又如前年（1978年）在赫爾辛基（Helsinky）的國際數學家會議中也談到，數學在今天與理論物理有極密切的關係。

所謂數學分析，可說是微積分，向量空間所涉及有關連續之理論。在文中似乎沒談到什麼便結束了。但今天的理論物理，用到很深的抽象數學，希望能互相勉勵發展數學。然在數學內部中，幾何、代數、分析，今天是否可以像無窗子的房子那樣，各不相干地閉門就各自專門的領域去鑽研呢？是一個大家應探討的問題。

——本文作者現任教於清大數學系