機率名題二則漫談

戴 久 永

機率論是討論各種偶發事件的發生及尋求其所遵循的法則的數學理論。關於機率論早期演進的情形，本刊曾有詳細敍述(1)。近半世紀以來，機率論已由許多散佈孤立的小問題的研究發展成爲一門相當具廣涵性和深度的數學分支，不但與其他許多數學分支交互影響，同時在各種應用科學諸如統計，作業研究，生物學，經濟學，和心理學的數學化中扮演重要角色。

第一本對機率論做系統性整理的書可能要算 W. Feller 的 *An Introduction toprobabili ty theory and Its application*(2)。這是一本經典之作，至今仍有很高的可讀性及參考價值，是學習機率論不可或缺的參考書。在這類機率論導引的入門書中，有許多問題常被各書引用爲例題，用來解說機率論上的概念，筆者稱之爲「名題」，例如生日問題就是其中之一。 但是大多數的情況是點到爲止。 本文特提出兩個題目，生日問題和伯特朗選票問題，進行稍微深入的討論，一方面希望會增進讀者對這些問題的認識，同時能提高研究機率論的興趣。

生 日 問 題

提到生日有些人馬上就聯想到美味的生日蛋糕和開心的生日舞會。另外一些人卻認爲自己的生日是「母難日」，爲了自己的誕生，母親可眞是受盡生產的苦楚。不過無論你是屬於那一派的人，對於自己的生日必然是牢記不忘的吧。現在我們就以這令人難忘的日子爲話題來談一下數學上的生日問題。

最爲人所熟知的古典生日問題是「至少要有多少人共聚一堂才會使有二人或二人以上爲同日生的機率大於 1/2？」爲了簡化問題，通常我們都是把二月二十九日忽略不計，並且假設其他 365 天爲相等可能的生日日期。本題的答案23人也是相當有名。很多人對這答案感到驚訝，因爲23僅爲 365 的一小部份，而一般人直覺地認爲 $\left[183 \approx \frac{1}{2}(365)\right]$ 似爲較合理的數字。他們之所以感到驚異實在是出於誤解題意的緣故。他們心中所想的是同日生者問題：我至少要問多少人才會使找到與自己同日生者的機率大於 1/2?

同日生者問題也頗爲人所知，只是不如以上所提生日問題著名，答案是 253。答案超過 183 是由於出生日期的抽樣是歸還抽樣而非不歸還抽樣。如果是由 365 個不同的生日的人中抽樣，則 183 爲同日生者問題的正確答案。

於比較生日問題和同日生者問題時，我們發現在生日問題中，r 人有 $r(r-1)/2$ 個可能爲生日相同的機會，而在同日生者問題中，在我所問的 n 人中，我僅有 n 個機會可能找到一個或一個以上和我同日生的人。因此倘若要使這兩個問題有相同的成功機率，那麼顯然令 $n \approx r(r-1)/2$ 較爲合理，因爲如此方可使這兩個問題有相同的機會數。例如，如果成功的機率爲 1/2。即 $r=23$, $n=22(23)/2=253$，恰爲正確的答案。另一方面，這兩問題的成功機率並非完全相等。在生日問題 $r=23$ 時，P（成功）≈ 0.5073，而同

註 (1)請參閱「數播」第一卷第三期內姚景星撰「機率的回顧」和第二卷第四期內黃文壽撰「早期機率的回顧」。

(2)W. Feller, *An Introduction to probability theory and Its applications* John Wiley & Sons. Inc 1968. 3rd edition.

生日者問題，$n=253$，P（成功）≈ 0.5005。

現在我們將上述二問題推廣化，令N爲相同可能的生日天數，r爲生日問題中的人數，n爲同日生者問題中被詢及生日的人數，則對於生日問題來說，我們很容易求出r人生日均不相同的機率，至少有二人同生日的機率爲取其餘集。

第一人的生日爲N日中的任一日，第二人的生日與第一人不同，因此他的生日可能爲所剩$N-1$天中的任一天，第三人的生日爲$N-2$天中的一天……，第r人則爲$N-r+1$天中的一天，因此r人均不同生日的可能爲

$$N(N-1)(N-2)\cdots\cdots(N-r+1) \tag{1}$$

而本題的樣本空間則爲 N^r，因爲r人中每人的生日均可能爲N天中的任一天。因此

$$\begin{aligned} P_R &= P\text{（至少有二人生日相同）} \\ &= 1-P\text{（}r\text{人生日均不同）} \\ &= 1-N(N-1)(N-2)\cdots\cdots(N-r+1)/N^r \end{aligned} \tag{2}$$

在同日生者問題中，我隨機選取的每一被詢問人與我的生日不同的機率爲$(N-1)/N=1-1/N$。若n人爲獨立抽取，則無人與我生日相同的機率爲 $(1-1/N)^n$，卽至少有一人與我生日相同的機率P_S爲

$$P_S=1-(1-1/N)^n \tag{3}$$

我們希望 P_S 與 P_R 大約相等，然後將n寫成r的函數的形式。若 $P_R=P_S$ 則

$$\frac{N(N-1)\cdots\cdots(N-r+1)}{N^r}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \tag{4}$$

左式分子的每一項用N除，得到

$$1\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{r-1}{N}\right)=\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \tag{5}$$

將左式相等開來，右式也展開至第二項，得到

$$1-\left(\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\cdots\cdots+\frac{r-1}{N}\right)+\cdots\cdots=1-\frac{n}{N}+\cdots\cdots \tag{6}$$

比較左右二式，我們得到

$$n=1+2+\cdots\cdots+(r-1)=\frac{r(r-1)}{2} \tag{7}$$

當n與N相較頗小時，這個結果部份證實我們早先所作對於相等機會數的說法。

關於生日問題，我想在此附帶再多談一點。

(1)表一爲不同r值所對應至少有二人同生日的機率。

表　一

r	5	10	15	20	21	22	23	24	25	30	40	50	60
P_R	0.027	0.117	0.253	0.411	0.444	0.476	0.507	0.538	0.569	0.706	0.891	0.970	0.994

(2)我們學一個巧妙的方法來求無同生日的機率的近似值。因爲$e^{-x}=1-x+x^2/2!-x^3/3!+\cdots\cdots$，當$x$很小時，$e^{-x}$ 不會比$1-x$大多少，因此當x很小時，我們可以採用$1-x$爲e^{-x}的近似值或以e^{-x}爲$1-x$的近似值。

$$\begin{aligned} \frac{N(N-1)\cdots\cdots(N-r+1)}{N^r} &= \frac{N}{N}\frac{(N-1)}{N}\frac{(N-2)}{N}\cdots\cdots\frac{(N-r+1)}{N} \\ &= 1\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{r-1}{N}\right)=e^{-\frac{1+2+\cdots\cdots+(r-1)}{N}} \\ &= e^{-\frac{r(r-1)}{2N}} \end{aligned}$$

當 $r=23$ 時 P（r 人生日不同）≈ 0.5 或令 $[r(r-1)]/[2(365)]=-\log 0.5\approx 0.699$，可求得 r 值。

接下來，我們再來看一下生日問題的另一種推廣化的形式。在有 100 位同學相聚的同學會上，數學高手某甲三句不離本行，提到生日問題，進行一個實驗。在已知會中有二人或二人以上同日生的機率近乎 1 的情形下，他請會中每人由前向後報出自己的生日，倘若會中有人舉手表示與報出的生日相同，立即停止試驗。某甲願意與人打賭這個實驗必會在第10個人報出他的生日或之前就會停止，結果沒有人願意和他賭。（事實上甲獲勝的機率是 0.928，當然沒有人願意和他打賭了）。以下我們來討論一下這個生日問題。

設 n 和 k 爲正整數，其中 $k\leq n$。$P(n,k)$ 代表在 n 人的羣體至少有二人生日相同，而其中一人在前 k 人中的機率。$P(n,n)$ 就是古典的生日問題。我們在前提到 $P(100,10)=0.928$。

現在我們來看一下如何求得 $P(n,k)$，在此我們仍然假設不計閏年二月二十九日，並且其他 365 天均爲相同可能的生日日期。

樣本空間爲 365^n，n 維的數列，$n=1,2,\cdots\cdots,365$。我們感興趣的事件爲 n 維的前 k 維中至少有一維是重複的數列的集合。這集合的餘事件倒是相當容易計算。就是 n 維中前 k 維均不同的數列的集合，即如下所示

$$365\cdot 364\cdots\cdots(365-k+1)(365-k)^{n-k}$$

因此，

$$P(n,k)=1-\frac{365\cdot 364\cdots\cdots(365-k+1)(365-k)^{n-k}}{365^n} \tag{8}$$

我們由前知古典生日問題的解答爲 $Q_k=1-P(k,k)$，而 $P(n,k)=1-Q_k(1-k/365)^{n-k}$。

在下表中 $k(n)$ 爲使 $P(n,k)\geq 1/2$ 的最小 k 值。由古典生日問題的解答得知 n 至少要 23 才有 $k(n)$ 存在，同時我們知道 $k(n+1)\leq k(n)$，因此表二始於 $n=23$。

表　二

n	23	24	25	26	27	28	29	31	33	36	40	46	54	66	86	128	254
$k(n)$	20	17	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

表二的最後一行表示倘若你想與人打賭在 n 人中有人與你生日相同，則 n 必須至少要254人才會使這打賭對你有利。或許有人認爲 n 似應爲 $1+[365/2]=183$，然而依據古典生日問題的解答，在有 183 人相聚的羣體中，通常會有好些重複的生日，而非恰好人人生日不同。換句話說，想要找到 183 個不同生日的最小 n 值爲 254 人。細心的讀者必定發現在同生日者問題中的答案 253 人與以上解法所得 254 人略有出入，這是由於牽涉計算上的使用近似值所致。接下來我們來研究一下 254 這個數值是如何得出的。

假設有任意 n 人聚於一室，令隨機變數 X_n 表示在此 n 人中，不同生日的天數，則期望值 $E(X)$ 應爲若干？

解: 通常這類求期望值的問題都是先決定 X_n 的機率分配而後依據期望值的定義解之。在此，我們擬採用「以小數值試驗，然後看看是否能推測出期望值一般式」的方式試解本題。

首先我們來看一下 $n=1,2,3,4$ 時 X_n 的機率分配情形。X_n 的分配如表三所示:

我們僅以 $P(X_3=2)$ 和 $P(X_4=3)$ 來說明如何求得表中數值。

表　三

X值 / 隨機變數	1	2	3	4
X_1	1			
X_2	$\frac{1}{365}$	$\frac{364}{365}$		
X_3	$\frac{1}{(365)^2}$	$\frac{3(364)}{(365)^2}$	$\frac{(364)(363)}{(365)^2}$	
X_4	$\frac{1}{(365)^3}$	$\frac{7(364)}{(365)^3}$	$\frac{6(364)(363)}{(365)^3}$	$\frac{(364)(363)(362)}{(365)^3}$

當 $n=3$ 時，有三種不同型式可得出二不同生日，即 (xxy, xyx, yxx)。

今以甲乙丙三人其中甲乙的生日相同，丙的生日與前二人不同爲例說明，在一年 365 天中，甲的生日可能是 365 天中的任一天，乙與甲同日生，故只有一種可能（卽甲的生日那天），丙的生日爲其他 364 天中的任一天，因此 $P(X_3=2)=3=(365)(1)(364)/(365)^3=3(364)/(365)^2$，同理 $n=4$ 有三不同生日有下列六種可能 $(xxyz,\ xyxz,\ xyzx,\ yxxz,\ yxzx,\ yzxx)$ 每一種發生的可能均爲 $(365)(1)(364)(363)/(365)^4$ 卽 $P(X_4=3)=6(365)(1)(364)(363)/(365)^4=6(364)(363)/(365)^3$。

利用上表所列 X_n 的機率分配及期望値的定義，同時將 364 數寫成 $(365-1)$, 363 寫成 $(365-2)$ 等等，可知

$$E(X_1)=1$$

$$E(X_2)=1\times\frac{1}{365}+2\times\frac{(365-1)}{365}=\frac{1}{365}+2\times\left(1-\frac{1}{365}\right)=2-\frac{1}{365}$$

同法可得

$$E(X_3)=3-\frac{3}{365}+\frac{1}{(365)^2}$$

$$E(X_4)=4-\frac{6}{365}+\frac{4}{(365)^2}-\frac{1}{(365)^3}$$

由以上式子的形式可看出每一式子爲正負交錯，而且係數爲二項式係數，因此我們推測其一般式的形式爲

$$E(X_n)=\Sigma_{k=1}^{n}\ (-1)^{k+1}\frac{\binom{n}{k}}{(365)^{k-1}},$$

在上式中加入和減去 $k=0$ 項，然後由每項分母中分解出$(365)^{1-n}$卽得

$$E(X_n)=(365)^{1-n}\left[(365)^n-\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,(365)^{n-k}\right]$$

$$=(365)^{1-n}[(365)^n-(365-1)^n]=365-\frac{(364)^n}{(365)^{n-1}}\qquad n=1,2,3 \tag{9}$$

上式爲正確可證明如下:

我們知道每天必爲 n 人中某一人的生日或不爲其中任一人的生日，若一年中的第 k 日不爲 n 人中任一人的生日。令隨機變數 Y_k 的値爲 1，否則爲 0。則所有非生日的天數和爲 $(Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_{365})$。而對每一 k 値

$$E(Y_k)=0,P(Y_k=0)+1\times P(Y_k=1)=\left(\frac{364}{365}\right)^n$$

因此，非生日天數的期望值爲 $365(364/365)^n$，故

$$E(X_n)=365-365\left(\frac{364}{365}\right)^n=365-\frac{(364)^n}{(365)^{n-1}}。$$

要求使 $E(X_n)\geq 183$ 的最小 n 值就是相當於找最小的 n 值使 $(364/365)^{n-1}\leq 1/2$，查對數表，就得 $n=254$。

附帶還想說明一點，以上的討論告訴我們，有時候我們不必確知隨機變數的機率分配，照樣可以求出其期望值。

看完以上的討論，或許有人意猶未盡，想要自己一顯身手，以下就是數個好機會。

⑴依據美國統計結果顯示並非一年 365 天中，每天均爲相同可能的生日。假如，夏天出生的人數比冬天要多，試問這事實對表一內機率有什麼影響？（使機率變大還是減小？）

⑵倘若我們把二月二十九日也列入考慮，則對表一內的各機率又會產生什麼影響？（使機率變大？變小？）

⑶假設一年內的 12 個月均爲相等可能的出生月份，請導出一個類似表一的機率表，代表一羣隨機聚會的 r 人羣體中，至少有二人同月生的機率，$r=1,2,3,4,5$。倘若我們把每月有不同日數的事實列入考慮，對你方才導出的表有什麼影響？

⑷試證在 r 人相聚的羣體中，恰有二人生日相同的機率爲

$$t_r=\binom{r}{2}\frac{365\cdot 364\cdots\cdots(365-r+2)}{365^r}$$

⑸在上題中，若以 q_r 表示 r 人中無人同生日的機率，試證

$$t_r=\binom{r}{2}\frac{q_r}{366-r}$$

⑹倘若我們把古典生日問題改爲要求至少應有多少人相聚，方可使至少有二人生日相同或相鄰（12月31日與1月1日相鄰）的機率大於 1/2？

伯特朗選票問題

（一）某班級有25個學生，有甲乙二生出馬競選班代表，選舉秘密投票方式，開票的結果，其唱票順序如下

甲甲乙甲乙、甲甲乙甲乙、甲甲甲乙甲、甲乙乙甲乙、甲甲乙乙乙。

在宣佈選舉完畢後，丙生說「我注意到甲的票數總是領先，這似乎很神奇。」丁生回答說：「一點也不神奇，最後的結果是 14 比 11，甲獲勝，旣然是甲贏，自然很可能他的票數一路領先」。

你贊同丁生的意見嗎？想想看！然後再做一下實驗，看看你能由實驗中發現什麼現象。做 25 張小紙條，14 張寫上甲，11 張寫上乙，然後把它們放入一容器內混合。把小紙條一張張由容器中抽出，如上題所示一一順序記下結果。如果是數人同時進行這種實驗，每人應保留其記錄，因爲以後還用得著。查驗的結果，甲的票數仍是一路領先嗎？

一個簡單的實驗方法是：若甲得票記爲＋1，乙得票記爲（−1），應用這種數值，把你的票一一加起來。因此，上例的結果爲

1，2，1，2，1，2，3，2，3，2，3，4，5，4，5，6，5，4，5，4，5，6，5，4，3。

把你的結果和以上的結果比較，當你查驗完畢後，或許也可以和班上同學比較一下，然後再回想一下丙，丁的話，你贊成誰的意見？

下列問題可以幫助你試查你的想法是否正確：

1、若甲永遠領先，則第一票應爲誰的票，第二票又如何？

2、在開出兩票後，甲領先的機率爲若干？

3、在開出三票後，甲領先的機率爲若干？

4、你對甲永遠領先的機率的結論爲何？

法國數學家伯特朗（Joseph Bertrand, 1822-1900）研究了一個選舉問題。若我們獲知選舉的結果，我們能求出於開票唱票時，當選人一路領先的機率嗎？

因此，在我們的問題中，我們要問，若已知開票結果爲 14 比 11，則甲一路領先的機率爲若干？

甲是否一路領先，得視 14 張甲和 11 張乙的安置序列而定，我們稱每一可能的安排爲一種「順序」。(ordering)。

如果由容器抽出的選票每張大小都相同，用相同摺法並且攪混得很好。我們就可以假設所有可能的順序爲相同可能，我們將做這樣的假設。

現在我們想一下問題：共有多少相同可能的順序？答案是 $\binom{25}{11}$，卽 4457400。

我們的問題有兩點令人感到驚奇的地方。第一、它的答案非常簡單。第二、它並不難發現答案，而且明瞭爲什麼如此。

我們如何開始下手呢？想想看，看看你所建議的方式是不是和下節所採方式相同。

當一個問題看起來似乎很困難的時候，試試一個類似而簡單的形式必然有所幫助。我們先假設 5 人投票，甲獲勝的比數是 4 比 1 。

把所有 4 甲 1 乙的不同順序排列出來，然後看甲是否一直領先？

順　　序	甲一路領先嗎?
甲甲甲甲乙	是
甲甲甲乙甲	是
甲甲乙甲甲	是
甲乙甲甲甲	否
乙甲甲甲甲	否

注意：我們有 $\binom{5}{1}$ 種可能順序，對應於 5 種選擇乙的方法。

另外一個方法是畫個圓圈，把選票寫在圈上。

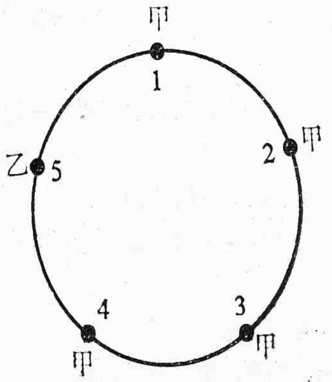


圖 一

如果由位置 1 開始，順時針方向移動，我們得到甲甲甲甲乙。上表所列每一順序相當於每一不同的啓始點。

在以上 5 種順序中，甲一路領先有三種，因此甲領先的機率爲 3/5。讀者不妨試一下 3 比 2 的情形。

習　題

1、若有 3 甲 2 乙，則共有多少種可能順序?

2、任選一種 3 甲 2 乙的順序，將 3 甲與 2 乙寫於圓上，使得當你自 1 號位置順時針方向移動，可得到你所選的順序。每次由不同點開始順時針移動列出所有你可得的順序。

3、在以上所有順序中，由那幾個爲啓始點可得出一路領先的情形?

4、你在第 2 題中所得的順序已包含所有由 3 甲 2 乙的可能順序嗎? 若不是，任選一種不在你已列的順序，同樣再畫個圓，將 3 甲與 2 乙寫於圓上，並且再列出所有你可得的順序。

5、在第 4 題所得的順序中，有多少個是甲一路領先的情形?

6、在 3 比 2 的情形下，甲一路領先的機率爲何?

7、若爲 5 比 0，則甲一路領先的機率又爲何?

(二) 我們把結果摘錄如下：

得　票	P (甲一直領先)	出　票　數	使用圈數	一圈上「甲一直領先」的啓始點數
4 比 1	3/5	$\binom{5}{1}=5$	1	3
3 比 2	1/5	$\binom{5}{2}=10$	2	1

在上表中，第一列甲得 4 票乙得 1 票，甲一路順先的機率爲 3/5。3 得自何處? 5 得自何處? 你能看得出型式 (pattern) 嗎? 再看一下第二列中 3、2 和 1/5，它們能配合你的型式嗎?

現在，或許你已看出一種法則似乎較爲合用。

令 X = 甲的得票數，　Y = 乙的得票數。

得　票	P (甲一直領先)	X	Y	$X-Y$	$X+Y$	$(X-Y)/(X+Y)$
4 比 1	3/5	4	1	3	5	3/5
3 比 2	2/5	3	2	1	5	1/5

由第二行與最後行相較，P (甲一直領先) $=(X-Y)/(X+Y)$ 至少，這個公式適於得票 4 比 1 和 3 比 2 的情形。

習　題

8、本公式適用於 5 比 0 的情形嗎?

9、本公式適用於 3 票而得票而得票爲 2 比 1 的情形嗎?

下圖爲第一節所提 25 票的情形，請仔細研究一下本圖。

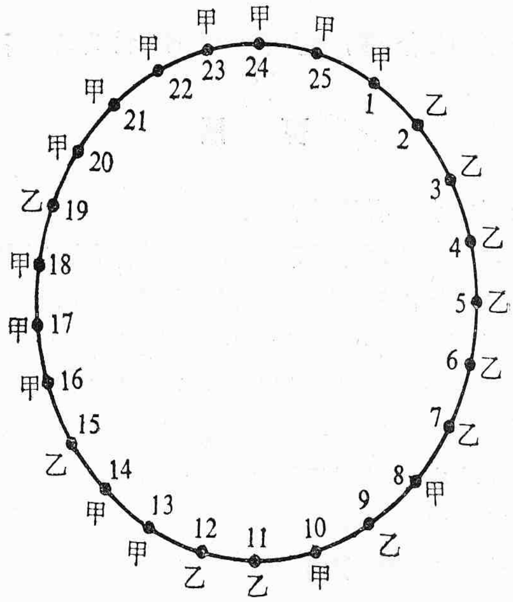


圖 二

如果你由 1 開始順時針方向移動，則甲並非一路領先（事實上，在第二票時，二人平手）。但是如果由 13 開始順時針移動，則甲爲一直領先，另外由 16、17 開始也是甲一路領先。

習 題

10、現在請你把你的記錄取出，把甲、乙依次寫在一圓上，共有多少種情形是甲一路領先？

（三）現在我們將圖二仔細研究一下，由 1 開始甲之後緊接著是乙，而 $1+(-1)=0$，卽甲於第二票時就失去領先的優點，其他在啓始點爲 8、10、14和18 均爲甲之後緊接著乙，把這些情形畫圖標明。

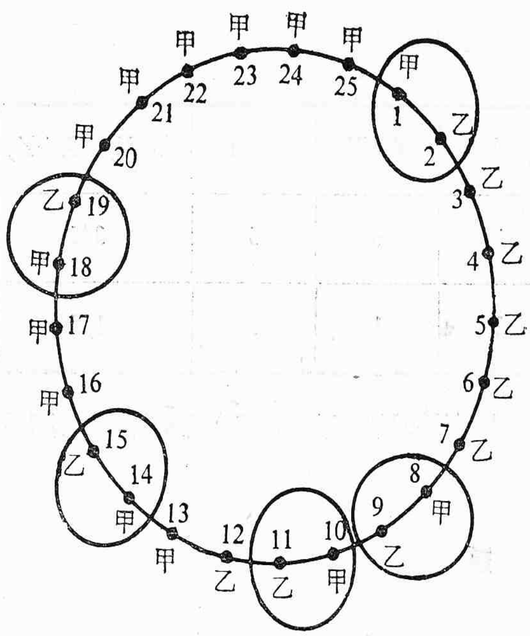


圖 三

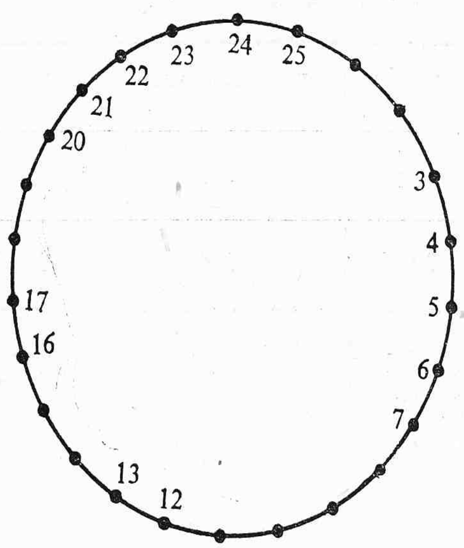


圖 四

把這些對除去，則圖三變成如圖四情形:

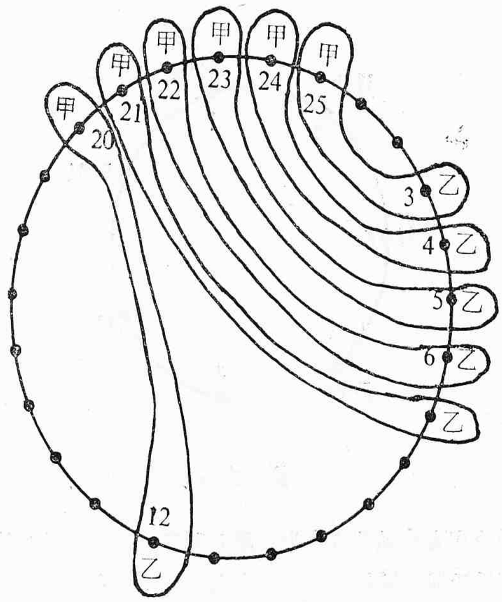


圖 五

在圖四中，如果順時方向移動，還有其他甲之後緊接著乙的情形嗎? 是的，甲在 25 和乙在 3。把這一對除去。再繼續順時移動，甲在 24 和乙在 4。也把這一對除去。如此繼續除去，23 和 5，22 和 6，21 和 7 及 20 和 12。見圖五:

那些位置未被刪除? 13、16 和 17，但是我們發覺這些位置正是給出甲一路領先順序的啓始點。

這種解釋是否提供了一些便於推廣的暗示? 如果我們把選票依開票先後以順時方向寫於圓上，然後刪除當選人之後接著為落選人的成對，如此不斷刪除下去，最後所剩的就是當選人一路領先的啓始點位置。倘若你不相信，不妨再多試一下並且想得深入一點。

每次會剩下多少個位置呢? 恰為當選票數與落選票數的差，即恰為 $x-y$。

回到得票比數為 3 比 2 的情形。我們發現必須兩個圓方才足以把所有可能順序完全列出，每一圓有 5 個順序。

$$第一圓中甲一路領先的順序 = 1$$
$$第二圓中甲一路領先的順序 = 1$$
$$\frac{甲一路領先的總順序數}{總順序數} = \frac{1+1}{5+5} = \frac{1}{5}$$

或許你可以試著猜想一下若 7 票而甲與乙得票為 5 比 2 的情形。在本例中，總共有 $\binom{7}{5}$ 或 $\binom{7}{2}$ 種順序，我們需要 3 個圓才足以把所有可能順序全部列出（每圈有 7 個順序）。每圈有 $(5-2)=3$ 個為甲一路領先的啓始點。因此似乎在本例中 P（甲一路領先）$=(3+3+3)/(7+7+7)=3/7$，換言之，又是 P（甲一路領先）$=(X-Y)/(X+Y)$。

習　題

11、一個十人委員會環坐於一圓桌，在表決其提案時，得 7 票贊成，3 票反對，試問當主席問到每一人的意見時，贊成票數總是領先反對票數的機率為多少?

12、甲主持一個小組會議，小組組員的位置如下圖所示。除了乙之外，其他人對某議案的態度甲都已事先知道。甲深知乙的個性，如果甲問每一人的意見時，贊成人數領先的話，則當問到乙的意見時，乙必

定投贊成票。甲希望能得到他所有能得的贊成票，試問甲該自那一位置問起，才會使得在叫到乙之前呈贊成票領先的情勢。

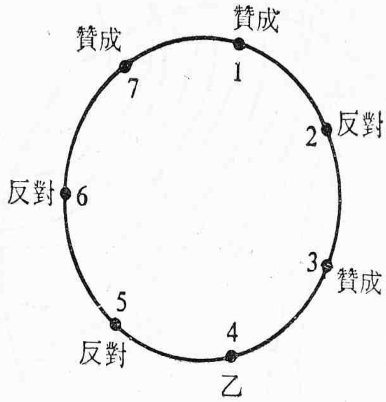


圖 六

13、在一個家庭宴會中男孩和女孩圍著圓桌坐如圖七所示。當吃完晚飯後，女主人說「男仕們請帶著坐在你左邊的小姐到院子來玩乒乓混合雙打。」試問有那些男仕沒有女伴？

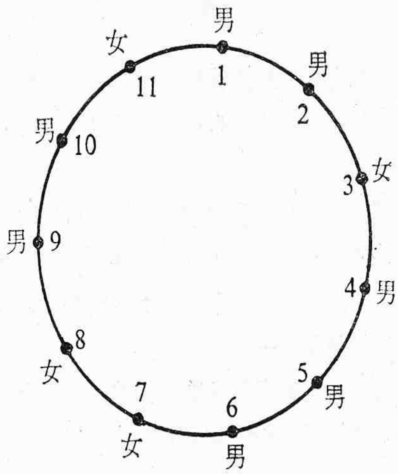


圖 七

14、王家吃飯時圍著圓桌而坐，王太太於飯後拿出水果，3片西瓜和3片鳳梨放於一盤上，試問籃子應自那一位子開始順時方向傳遞才能使坐於1號位置的王先生分到他喜歡的西瓜。（圖八號上的標字表示坐該位子的人的偏好）

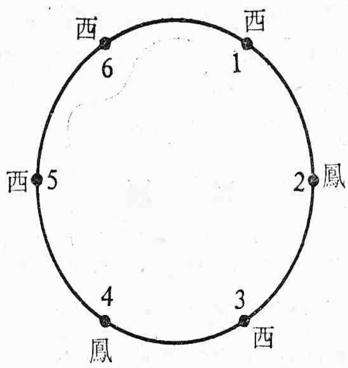


圖 八

在本題中，我們用圓圈來幫助列出可能的順序。例如在 5 張選票的問題中，用一個圓圈寫上 5 個位置，這個圈給我們 5 個可能的順序。同樣的，25 張票的圓圈給我們 25 種可能的順序。

我們能一直假設事情如此的單純嗎？再多看一個題目可能有助於你回答最後這個問題。

習　　題

15、設有 6 票的選舉——甲得 4 票，乙得 2 票——共有多少可能順序？

16、任選一種可能順序，即其標於一圓周上，並且寫出所有不同順序，然後再寫出一種不在你已列出之內的順序，再標於同一圓周上，寫出所有不同的順序，如此不斷地做，直到得出所有可能順序為止。

（四）在第十六題中，你畫出三個圓。或許你所畫出的圓並不全和如下三圓相同，但它們實際上並沒有什麼差異。

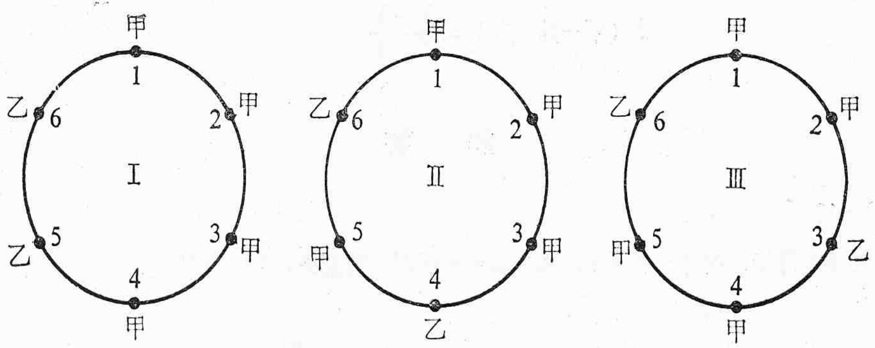


圖　九

由圖九（Ⅰ）中，你可得 6 種不同可能出象，其中有 2 種為「甲一路領先」，即啓始點 1、2。

假設你主持一項選舉，有人告訴你結果為圓Ⅰ中 6 種出象之一，則甲一路領先的機率為$2/6=1/3$。

現令E=「甲一路領先」的事件。

Ⅰ=圓Ⅰ中順序所構成的事件。

Ⅱ=圓Ⅱ中順序所構成的事件。

Ⅲ=圓Ⅲ中順序所構成的事件。

則圓Ⅰ中甲一路領先的機率可改寫為$P(E|\mathrm{I})=1/3$，這是一個條件機率，同法可得$P(E|\mathrm{II})=1/3$。

我們再來看一下圓Ⅲ，它僅有 3 種不同出象。例如以 1 為啓始點與以 4 為啓始點所得順序全然相同。啓始點 1、2、3 各得不同順序，其中只有啓始點 1 為甲一路領先，因此 $P(E|\mathrm{III})=1/3$。

我們可以把 15 種可能出象以下圖表示：

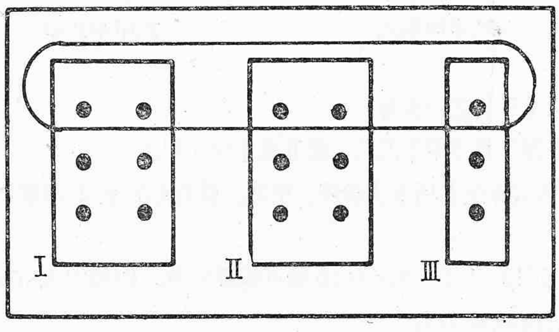


圖　十

E為三個集合$E\cap\mathrm{I}$, $E\cap\mathrm{II}$, $E\cap\mathrm{III}$的聯集，這三個集合為互斥。因此，

$$P(E)=P(E\cap\mathrm{I})+P(E\cap\mathrm{II})+P(E\cap\mathrm{III})。$$

至此，我們可以應用條件機率的知識:

$$P(E\cap\mathrm{I})=P(\mathrm{I})P(E|\mathrm{I})=P(\mathrm{I})/3$$

同理

$$P(E\cap\mathrm{II})=P(\mathrm{II})/3,\quad P(E\cap\mathrm{III})=P(\mathrm{III})/3$$

$$P(E)=P(\mathrm{I})/3+P(\mathrm{II})/3+P(\mathrm{III})/3=(P(\mathrm{I})+P(\mathrm{II})+P(\mathrm{III}))/3$$

$P(\mathrm{I})$ 爲任一順序得自圓 I 的機率，

$P(\mathrm{II})$ 爲任一順序得自圓 II 的機率，

$P(\mathrm{III})$ 爲任一順序得自圓 III 的機率。

因此 $P(\mathrm{I})+P(\mathrm{II})+P(\mathrm{III})=1$　所以 $P(\mathrm{I})=(1/3)1=1/3$

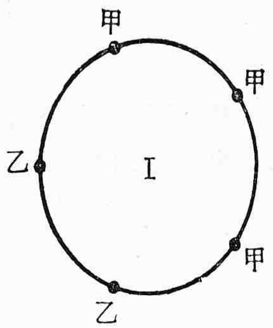
在本例中，得票爲 4 比 2，並非每個圓圈都有 6 種不同出象。但是第 4 節的理由仍然適用於每一圓圈，並且不同圓相關的條件機率聯合起來仍給出與前相同的結果，較複雜的情形只是多用些圓，最後結果仍然不變。即 $X>Y$ 時，

$$P\,(\text{甲一路領先})=\frac{X-Y}{X+Y}$$

解　答

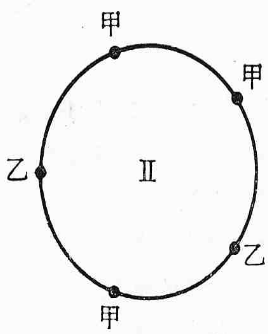
1、$\binom{5}{2}=10$

2、我們無法得知你選那一個順序，然而我們能保證你的圓圈必然與下列二者之一相合。



圓圈 I

甲甲甲乙乙
甲甲乙乙甲
甲乙乙甲甲
乙乙甲甲甲
乙甲甲甲乙



圓圈 II

甲甲乙甲乙
甲乙甲乙甲
乙甲乙甲甲
甲乙甲甲乙
乙甲甲乙甲

你所列出的順序應與以上二者之一相合。

3、「甲一路領先」在圈 I 爲甲甲甲乙乙，圈 II 爲甲甲乙甲乙。

4、5、你的第 2 題解答並未包含所有的順序。例如，倘若你的第 2 題解答如圓圈 I 所示，則第 4 題的解答如圓圈 II 所示。

6、P（一路領先）$=2/10=1/5$（在所有 10 個可能順序中，每個均爲相等可能，其中有兩個「甲一路領先」，即甲一路領先的機率爲 1/5。

7、1

8、是的，$(5-0)/(5+0)=1$

9、是的。P（甲一路領先）$=(2-1)/(2+1)=1/3$

10、我們不清楚在你的圈上 14 甲和 11 乙如何安排，然而，我們肯定在你的試驗中，必然會有 3 個甲一路領先的順序，即 $(14-11)/(14+11)=3/25$

11、$(7-3)/(7+3)=2/5$

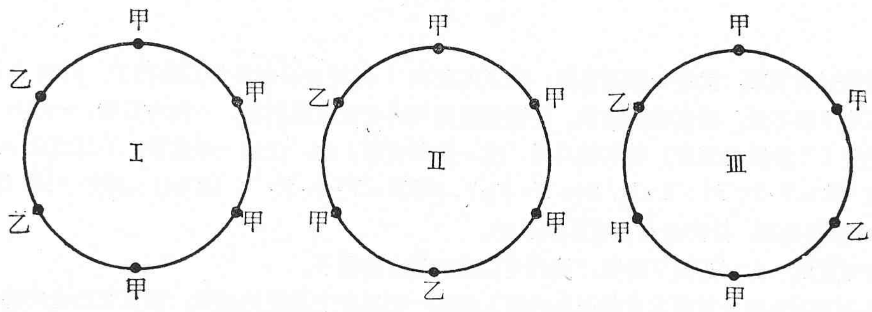
12、在 1、3、6 或 7

13、1，4，9

14、始於 4、5、6 或 1

15、$\binom{6}{2}=15$

16、你的圓圈依適當選取啓始點必然與如下圖形相合



甲甲甲甲乙乙	甲甲甲乙甲乙	甲甲乙甲甲乙
甲甲甲乙乙甲	甲甲乙甲乙甲	甲乙甲甲乙甲
甲甲乙乙甲甲	甲乙甲乙甲甲	乙甲甲乙甲甲
甲乙乙甲甲甲	乙甲乙甲甲甲	
乙乙甲甲甲甲	甲乙甲甲甲乙	
乙甲甲甲甲乙	乙甲甲甲乙甲	

參 考 資 料

1. F. Mosteller, *Fifty challenging problems in probability with solutions*, Addison-Wesley Reading, Mass.

2. J.E. Nymann, *Another generalization of the birthday problem*, Mathematics magazine **48** (1975), p. 46-47.

3. S. Goldberg, *A direct attack on a birthday problem*, Mathematics magazine **49** (1976) p. 130-131.

4. J. Kemeny, J. Snell, *Finite mathematics with business applications*, 1966 Prentice-Hall N. J.

5. 機率挑戰名題展，戴久永編著，協進圖書公司。

——本文作者現任教於交大運輸工程與管理系