相異代表系統簡介（I）

王子俠

1. 導　　引

相異代表系統的概念在**組合學**（Combinatorics）上佔有相當重要的地位，它與許多其他組合學上的論題，諸如**圖形學**（Graph Theory），(0, 1) -矩陣的**絕對行列式**（Permanent） 等等，都有密切的關係。在這篇文章裏，我們將介紹它的定義及有關的一些定理。以後我們將陸續地介紹它的一些應用。

定義: 假定E是任意一個集合，而 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 是由n個E的子集合所構成的集合族。若n個E中的元素$e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n$滿足下面這兩個條件:（i）對$i=1, 2, \cdots\cdots, n, e_i \in E_i$,（ii）$i \neq j$，$i$，$j=1, 2, \cdots\cdots, n, e_i \neq e_j$，則稱 e_1, e_2, e_n 爲 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 的一個**相異代表系統**（System of distinct representstives，簡稱 SDR）。我們說 e_i 代表（represents）E_i。

應該一提的是，這個定義裏並沒有規定對 $i \neq j$，E_i 與 E_j 必須相異。另外，在一般問題裏，對集合E，通常不必加以指明。

例一: 若 $E_1=\{1, 2, 3, 4, 5\}, E_2=\{1, 4\}, E_3=\{1, 2, 3\}, E_4=\{3, 4, 5\}$，則 1, 4, 2, 3; 4, 1, 3, 5; 及2, 4, 1, 3均爲 E_1, E_2, E_3, E_4 的 SDR′s。

例二: 若 $E_1=E_2=\{1, 4\}, E_3=\{4\}, E_4=\{1, 2, 3, 5\}$，則顯然 E_1, E_2, E_3E_4 沒有任何 SDR，但 E_2, E_3, E_4 有三個 SDR′s。

SDR 的概念，一般常用所謂的「婚姻介紹」來說明。假定 $G=\{g_1, g_2, \cdots\cdots, g_m\}$ 是一組單身男士的集合，而$L=\{l_1, l_2, \cdots\cdots, l_n\}$是一組單身女士的集合，又假定這些單身男女，有意選擇對象，那麼按照一般「女選男」的想法，每位女士 l_i 可以列出一張名單 G_i（一個G的子集合），上面包括所有 l_i 願意考慮的男士，$i=1, 2, \cdots\cdots, n$。那麼很顯然地，對「每位女士均可以介紹一位她願意接受的男士」的充要條件係 G_i, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$，至少有一個 SDR。

一般而言，給了一組E的子集合 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$，我們首先想知道的是下面這三個問題的答案:

Q1. 如何決定 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 有無 SDR? 換句話說，$E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 有 SDR 存在的充要條件爲何?

Q2. 若 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 無 SDR，則其中最多幾個 E_i′s有 SDR?

Q3. 若 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 有 SDR，則共有多少?

在下面的兩節，我們將介紹有關 Q1 及 Q2 的幾個定理。至於 Q3，我們將在下一次討論。

2. P. Hall 定理及其推廣

如果我們回頭看一下 §1 中的例二，不難發覺到 E_1, E_2, E_3 及 E_4 所以沒有 SDR 是因爲在 E_1, E_2, E_3 這三個集合的聯集中找不出三個相異的元素。很明顯地，這個觀察可以推廣到一般的情形；也就是說，

如果 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 有 SDR 存在，則一個必要條件是對於任意 $k=1,2,\cdots\cdots,n$，以及任何滿足 $1\leq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_k\leq n$ 的 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k$ 恒有 $|E_{i_1}\cup E_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{i_k}|\geq k$。嚴格地來說，這裏面一共包含了 2^n-1 個條件，（因為 $\{1,2,\cdots\cdots,n\}$ 共有 2^n-1 個非空子集合）每一個條件都是使 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 有 SDR 存在之必要條件。這個事實，非常淺顯，不足為奇。但有趣的是，這些條件同時也是使 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 有 SDR 存在的充分條件。這個定理是由 P. Hall 在 1935 年首先發現的。由於在 §1 所敍述的理由，它時常被稱為**婚姻定理** (Marriage Theorem)。

定理一: （婚姻定理，P. Hall, 1935）*集合族 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 有 SDR 存在之充要條件係對於任意 $k=1,2,\cdots\cdots,n$，以及任何滿足 $1\leq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_k\leq n$ 的 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k$，恒有 $|E_{i_1}\cup E_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{i_k}|\geq k$。*（為方便起見，這個條件稱為**婚姻條件**。）

證明: 婚姻條件之必要性，前面已經說明過。現在證明其充份性。我們用歸納法。對於 $n=1$，結論顯而易見。假定 $n>1$，而對於任何少於 n 個且滿足婚姻條件之集合族，定理均成立。令 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 為滿足婚姻條件之集合族。我們分別考慮兩種情形:

第一種情形: 假定對任意 $k=1,2,\cdots\cdots,n-1$，以及任何滿足 $1\leq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_k\leq n$ 之 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k$，恒有 $|E_{i_1}\cup E_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{i_k}|\geq k+1$。由婚姻條件的假設，$E_n\neq\phi$。選擇 E_n 中任意一個元素 e_n。假定 $1\leq k\leq n-1$ 而 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k$ 滿足 $1\leq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_k\leq n-1$。因為 $|(E_{i_1}\sim\{e_n\})\cup(E_{i_2}\sim\{e_n\})\cup\cdots\cdots\cup(E_{i_k}\sim\{e_n\})|=|(E_{i_1}\cup E_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{i_k})\sim\{e_n\}|\geq|E_{i_1}\cup E_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{i_k}|-1\geq(k+1)-1=k$，集合族 $E_1\sim\{e_n\}, E_2\sim\{e_n\}, \cdots\cdots, E_{n-1}\sim\{e_n\}$ 滿足婚姻條件。由歸納法之假設，此集合族有 SDR $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_{n-1}$ 存在。由此得知 $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_{n-1}, e_n$ 為集合族 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 之一個 SDR。

第二種情形: 若第一種情形不發生，則必定存在整數 p, $1\leq p\leq n-1$ 以及 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_p$, $1\leq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_p\leq n$，滿足 $|E_{i_1}\cup E_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{i_j}|=p$。換句話說，有 p 個集合，它們的聯集中恰好包含 p 個元素。為了便利符號起見，我們不妨假定這 p 個集合是 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_p$。（作這樣的假定，並未失去一般性，因為我們對原來集合族中的集合可以重新加以編號。）故 $|E_1\cup E_2\cup\cdots\cdots\cup E_p|=p$，此處之 p 滿足 $1\leq p\leq n-1$。因為 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_p$ 係集合族 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 之子族，當然也滿足婚姻條件。故由歸納法之假設，$E_1, E_2, \cdots\cdots, E_p$ 有 SDR $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_p$ 存在。但因 $|E_1\cup E_2\cup\cdots\cdots\cup E_p|=p$，故得 $E_1\cup E_2\cup\cdots\cdots\cup E_p=\{e_1, e_2, \cdots\cdots, e_p\}$。我們考慮由下面 $n-p$ 個集合所構成的集合族: $E_{p+1}\sim F$, $E_{p+2}\sim F, \cdots\cdots, E_n\sim F$；此處 $F=\{e_1, e_2, \cdots\cdots, e_p\}$。因為 $p\geq1$，故有 $n-p\leq n-1$，假定整數 $k, j_1, j_2, \cdots\cdots, j_k$ 滿足 $1\leq k\leq n-p$，$p+1\leq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_k\leq n$，則

$$|(E_{j_1}\sim F)\cup(E_{j_2}-F)\cup\cdots\cdots\cup(E_{j_k}\sim F)|=|(E_{j_1}\cup E_{j_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{j_k})\sim F|$$
$$=|(F\cup E_{j_1}\cup E_{j_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{j_k})\sim F|=|F\cup E_{j_1}\cup E_{j_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{j_k}|\sim|F|$$

$=|E_1\cup E_2\cup\cdots\cdots\cup E_p\cup E_{j_1}\cup\cdots\cdots\cup E_{j_k}|-|F|\geq(p+k)-p=k$。故集合族 $E_{p+1}\sim F$, $E_{p+2}\sim F, \cdots\cdots, E_n\sim F$ 滿足婚姻條件。由歸納法之假設，它們有 SDR $e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots\cdots, e_n$ 存在。故 $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots\cdots, e_n$ 為集合族 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 之一個 SDR。

在這裏我們必須指出一點，那就是定理一純粹是一個有關「存在性」的定理。當 SDR'S 存在時，它並不能幫助我們去找出這些 SDR'S。事實上，給了一組集合，去證明它們確實有 SDR 以及計算SDR'S的數目，我們也用不上這個定理。真正的方法有很多，譬如計算某些附隨矩陣 (Incidence matrix) 的絕對行列式的值。關於這點，我們會在下次介紹。

定理一在 1948 年被另一位也叫 Hall 的數學家 M. Hall 加以推廣。我們將這個推廣定理的內容寫在下面；至於證明，則從略。有興趣的讀者可以參閱篇尾所附的參考資料〔3〕及〔7〕。

定理二: (M. Hall, 1948) *假定集合 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 滿足婚姻條件。又假定每個集合*

至少含有 t 個元素。

(i) 若 $t \leq n$，則 E_i's 至少有 $t!$ 個 SDR's,

(ii) 若 $t > n$，則 E_i's 至少有 $t!/(t-n)!$ 個 SDR's。

很明顯地，若我們取 $t=1$，便得到定理一。

例三: 集合族 $E_1=\{1,2\}, E_2=\{2,3\}, E_3=\{3,4\}, E_4=\{4,5\}, E_5=\{5,1\}$ 顯然有 SDR 存在，故滿足婚姻條件。但對 $i=1,2,3,4,5$, $|E_i|=2$，故由定理二得知此集合族至少有兩個SDR'S。事實上，也僅有兩個。讀者可試證之。

例四: 集合族 $E_1=\{1,2,3,4,5\}, E_2=\{1,2,3,4,5,6\}, E_3=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 顯然有 SDR 存在，故滿足婚姻條件。但對 $i=1,2,3$, $|E_i|\geq 5$，故由定理二得知此集合族至少有 $5!/2!=60$個SDR'S。（事實上，眞的數目要大得多。）

例五: 集合族 $E_i=\{1,2,\cdots\cdots,n+1\}$, $i=1,2,\cdots\cdots,n$, 顯然有 SDR 存在，故滿足婚姻條件。但對 $i=1,2,\cdots\cdots,n$, $|E_i|=n+1$，故由定理二得知此集合族至少有 $(n+1)!$個 SDR'S。事實上，不難看出 $(n+1)!$ 也就是眞正的個數。

3. 有 SDR 存在的最大子集合族

我們現在對問題 Q. 2加以硏討，也就是說在一個給定了的集合族裏面，最多可以找出幾個集合，使得它們有 SDR 存在？（參考例二）首先我們證明一個有關存在性的定理。

定理三: 假定 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 是集合 E 的 n 個子集合，r 爲滿足 $r\leq n$ 的正整數。則此集合族中某 n 個集合有 SDR 存在的充要條件是:

(*) 對任意 $k=1,2,\cdots\cdots,n$ 又任何滿足 $1\leq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_k\leq n$ 之整數 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k$，恆有 $|E_{i_1}\cup E_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{i_k}|\geq k-(n-r)$。

很明顯地，當 $r=n$ 時,(*)就是婚姻條件，而定理三也就是定理一。同時當 $k=1,2,\cdots\cdots,n-r$ 時，條件（*）會自動滿足。現在我們用定理一來證明定理三。

證明: 令 F 爲一個含有 $n-r$ 個元素而滿足 $E\cap F=\phi$ 的集合，則顯然對 $i=1,2,\cdots\cdots,n$, $E_i\cap F=\phi$。我們首先證明 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 中某 r 個集合有 SDR 存在若且唯若 $E_1\cup F, E_2\cup F, \cdots\cdots, E_n\cup F$ 有 SDR 存在。假定 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 中某 r 個集合有 SDR 存在。爲方便起見，不妨假定 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 有 SDR $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n$。令 $F=\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_{n-r}\}$，則顯然 $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_r, f_1, f_2, \cdots\cdots, f_{n-r}$ 是 $E_1\cup F$, $E_2\cup F, \cdots\cdots, E_n\cup F$ 的一個 SDR。反過來看，假定 $E_1\cup F, E_2\cup F, \cdots\cdots, E_n\cup F$ 有 SDR $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 存在。因爲 $|F|=n-r$，至少有 r 個 x_i's 不屬於 F。爲方便起見，不妨假定對 $i=1,2,\cdots\cdots,r$, $x_i\notin F$，於是 $x_i\in E_i$。故 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r$ 是 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_r$ 的一個 SDR。由定理一，$E_1\cup F, E_2\cup F, \cdots\cdots, E_n\cup F$ 有 SDR 存在之充要條件係對於任意 $k=1,2,\cdots\cdots,n$, 及任何滿足 $1\leq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_k\leq n$ 之整數 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k$ 恆有 $|(E_{i_1}\cup F)\cup(E_{i_2}\cup F)\cup\cdots\cdots\cup(E_{i_k}\cup F)|\geq k$。但 $|(E_{i_1}\cup F)\cup(E_{i_2}\cup F)\cup\cdots\cdots\cup(E_{i_k}\cup F)|=|E_{i_1}\cup E_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{i_k}|+|F|=|E_{i_1}\cup E_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{i_k}|+n-r$，故上面的不等式變成 $|E_{i_1}\cup E_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup E_{i_k}|\geq k-(n-r)$。

由定理三可以立刻導出下面的定理四。這個定理對問題 Q2 提供了完全的答案。

定理四: 集合族 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 中最多可以找到 r 個集合使得它們有 SDR 存在若且唯若 $r = min\{|E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \cdots\cdots \cup E_{i_k}| + (n-k);\ k=1, 2, \cdots\cdots, n, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_k \le n\}$。

證明: 由定理三，對任意 $k=1, 2, \cdots\cdots, n$, 及任何滿足 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_k \le n$ 之整數 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k$，恒有 $|E_{i_1} \cup E_{i_1} \cup \cdots\cdots \cup E_{i_k}| + (n-k) \ge r$。故 $r \le min\{|E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \cdots\cdots \cup E_{i_k}| + (n-k);\ k=1, 2, \cdots\cdots, n,\ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_k \le n\}$。但若等號不成立，則此不等式之左邊可以用 $r+1$ 代替，與 r 之定義矛盾。

例六: 若$E_1=\{1, 6\}, E_2=\{3, 4, 6\}, E_3=\{2, 6\}, E_4=\{1, 2\}, E_5=\{1, 2, 5, 6\}, E_6=\{1\}$, $E_7=\{1, 2, 6\}$，則 $|E_1 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_6 \cup E_7| + (7-5) = |\{1, 2, 6\}| + 2 = 5$。故 $r \le 5$。但顯然 6, 3, 2, 1, 5 爲 E_1, E_2, E_3, E_4 及 E_5 的一個 SDR，故 $r=5$。

下面有幾個練習題，有興趣的讀者可以試試看，也可以藉此測驗一下你是否已了解有關 SDR 的基本概念。

(1)對下面的每一個集合族，如果可能，找出一個 SDR 。

(a)$E_1=\{1, 2, 3\}, E_2=\{2, 3, 4\}, E_3=\phi$,

(b)$E_1=\{1, 2, 3, \}, E_2=\{2, 3\}, E_3=\{4\}, E_4=\{1, 2\}$,

(c)$E_1=E_2=E_3=E_4=\{1, 2, 3\}$,

(d)$E_1=E_2=\{1, 2, 3, 4, 5\}, E_3=E_4=E_5=\{1, 3\}$。

(2)將例三推廣到 n 個集合的情形。

(3)例四中的集合族一共有多少 SDR's？

(4)集合族$E_1=\{1, 2, 3\}, E_2=\{2, 3, 4\}, E_3=\{3, 4, 5\}, E_4=\{4, 5, 1\}, E_5=\{5, 1, 2\}$一共有多少個 SDR's? 試推廣到 n 個集合的情形。

(5)假定 $|E_i| = i+1$, $i=1, 2, 3, 4, 5$。試證這個集合族至少有 32 個 SDR's，並決定出 SDR 的最多可能個數。推廣到 n 個集合。

(6)考慮下面 n 個由集合 $E=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集合所形成的集合族: $E_1=E_2=\cdots=E_k=\{1, 2, \cdots\cdots, k-1\}, E_{k+1}=\cdots\cdots=E_n=E$。此處之 k 係滿足 $1 \le k \le n$ 之整數。（當 $k=1$ 時，E_1 定義爲 ϕ。）試證在婚姻條件中所包含的 2^n-1 個不等式中，恰好有一個不成立。

(7)用定理四來決定在下面的每一個集合族中，最多可以找到幾個集合，使得它們有 SDR 存在:

(a)$E_1=E_2=E_3=\{1, 2\}, E_4=\{3, 4\}, E_5=\{1\}, E_6=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,

(b)$E_1=\{1, 2\}, E_2=\{2, 3\}, E_3=\{4, 5\}, E_4=\{2, 3, 4\}, E_5=\{1, 2, 3\}, E_6=\{1, 3\}$,

(c)$E_1=E_2=E_3=E_4=\{1, 2, 3\}, E_5=E_6=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

(d)$E_1=\{1, 2, 3\}, E_2=\{2, 3\}, E_3=\{2\}, E_4=\{2, 5, 6\}, E_5=\{1, 5\}, E_6=\{3, 6\}$。

(8)假定集合族 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 有 SDR 存在，而 x 是屬於至少一個 E_i 的某個元素。試證可以找到一個包括 x 在內的 E_i's 的 SDR。舉例說明，一般而言，無法事先指定那一個含 x 的集合將由 x 來代表。

(9)令 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 爲一集合族，而 $x \in E_1$。假定對任意 $k=1, 2, \cdots\cdots, n$, 及任何滿足 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_k \le n$ 之整數 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_k$，恒有 $|E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \cdots\cdots \cup E_{i_k}| \ge k+1$。試證可以找到一個 E_i's 的 SDR，使得 E_1 由 x 來代表。

(10)假定對 $i=1, 2, \cdots\cdots, n, E_i=\{1, 2, \cdots\cdots, m\}$。試證 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 有 SDR 存在若且唯若$m \ge n$。當$m \ge n$時，決定出 SDR 的個數。

参 考 資 料

〔1〕 G. Berman and K.D. Fryer, *Introduction to Combinatorics*. Academic Press, 1972.

〔2〕 R.A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*. North-Holland, 1977.

〔3〕 M.Hall. Jr., *Distinct representatives of subsets*, Bull. Amer. Math. Soc. **54**(1948), 922-926.

〔4〕 P. Hall, *On representatives of subsets*, Jour. London Math. Soc., **10**(1935), 26-30.

〔5〕 P.R. Halmos and H.E. Vaughan, *The marriage problem*, Amer. Jour. Math., **72**(1950), 214-215.

〔6〕 H.B. Mann and H.J. Ryser, *Systems of distinct representetives*, Amer. Math. Monthly, **60**(1953), 397-401.

〔7〕 H.J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, Carus Mathemetical Monograph No.14. Washington: Mathematical Association of America, 1963.

——王子俠先生現任教於加拿大 Wilfrid Larerier 大學