數學傳播　43卷4期, pp. 99-109

高階線性遞迴數列的一般化費氏螺線

林鳳美

考慮數列 $\{a_n\}$, ≥ 0, 若滿足二階齊次線性遞迴關係式:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \tag{1}$$

則稱爲費氏數列 (Fibonacci sequence)。費氏數列具有許多與黃金比例 (golden ratio) 及費氏螺線 (Fibonacci spiral) 密切的性質, 皆涉及美學與生物的生長模式。

事實上, 我們利用費氏數列的各項爲邊作正方形, 稱爲數列方形 (Sequence square), 再依序以逆時針螺旋排列, 由 0 點出發, 不斷在正方形內逆時針作出四分之一的圓弧, 連結成一條螺線, 稱爲費氏螺線, 這近似於鸚鵡螺的螺線, 參見圖 1。

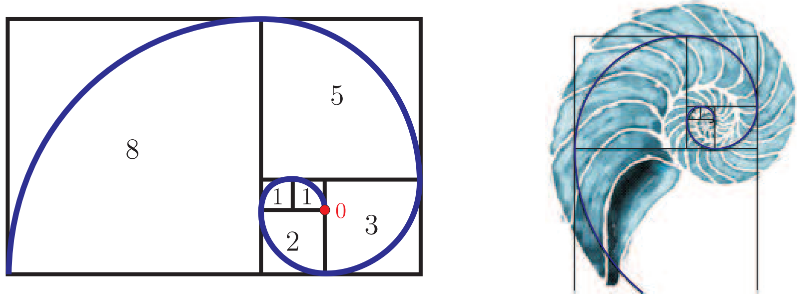

圖 1: 費氏螺線與鸚鵡螺的螺線

圖 1 中的數列方形長與寬的比爲費氏數列的後前項的比 a_{n+1}/a_n, 當項數 n 越大時, 其值正巧爲黃金比列 ϕ, 近似於 1.618, 或特徵正實根。

我們把 (1) 式推廣到更一般 k 階正實數齊次線性遞迴關係式:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, \tag{2}$$

其中係數 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 爲正實數且 $c_k \neq 0$。顯然, 如果給定首 k 項的初期值, 就可確定 (2) 式唯一的整個數列, 則稱爲 k 階正實數齊次線性遞迴數列。

我們給定首 k 項的初期值爲 $a_1 = 1$, $a_i = 0$, 其中 $i = 0, -1, -2, \ldots, -(k-2)$, 是爲了結合數列及螺線與幾何間相互間妙趣, 並且盡量以推廣與類推的眼光來開展。美妙地, 這個 k

階問題的結果是豐碩的。

底下是我們要探討的主要三個問題:

(i) 唯一性問題: 數列的特徵正實根是否等於數列的後前項比的極限呢?
(費氏數列的後前項比的極限等於特徵正實根, 也是黃金比列 ϕ。)

(ii) 幾何建構問題：依照費氏螺線的樣式如何建構出 k 階的數列螺線呢?

(iii) 收斂性問題：建構出 k 階的數列螺線收斂條件爲何?

1. 唯一性問題

甲、唯一特徵正實根

首先要求 (2) 式的一般項 a_n, 可嘗試用 $a_n = x^n$ 代入, 得 n 次代數方程式

$$f(x) = x^n - c_1x^{n-1} - c_2x^{n-2} - \cdots - c_kx^{n-k} = 0.$$

因爲零解不是我們所要的, 所以可消去 x^{n-1} 的因式, 得到 k 次代數方程式

$$f(x) = x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_k = 0, \tag{3}$$

則 (3) 式稱爲 (2) 式的特徵方程式, 其中 (3) 式的每一個根都稱爲特徵複根。由代數基本定理知最多有 k 個相異特徵複根, 可令 k 個特徵複根爲 α_i $(1 \le i \le k)$ 且 α_i 爲最大特徵正實根, 由於 $c_1, c_2, \ldots, c_k > 0$, 則有 $\alpha_1 \ge |\alpha_i|$, $i = 2, 3, \ldots, k$, 這性質讀者可自行證明。

例如: 數列 $\{a_n\}$: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2a_{n-4}$, 特徵方程式爲

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2 = 0,$$
$$\Rightarrow\ f(x) = (x-2)(x+1)(x^2+1) = 0,$$

所以特徵複根爲 $2, -1, \pm i$, 即 $2 > |-1| = |i| = |-i|$ 是滿足 $\alpha_1 \ge |\alpha_2| \ge |\alpha_3| \ge |\alpha_4|$。

定理 1: 設 $\{a_n\}$ 爲 k 階正實係數齊次線性遞迴數列, 若有 k_1 個特徵實根爲 α_i, 且 α_1 爲最大特徵正實根, 其中 $\alpha_1 \ge \alpha_i$ $(1 \le i \le k_1 \le k)$, 則 α_1爲數列 $\{a_n\}$ 的唯一特徵正實根, 且實根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 均相異 (沒有重根的情形)。

證明: 現在利用笛卡兒符號法則 (Descartes's rule of signs) 來判定特徵方程式的正實根的個數。首先觀察 $f(x) = 0$ 的係數 $(1, -c_1, -c_2, \ldots, -c_k)$ 之正負符號關係爲 $(+, -, -, \ldots, -)$, 由於第一項及第二項符號改變, 即係數符號的變化次數 N^+ 爲 1。令正實根的個數爲 N, 則由笛卡兒符號法則知 $N^+(=1) \ge N$ 並且 $1 - N$ 爲非負偶數, 所以 $N = 1$, 故 α_1 爲特徵方程式 $f(x) = 0$ 的唯一正實根。

另一方面, 若實數 α 爲數列的特徵根, 則 $f(\alpha)=0$, 故 $f(\alpha)=\alpha^k-c_1\alpha^{k-1}-\cdots-c_k=0$, 但當 $\alpha>0$ 時,

$$\begin{aligned} f'(\alpha)&=k\alpha^{k-1}-c_1(k-1)\alpha^{k-2}-\cdots-c_{k-1}\\ &>k[\alpha^{k-1}-c_1\alpha^{k-2}-\cdots-c_{k-1}]=k\Big(\frac{f(\alpha)+c_k}{\alpha}\Big)=\frac{kc_k}{\alpha}>0, \end{aligned}$$

又當 $\alpha<0$ 時, 若 $k=3$, $\alpha=-1$, $c_1=100$, $c_2=1$, $c_3=2$, 則 $f'(\alpha)=3\alpha^2-2c_1\alpha-c_2$。考慮 $f'(\alpha)-3[\alpha^2-c_1\alpha-c_2]=c_1\alpha+2c_2=-98<0$, 得 $f'(\alpha)<0$。

所以 $f'(\alpha)\neq 0$, 故 $f(x)=0$ 的實根沒有重根的情形, 即其特徵實根 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k_1}$ 均相異。 □

由上可知 $f(x)=0$ 的特徵實根均相異 (沒有重根), 在探討 (2) 式的一般解時, 分成 k 個相異特徵實根或有特徵共軛複根來討論。事實上, 特徵共軛複根的情形只是相異特徵實根的一個特例。不失一般性, 底下僅以出現 $k-2$ 個相異特徵實根 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-2}$ 及一組特徵共軛複根 α_{k-1},α_k 來證明。

定理 2: 設 $\{a_n\}$ 爲 k 階正實係數齊次線性遞迴數列,

(i) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 爲數列 $\{a_n\}$ 的特徵相異實根, 則數列 $\{a_n\}$ 的一般解爲

$$a_n=d_1\alpha_1^n+d_2\alpha_2^n+\cdots+d_k\alpha_k^n, \tag{4}$$

其中 d_i $(i=1,2,\ldots,k)$ 爲不爲零的任意常數。

(ii) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-2}$ 爲數列 $\{a_n\}$ 的特徵相異實根且有一組特徵共軛複根 α_{k-1},α_k, 則數列 $\{a_n\}$ 的一般解爲

$$a_n=d_1\alpha_1^n+d_2\alpha_2^n+\cdots+d_{k-2}\alpha_{k-2}^n+(d_{k-1}+d_k)\gamma^n\cos n\theta+i(d_{k-1}-d_k)\gamma^n\sin n\theta,$$

其中 d_i $(i=1,2,\ldots,k)$ 爲不爲零的任意常數。

證明: (i) 給定首 k 項的初期值爲

$$a_1=1,\ a_2=\beta_2,\ a_3=\beta_3,\ a_4=\beta_4,\ \ldots,\ a_k=\beta_k\quad(\beta_k \text{ 不爲零},\ i=1,2,\ldots,k)$$

事實上, 由 (4) 式得知

$$\text{線性方程組 }\Gamma:\begin{cases} d_1\alpha_1+d_2\alpha_2+\cdots+d_k\alpha_k=1\\ d_1\alpha_1^2+d_2\alpha_2^2+\cdots+d_k\alpha_k^2=\beta_2\\ \qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\quad\vdots\\ d_1\alpha_1^k+d_2\alpha_2^k+\cdots+d_k\alpha_k^k=\beta_k \end{cases}$$

爲關於 d_i $(i=1,2,\ldots,k)$ 的線性方程組, 其係數行列式爲

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \cdots & \alpha_k^k \end{vmatrix} = \alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \cdots & \alpha_k^k \end{vmatrix}.$$

由 Vandermonde 行列式且 Cramer 法則得知係數行列式不爲零及 $d_i \neq 0$ (因爲特徵根 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 均相異), 因此, 線性方程組 Γ 必有唯一一組解 d_i $(i=1,2,\ldots,k)$, 故 (4) 式爲 (3) 式的一般解。

(ii) 事實上, 特徵共軛複根的情形只是相異特徵實根的一個特例。
令 $\alpha_{k-1}=\delta_1+i\delta_2$, $\alpha_k=\delta_1-i\delta_2$, 其中 $\gamma=\sqrt{\delta_1^2+i\delta_2^2}$, $\theta=\tan^{-1}(\delta_2/\delta_1)$, 則

$$\begin{aligned} d_{k-1}\alpha_{k-1}^n+d_k\alpha_k^n &= d_{k-1}(\delta_1+i\delta_2)^n+d_k(\delta_1-i\delta_2)^n \\ &= d_{k-1}\gamma^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)+d_k\gamma^n(\cos n\theta-i\sin n\theta) \\ &= (d_{k-1}+d_k)\gamma^n\cos n\theta+i(d_{k-1}-d_k)\gamma^n\sin n\theta. \end{aligned}$$

因此, 數列 $\{a_n\}$ 的一般解

$$a_n=d_1\alpha_1^n+d_2\alpha_2^n+\cdots+d_{k-2}\alpha_{k-2}^n+(d_{k-1}+d_k)\gamma^n\cos n\theta+i(d_{k-1}-d_k)\gamma^n\sin n\theta,$$

其中 d_i $(i=1,2,\ldots,k)$ 爲不爲零的任意常數。 □

註: 由定理 2 知我們要討論的線性遞迴關係式都是 k 階線性遞迴關係式, 也就是在一般解中的每一個係數 d_i 均不爲 0。

例如: 數列 $\{a_n\}:a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+2a_{n-4}$, 特徵複根爲 $2,-1,\pm i$。
因爲 $\pm i=\cos(\pi/2)\pm i\sin(\pi/2)$, 所以數列 $\{a_n\}$ 的一般解爲

$$a_n=d_1(2)^n+d_2(-1)+(d_3+d_4)\cos(n\pi/2)+i(d_3-d_4)\sin(n\pi/2). \tag{5}$$

由於初期值爲 $a_{-2}=0$, $a_{-1}=0$, $a_0=0$, $a_1=1$, 代入 (5) 式得知

$$\begin{cases} a_{-2}= d_1(2)^{-2}+d_2(-1)^{-2}-(d_3+d_4)=0 \\ a_{-1}=d_1(2)^{-1}+d_2(-1)^{-1}-i(d_3-d_4)=0 \\ a_0= d_1(2)^0+d_2(-1)^0+(d_3+d_4)=0 \\ a_1= d_1(2)^1+d_2(-1)^1+i(d_3-d_4)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{-2}= \frac14 d_1+d_2-d_3-d_4=0 \\ a_{-1}=\frac12 d_1-d_2-i(d_3-d_4)=0 \\ a_0= d_1+d_2+d_3+d_4=0 \\ a_1=2d_1-d_2+i(d_3-d_4)=1 \end{cases}.$$

求解得 $d_1=\dfrac{4}{15}$, $d_2=\dfrac{1}{6}$, $d_3+d_4=-\dfrac{1}{10}$, $i(d_3-d_4)=\dfrac{3}{10}$, 故數列 $\{a_n\}$ 的一般解爲

$$a_n=\frac{4}{15}(2)^n-\frac{1}{6}(-1)^n-\frac{1}{10}\cos(n\pi/2)+\frac{3}{10}\sin(n\pi/2).$$ □

乙、特徵正實根等於數列的後前項比的極限

「費氏數列的後前項比的極限等於特徵正實根, 其值也是黃金比列 ϕ。」這個性質是德國天文學家克卜勒 (Johannes Kepler, 1571～1630) 與費氏數列、黃金比列 ϕ 的不期而遇。如何觀察出來呢?

他將黃金比列寫成連分數

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

若逐項分斷連分數, 然後一步一步往下算去, 不僅可以估計出黃金比列 ϕ, 美妙地可發現費氏數列的後前項比, 如下一系列值:

$$1 = \frac{1}{1} = 1.00000, \quad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2.00000, \quad 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1.50000,$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}} = \frac{5}{3} = 1.66666, \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5} = 1.60000,$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}} = \frac{13}{5} = 1.62500.$$

從這些逐項近似值中, 發現費氏數列的後前項比的極限等於黃金比列 ϕ。推廣至 k 階時, 數列的後前項比的極限等於唯一特徵正實根, 底下就來證明。

定理 3: 設 $\{a_n\}$ 爲 k 階正實係數齊次線性遞迴數列,

(i) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ 爲數列 $\{a_n\}$ 的特徵相異實根, 其中 α_1 爲唯一特徵正實根並且 $\alpha_1 \geq \alpha_i$, $i = 2, 3 \ldots, k$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_1$。

(ii) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ 爲數列 $\{a_n\}$ 的特徵相異實根且有一組特徵共軛複根 α_{k-1}, α_k, 其中 α_1爲唯一特徵正實根並且 $\alpha_1 \geq |\alpha_i|$, $i = 2, 3 \ldots, k$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_1$。

證明: (i) 由定理 2 得知數列 $\{a_n\}$ 的一般解爲 $a_n = d_1\alpha_1^n + d_2\alpha_2^n + \cdots + d_k\alpha_k^n$, 其中 d_i $(i = 2, 3, \ldots, k)$ 爲不爲零的任意常數。

由於 $\alpha_1 \geq \alpha_i$, $i=2,3,\ldots,k$, 因此,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_1\alpha_1^{n+1}+d_2\alpha_2^{n+1}+\cdots+d_k\alpha_k^{n+1}}{d_1\alpha_1^{n}+d_2\alpha_2^{n}+\cdots+d_k\alpha_k^{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d_1\alpha_1+d_2\alpha_2\Big(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\Big)^n+d_3\alpha_3\Big(\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}\Big)^n+\cdots+d_k\alpha_k\Big(\dfrac{\alpha_k}{\alpha_1}\Big)^n}{d_1+d_2\Big(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\Big)^n+d_3\Big(\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}\Big)^n+\cdots+d_k\Big(\dfrac{\alpha_k}{\alpha_1}\Big)^n}=\alpha_1. \quad (6)$$

(ii) 令 $\alpha_{k-1}=\delta_1+i\delta_2$, $\alpha_k=\delta_1-i\delta_2$, 其中 $\gamma=\sqrt{\delta_1^2+i\delta_2^2}$, $\theta=\tan^{-1}(\delta_2/\delta_1)$。
因爲 $\alpha_1>|\alpha_i|$, $i=2,3,\ldots,k$, 所以 $\alpha_1>|\alpha_{k-1}|=|\alpha_k|=\gamma\Rightarrow 0<\dfrac{\gamma}{\alpha_1}<1$。
由定理 2 得知數列 $\{a_n\}$ 的一般解爲

$$a_n=d_1\alpha_1^n+d_2\alpha_2^n+\cdots+d_{k-2}\alpha_{k-2}^n+(d_{k-1}+d_k)\gamma^n\cos n\theta+i(d_{k-1}-d_k)\gamma^n\sin n\theta$$

其中 d_i $(i=1,2,\ldots,k$ 爲不爲零的任意常數。由於

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(d_{k-1}+d_k)\gamma^{n+1}\cos(n+1)\theta+i(d_{k-1}-d_k)\gamma^{n+1}\sin(n+1)\theta}{(d_{k-1}+d_k)\gamma^{n}\cos n\theta+i(d_{k-1}-d_k)\gamma^{n}\sin n\theta}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(d_{k-1}+d_k)\gamma\Big(\dfrac{\gamma}{\alpha_1}\Big)^n\cos(n+1)\theta+(d_{k-1}-d_k)\gamma\Big(\dfrac{\gamma}{\alpha_1}\Big)^n\sin(n+1)\theta}{(d_{k-1}+d_k)\Big(\dfrac{\gamma}{\alpha_1}\Big)^n\cos n\theta+(d_{k-1}-d_k)\Big(\dfrac{\gamma}{\alpha_1}\Big)^n\sin n\theta}=0, (7)$$

因此, 由 (6) 式與 (7) 式知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d_1\alpha_1^{n+1}+\cdots+d_{k-2}\alpha_{k-2}^{n+1}+(d_{k-1}+d_k)\gamma^{n+1}\cos(n+1)\theta+i(d_{k-1}-d_k)\gamma^{n+1}\sin(n+1)\theta}{d_1\alpha_1^{n}+\cdots+d_{k-2}\alpha_{k-2}^{n}+(d_{k-1}+d_k)\gamma^{n}\cos n\theta+i(d_{k-1}-d_k)\gamma^{n}\sin n\theta}$$
$$=\alpha_1.$$
□

推論: 若不僅有一組特徵共軛複根, 且 α_1爲唯一特徵正實根並且 $\alpha_1>|\alpha_i|$, $i=2,3,\ldots,k$, 則極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 必存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha_1$。

2. 幾何建構問題

若依照費氏螺線的樣式 (逆時針旋轉), 推廣 k 階齊次線性遞迴數列時產生的曲線均爲螺線嗎?

本文將 k 階時產生的曲線稱爲數列螺線。顯然地, 數列螺線的建構條件爲

數列 $\{a_n\}$ 中每一項皆爲正實數且爲 (嚴格) 遞增數列, 即 $0<a_1\leq a_2\leq a_3\leq\cdots$。

那麼當 $c_1, c_2, \ldots, c_k \geq 1$ 時, 顯然是 $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$, 並且數列螺線是保持費氏螺線的樣式建構方式, 以數列 $\{a_n\}$: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ 爲例, 參見圖 2。

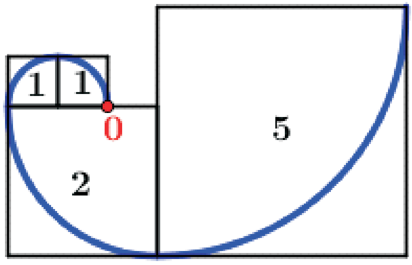

圖 2 : 數列螺線

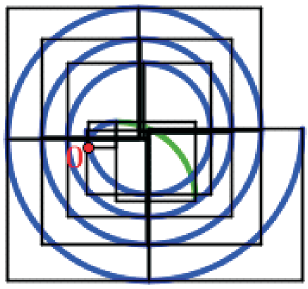

圖 3: 第 2 項後成爲數列螺線

事實上, 如果將 $c_1, c_2, \ldots, c_k \geq 1$ 改爲 $c_1 + c_2 + \cdots + c_k \geq 1$, 則數列在某項後皆爲 (嚴格) 遞增數列, 證明參見定理 5。

例如: 數列 $\{a_n\}$: $a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{1}{3}a_{n-2} + \dfrac{1}{2}a_{n-3}$, 是從第 2 項後開始嚴格遞增, 即第 2 項後成爲由內而外逆時鐘旋出的螺線, 參見圖 3, 此情形也列入本文數列螺線的範疇。

此外, 若考慮 $0 < c_1 + c_2 + \cdots + c_k < 1$, 則數列在某項後爲 (嚴格) 遞減數列, 證明參見定理 5。若採用寬廣觀點, 同樣地也可建構出數列螺線, 則數列螺線是在某項後成爲由外而內逆時鐘旋入的螺線

例如: 數列 $\{a_n\}$: $a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{1}{3}a_{n-2} + \dfrac{1}{4}a_{n-3}$, 是從第 6 項後開始嚴格遞減, 即第 6 項後成爲由外而內逆時鐘旋入的螺線, 參見圖 4, 此情形也列入本文數列螺線的範疇。

綜合以上, 本文所談數列螺線包含由內而外逆時鐘旋出或由外而內逆時鐘旋入的螺線。

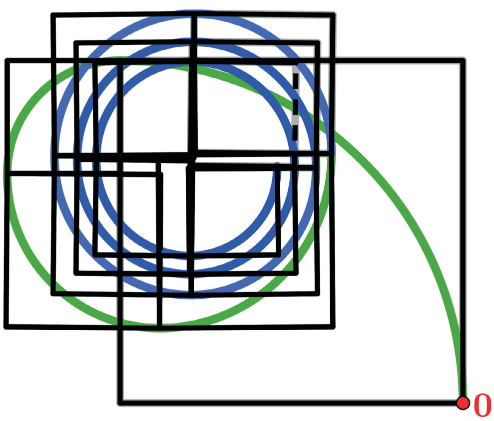

圖 4 : 第 6 項後才形成數列螺線

值得一提, 針對 a_i $(i=2,3,\ldots,n)$ 爲負實數或 0, 不妨將「a_i 的負號」代表曲線方向與「a_i 的正號」相反, 並且凹性是相反的。而「$a_i=0$」是代表曲線沒有移動, 配合費氏螺線的樣式建構方式, 則必出現尖點產生, 其對應曲線必不是螺線。

例如: 數列 $\{a_n\}$: $a_n=-a_{n-1}-a_{n-2}$ 中 $a_1=1$, $a_2=-1$, $a_3=0$, $a_4=1$, 參見圖 5, 由於 a_1 與 a_2 是正負相間, 對應四分之一的圓弧間必出現尖點。而 $a_3=0$ 代表曲線沒有移動, 相鄰 a_2 與 a_4 所對應四分之一的圓弧間必出現尖點, 因此, 其對應曲線必不是螺線。

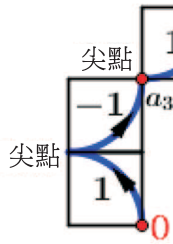

圖 5: 數列非螺線

我們將數列螺線的方程式用參數式來表示, 爲了方便, 令數列螺線的起點坐標爲 $(1,0)$ 且第一個四分之一的圓弧之圓心坐標爲 $(0,0)$。

定理 4: 設 $\{a_n\}$ 爲 k 階正實數齊次線性遞迴數列, 則數列螺線參數式爲

$$x(t)=1+\sum_{i=1}^{[t]}\delta_i(a_i-a_{i-1})+a_{[t]}\cdot\cos\Big(\frac{t-1}{2}\pi\Big),$$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{[t]}\delta_i'(a_i-a_{i-1})+a_{[t]}\cdot\sin\Big(\frac{t-1}{2}\pi\Big),$$

其中實數 $t\geq 1$, $\delta_i=\dfrac{1+(-1)^{i+1}}{2}\times(-1)^{[\frac{t+1}{2}]}$, $\delta_i'=\dfrac{1+(-1)^{i}}{2}\times(-1)^{[\frac{t}{2}]}$, [ ] 爲高斯符號。

證明: 利用圓的參數式來推導數列螺線參數式。
首先先考慮圓心的移動量 : 數列螺線從 $(1,0)$ 起, 每個四分之一的圓弧的圓心以 a_i-a_{i-1} 單位移動 $(0\leq i\leq n)$, 但要注意 x,y 坐標是否移動 a_i-a_{i-1} 單位, 我們發現除了前四個圓心外, 之後圓心軌跡就遵循「向左、向下、向右與向上」等四個循環方向移動, 參見下表, 其中用 -1, 0, 1來表示 x 軸方向-向左、沒有移動、向右和 y 軸方向-向下、沒有移動、向上。

圓心移動軌跡	向左	向下	向右	向上
x 軸方向	-1	0	$+1$	0
y 軸方向	0	-1	0	$+1$

上表可用數學式子來表示, 其中 $[\ ]$ 爲高斯符號:

(i) 由 $\delta_i=\dfrac{1+(-1)^{i+1}}{2}\times(-1)^{\left[\frac{t+1}{2}\right]}$ 來決定 x 坐標是否移動 a_i-a_{i-1} 單位 $(i=1,2,3,\ldots)$。

(ii) 由 $\delta_i'=\dfrac{1+(-1)^{i}}{2}\times(-1)^{\left[\frac{t}{2}\right]}$ 來決定 y 坐標是否移動 a_i-a_{i-1} 單位 $(i=1,2,3,\ldots)$。

由上可知若參數 t 爲大於 1 的實數, 則圓心的坐標爲

$$\Big(1+\sum_{i=1}^{[t]}\delta_i(a_i-a_{i-1}),\sum_{i=1}^{[t]}\delta_i'(a_i-a_{i-1})\Big),\ \text{其中 } [\ ] \text{ 爲高斯符號。}$$

又四分之一圓的半徑爲 $a_{[t]}$ 且旋轉角度爲 $\dfrac{t-1}{2}\pi$, 則由圓的參數式知數列螺線參數式爲

$$x(t)=1+\sum_{i=1}^{[t]}\delta_i(a_i-a_{i-1})+a_{[t]}\cdot\cos\Big(\frac{t-1}{2}\pi\Big),$$
$$y(t)=\sum_{i=1}^{[t]}\delta_i'(a_i-a_{i-1})+a_{[t]}\cdot\sin\Big(\frac{t-1}{2}\pi\Big),$$

其中 $t\geq1$, $\delta_i=\dfrac{1+(-1)^{i+1}}{2}\times(-1)^{\left[\frac{t+1}{2}\right]}$, $\delta_i'=\dfrac{1+(-1)^{i}}{2}\times(-1)^{\left[\frac{t}{2}\right]}$, $[\ ]$ 爲高斯符號。 □

3. 收斂性問題

我們發現：當係數 $c_1,c_2,\ldots,c_k\geq1$ 時, 數列 $\{a_n\}$ 爲嚴格遞增, 則必可建構出數列螺線, 但係數 $c_1,c_2,\ldots,c_k<1$ 時, 數列 $\{a_n\}$ 有遞增也有遞減, 無法區分怎樣的數列螺線, 以下定理 5 我們提供最佳的充分條件就是由 $c_1+c_2+\cdots+c_k$ 的值來決定。

定理 5: 設 $\{a_n\}$ 爲 k 階正實係數齊次線性遞迴數列, 則數列在某項後, 有以下三種數列曲線:

(i) 當 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_k>1$ 時, 則 $\{a_n\}$ 爲遞增數列, 數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的螺線。

(ii) 當 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_k=1$ 時, 則 $\{a_n\}$ 趨近常數數列, 數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的螺線。當 $n\to\infty$ 時, 數列螺線會收斂於一圓 (此圓稱爲極限圓)。

(iii) 當 $0<c_1+c_2+c_3+\cdots+c_k<1$ 時, 則 $\{a_n\}$ 爲遞減數列, 數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的螺線。當 $n\to\infty$ 時, 數列螺線會旋入至一點 (此點稱爲點圓)。

註: 極限圓及點圓爲數列螺線的退化情形。

證明: 由數列的特徵方程式如 (3) 式, 當 $x=1$ 代入 (3) 式, 得到

$$f(1)=1-(c_1+c_2+\cdots+c_k).$$

(i) 當 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_k>1$ 時, 則

$$f(1)=1-(c_1+c_2+\cdots+c_k)<0;$$

另一方面, 因爲 (3) 式的領導係數爲 1, 所以正實根 $\alpha_1>1$, 參見圖 6(a), 再由定理 3 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha_1>1$。因此, 數列$\{a_n\}$在某項後會是遞增的, 數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的螺線。

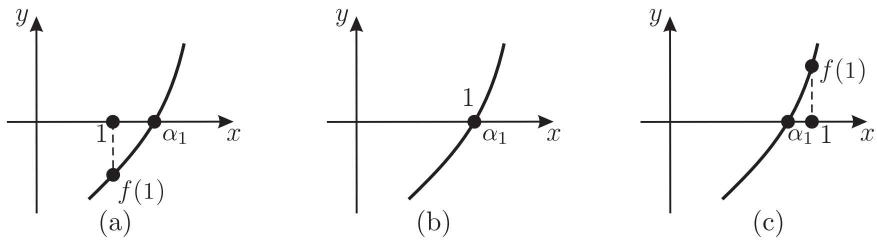

圖 6: 數列的特徵方程式的增減情形

(ii) 當 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_k=1$ 時, 則由定理 3 可知:

$f(1)=1-(c_1+c_2+\cdots+c_k)=0$, 並且正實根 $\alpha_1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$, 參見圖 6(b)。

因此, 數列在某項後會是趨近常數, 數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的螺線。另一方面, 當 $n\to\infty$ 時, 由於 $a_n\to$ 常數, 數列螺線會收斂於一圓。

(iii) 當 $0<c_1+c_2+\cdots+c_k<1$ 時, 則由定理 3 可知:

$f(1)=1-(c_1+c_2+\cdots+c_k)>0$, 並且正實根 $\alpha_1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$, 參見圖 6(c)。

因此, 數列在某項後會是遞減的, 數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的螺線。另一方面, 當 $n\to\infty$ 時, 數列螺線會旋入至一點。 □

4. 結語

費氏螺線的誕生早已與宇宙、黃金比例共存著, 爲大自然偉大的法則, 這樣的生長現象並非是偶然的, 近代的數學家已研究出其數學模式的成因, 可說:

大自然的奧秘或線索藏在數學裡。

值得一提, 費氏螺線近似於黃金螺線 (是對數螺線的一種), 數學家笛卡兒 (R. Descartes,

1596~1650) 稱它爲等角螺線, 說明了對數螺線的獨一無二的特性, 也因此對應了許多美學與生物的生長模式。

事實上, 本文數列螺線跟隨圓的半徑的增減擴充而產生, 除了如費氏螺線的模式是由內而外逆時鐘旋出的螺線外, 還擴充有由外而內逆時鐘旋入的螺線, 反映出多樣對數螺線的新面貌, 皆近似於等角螺線, 或許大自然早已出現此螺線的生長或運動行爲模式。

例如:「飛蛾撲火」的運動行爲模式正是數列螺線會旋入至一點, 參見圖 7, 可說數列螺線早已出現在大自然裡。此外, 大自然提供如此多的線索, 等待我們挖掘並且證明之, 我們繼續追隨它, 使之美麗。

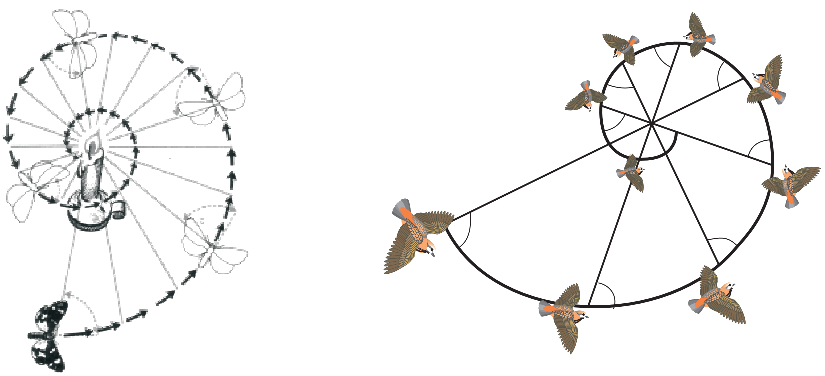

圖 7: 飛蛾撲火

參考文獻

1. 張福春、莊淨惠。線性遞迴關係之求解(上)。數學傳播季刊, 33(4), 47-62, 2009。
2. 張福春、莊淨惠。線性遞迴關係之求解(下)。數學傳播季刊, 34(1), 35-57, 2010。
3. Mario Livio (丘宏義譯)。黃金比例 1.61803··· 的祕密 : The Golend Ratio。臺北市 : 遠流出版事業股份有限公司, 2004。
4. Merve Ozvatan and Oktay K. Pashaev, *Generalized Fibonacci Sequences and Binet-Fibonacci Curves*, Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology, Izmir 35430, Turkey, 2017.
5. Xiaoshen Wang, A simple proof of Descartes's Rule of Signs, *Amer. Math. Monthly* 111, 525-526, 2004.

—本文作者任教於臺北市立成淵高級中學—