數學傳播 43卷4期, pp. 54-70

用函數來思考 (下)

林琦焜

4. 三角函數

『幾何三角共五角, 三角三角、幾何幾何。
積分微分並差分, 微分微分、積分積分。』

— Chi-Kun Lin —

在數學漫長的歷史長河是離不開天文學, 而天文學是離不開三角學。這是一個古老且非常有用的數學分支。出生於尼西亞 (Nicaia 或 Nicaea)[1] 的希帕恰斯 (Hipparkhos, 約 BC190∼BC120) 是所有時代最偉大的天文學家之一。他同時也是一位傑出的數學家, 但因爲他的數學成就是附屬於天文學之下以至於被人遺忘了。事實上他是三角學與球面三角學的奠基者, 沒有三角學就沒有真正的天文學。我們關於希帕恰斯的知識是透過後來的天文學家特別是托勒密而來的。托勒密對於這位前輩評價非常的高, 稱他爲熱愛研究與真理的人。

西元 140 年, 古希臘天文學家托勒密發表了他的 13 卷巨著《天文學大成》(Almagest) 或翻譯爲《至大論》, 在總結前人工作 (特別是希帕恰斯 (Hipparkhos)) 的基礎上系統地確立了地心說。根據這一學說, 地爲球形, 且居於宇宙中心, 靜止不動, 其他天體都繞著地球轉動。《天文學大成》: 共十三冊, 拉丁書名源於阿拉伯文的 almajst, 而這又源於希臘文的「最偉大的結集」。雖然這是天文學的著作, 但是它在數學史非常重要, 因爲它可以說是三角學最早有系統的論著。在托勒密之後, 人們對於天文學的興趣沒落了, 因此三角學的研究也漸漸式微。後來印度人採用亞歷山大學派的方法而延續了三角學的香火。值得一提的是 : 正弦 (Sine) 是印度天文學家發明的, 後來被花拉子模以及其他阿拉伯天文學家採用, 並且在 14 世紀傳到使用拉丁語的西方世界。

何謂三角學 (trigonometry)? 由其名知其義, tri (三) gon (邊) metry (測量)、也就是三邊 (三角形) 測量。關於三角學最著名的傳說是泰爾斯 (Thales, 624BC∼547BC) 訪問埃

[1]尼西亞位於小亞細亞, 著名的尼吉亞會議是指在此舉行的兩次基督教大公會議, 分別是第一次 (公元 325 年) 和第七次 (公元 787 年) 的大公會議。對基督教影響深遠。第一次會議頒布《尼西亞信經》就是以此城市爲名。《信經》(英語是 Creed 源自拉丁文 credo, 意爲「我信」) 是傳統基督教 (天主教) 權威性的基本信仰綱要。

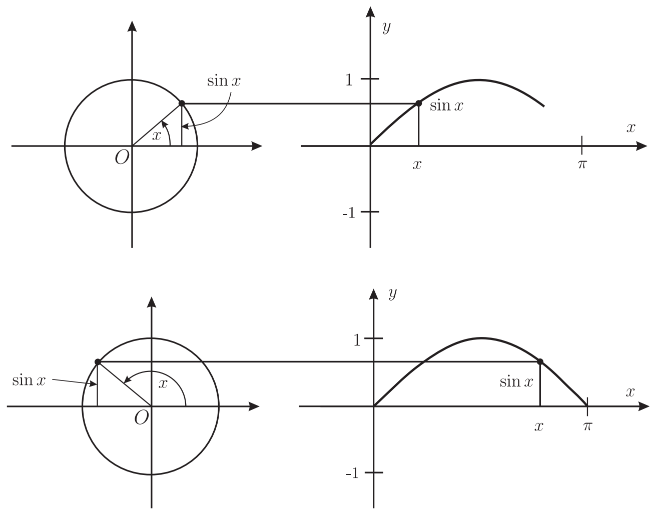

圖 5: $y = \sin x$ 在第一, 二象限之圖形

及時法老王即席問他如何測量金字塔的高度時, 他向法老王要了一個士兵命其站在太陽下等到該士兵的影子與身高一樣時再命令兩個士兵立刻去量金字塔影子的長度, 這就是金字塔的高度! 這實在是非常有創意的方法。好的數學是利用簡單的方法來解決困難的問題, 而不是殺雞用牛刀。泰爾斯的方法正是三角學的根本精神：利用直角三角形的相似性。

三角學的起源是從確定平面三角形與球面三角形的邊與角的關係開始的。以公式 $y = \sin x$ 而言最初是直角三角形中關於角度定義的三角比, 而且只關心幾個特別角。現在進入函數的領域則脫離了角度的限制, 而認定僅僅是兩個變量之間的關係。三角函數另一個常見的名稱是圓函數(circular function) 因爲三角函數是從單位圓出發的。

例題 4.1: 正弦函數 $y = \sin x$。

解: 令 P 是單位圓周的動點由 $A = (1, 0)$ 按逆時針旋轉, 則 P 到 x- 軸的值就是 $\sin x$。顯然 P 在上半圓周 $\sin x$ 的值爲正, 經過 π 之後 P 落在下半圓周則 $\sin x$ 的值爲負。其實 $\sin x$ 的正負值與四個象限的 y 值一致 $(+, +), (-, +), (-, -), (+, -)$。當動點 P 在單位圓周上周期地運轉時在 x-y 平面也同時畫出一條週期函數的正弦曲線。

定理 4.2: (**托勒密定理**)

在圓的內接四邊形, 其兩個對角線的乘積等於兩雙對邊乘積之和。

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}. \tag{4.1}$$

證明: 請參考 [10, 17]。由托勒密定理可以推得畢氏定理與和差化積(積化和差) 等公式, 讀者可以參考 [10]。

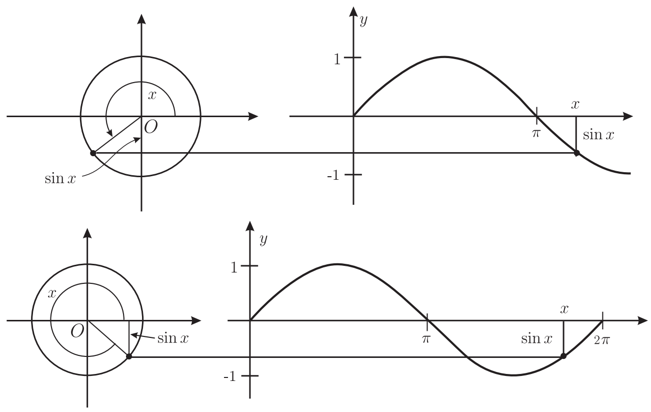

圖 6: $y=\sin x$ 在第三, 四象限之圖形

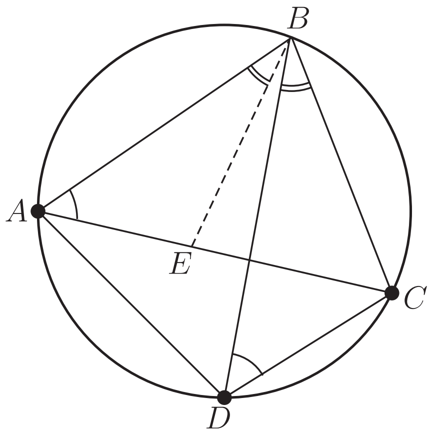

圖 7: 托勒密定理

三角函數基本上是關於三角形角與邊長之間關係的函數, 但以實用性而言還是 Lagrange 的定義最好用例如

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

如果我們給函數定義爲收斂的無窮級數則容易推得

$$\cos ix = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\,.$$

這是一個實數。事實上可以證明：任何實數值 (real-valued) 的偶函數在虛軸上取實數值。

5. 指數函數

爲了避免混亂我們假設 $a>0$。最開始指數代表同一個數自己相乘, 例如：a^3 代表 $a^3=a\cdot a\cdot a$, 指數這個符號是 Leibniz 於 1675 年所使用。他更於 1684 年定義了負數的情形

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$。因爲

$$a\cdot a=a^2,\qquad a\cdot a\cdot a=a^3,\qquad a\cdot a\cdot a\cdot a=a^4,\qquad .....,$$

所以

$$a^2\cdot a^3=(a\cdot a)(a\cdot a\cdot a)=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^5\,,$$

由此自然可推論至一般情形:

$$a^n\cdot a^m=a^{m+n},\qquad m,n\in\mathbb{N}\,. \tag{5.1}$$

又因爲我們希望(5.1)這個法則對於負數也成立, 因此自然要定義$a^0=1$

$$a^n\cdot a^{-n}=a^n\cdot\frac{1}{a^n}=1(=a^{n-n}=a^0)\,,$$

否則一個數a的0次方是什麼意思(自己不乘自己)? 對於非整數次方, 也有相同的性質:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a\,,$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=a\,,$$

$$\vdots$$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots\cdots\sqrt[n]{a}=a\,;$$

$\sqrt{a}$是 a的平方根, $\sqrt[3]{a}$是 a的三次方根, $\sqrt[n]{a}$是 a的n次方根, 所以

$$a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{1}{q}}\cdot a^{\frac{1}{q}}\cdots a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a^p},\qquad p,q\in\mathbb{N}\,.$$

公式(5.1)對於有理數$\frac{q}{p}$也成立, 實際上根據連續性對所有的實數都成立,

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y},\qquad x,y\in\mathbb{R}\,. \tag{5.1$'$}$$

要將指數從有理數推廣到所有的實數, 例如：$2^\pi=?$ 首先要放棄最原始乘冪的概念, 而進到函數的新世界, 另外加上連續的觀念。在數學上我們稱研究連續性 (continuity) 的這門學問爲分析 (analysis), 這是通往幾乎所有高等數學的入門學問。我們甚至可以推廣到複數 (讀者若有矩陣的知識可以推廣到矩陣)! 換言之, 已經根本消失其原有的數量大小而進入到超越的關係世界, 這是古希臘諸賢完全無法想像的。

我們將指數函數寫爲 $a^x, x\in\mathbb{R}$, 但是這符號容易誤導, 它實際上是將 x 帶到 a^x, x 是在定義域而 a^x 是落在值域。指數函數並非自我相乘; 反之它是一個函數從實數的加法群 $(\mathbb{R},+)$ 到正實數的乘法群 $(\mathbb{R}^+,\times)$

$$a:(\mathbb{R},+)\mapsto(\mathbb{R}^+,\times),\qquad x\mapsto a(x)\equiv a^x\,,$$

$$a^0=1,\quad a^1=a\,.$$

指數最重要的特徵是將《加法》轉換爲《乘法》。最常見的指數函數是以 e 爲底 $\exp(x)$ 或 e^x, 這是數學最重要的函數之一, 常見的定義有六種:

定義 5.1 (**指數函數**):

(1) 冪級數: $\exp(x)=e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$。

(2) 微分方程: $f'=f$、$f(0)=1$, 的唯一解。

(3) e 的 x 次方: e^x。

(4) 自然對數 $\ln x=\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t}dt$ 的反函數。

(5) 極限: $e^x=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$。

(6) 函數方程: $f(x+y)=f(x)f(y)$、$f(0)=1$ 的唯一解。

定義 5 基本上是二項式定理, 這是由複利 (compound interest) 的計算而來, 稍微有見識的數學家對於二項展開式必定是熟悉到像呼吸那麼自然。不管是那一個定義, 首先要確定 e 是什麼? 我們看一下微分 (即變化)

$$\frac{d}{dx}a^x=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{a^{x+\triangle x}-a^x}{\triangle x}=a^x\lim_{\triangle x\to 0}\frac{a^{\triangle x}-1}{\triangle x}=Ca^x\,,$$

其中

$$C=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{a^{\triangle x}-1}{\triangle x}\,;$$

這裡 C 是變化率爲一常數 (假設此極限存在!), 這式子告訴我們 a^x 的微分等於一個常數 C 乘它自己。換句話說, 指數函數之變化與它本身之尺寸 (size) 成正比:

$$\frac{d}{dx}a^x\propto a^x.$$

如果變化率正好等於 1, $C=1$, 時 $\frac{d}{dx}a^x=a^x$, 我們就稱 a 爲 e

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{a^{\triangle x}-1}{\triangle x}=1\quad\Longleftrightarrow\quad a=e\,.\tag{5.2}$$

e 是當這個極限等於 1 時的底 ($a=e$)。總結而言:

『e是一個指數函數的底, 這個函數將和映射到乘積, 而且其變化率 (微分)等於它自己。』

換句話說自然指數函數與它的導數恆等： $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$。它還是所有函數中唯一擁有這個性質的。這個特徵是所有指數函數之性質的根源也是自然指數在應用上之所以重要的理由。如果將 $\frac{d}{dx}$ 視爲線性變換, 則 e^x 是 $D \equiv \frac{d}{dx}$ 的固有函數而且固有值等於 1。

$$Dy = y \quad \Longleftrightarrow \quad (D-1)y = 0\,;$$

固有值的問題等價於方程式求根的問題。

e是一個數, 那麼大約是多少呢? 先寫下答案:

$$e \approx 2.718281828459045\cdots\,. \tag{5.3}$$

要回答這個問題, 我們從級數著手: 假設

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\,,$$

其中$a_i, i = 0, 1, 2, \cdots$爲待求之常數。因爲 $\frac{d}{dx}e^x = e^x$、$e^0 = 1$, 逐項微分得

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots\,.$$

比較係數

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1, \quad \cdots\cdots \quad na_n = a_{n-1}, \quad \cdots\,,$$

因此得

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} = \cdots = \frac{a_0}{n!}\,;$$

但$e^0 = 1$, 所以$a_0 = 1$, 故

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots\,. \tag{5.4}$$

令$x = 1$則 (5.4) 告訴我們

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots\,. \tag{5.5}$$

藉由 (5.5) 這個級數可得 e 之近似值 (但是收斂速度很慢)。[2] 另外, 令 $x = -1$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots\cdots\,. \tag{5.6}$$

再回到 (5.2), 兩邊乘 a

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{a^{1+\triangle x} - a}{\triangle x} = a\,.$$

---

[2]藉由 (5.5) 也可以證明 e 是一個無理數。關於e 是一個超越數 (transcendental number) 的證明技巧是由法國數學家 C. Hermite (1822∼1901) 所給的。後來德國數學家 F. Lindermann (1852∼1939) 將 Hermite 的方法略爲修改之後於 1822 年成功地證明了 π 是超越數, 從而解決了化圓爲方這個古希臘難題。

這告訴我們 $f(x)=a^x$ 在 $x=1$ 之斜率爲 a, 當然在 $x=0$ 之斜率爲 1。我們看連接 $(1,a)$、$(1+\triangle x, a^{1+\triangle x})$這兩點的斜率, 並強迫它等於$a$(近似也!)

$$\frac{a^{1+\triangle x}-a}{\triangle x}\approx a \quad\Longrightarrow\quad \frac{a^{\triangle x}-1}{\triangle x}\approx 1\,,$$

$$a^{\triangle x}\approx 1+\triangle x \quad\Longrightarrow\quad a\approx(1+\triangle x)^{\frac{1}{\triangle x}}\,,$$

所以

$$a=\lim_{\triangle x\to 0}(1+\triangle x)^{\frac{1}{\triangle x}}\,.$$

再令$\triangle x=\frac{1}{n}$, 故

$$a=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\equiv e\,. \tag{5.7}$$

這就是 Euler 的定義!

6. 對數函數

『如果我們渴望進一步全面了解對數的理論, 最好是大體上遵循它的創建歷史。』

— Felix Klein (1849~1925) —

十六世紀後期由於天文與探險之熱潮, 對於計算之要求日益殷切, 如何計算繁雜的資料 (特別是三角計算) 是那個年代最迫切的問題。蘇格蘭數學家 John Napier (1550~1617) 於 1614 年發表《對數奇妙法則的描述》(Mirifici logarithmorum canonis descriotio) 宣布對數[3]的發現, 直到去世之前他仍然在編製對數表。此一遺作後來由英國數學家 Henry Briggs (1561~1631) 完成。對數的發明對於天文學有直接的幫助, 最著名就是 J. Kepler 因著 John Napier 的對數表而加速其行星運動之研究。

對數的歷史比指數還早, 對數符號 log 出自拉丁文 logarithm, 最早由 1632 年義大利數學家卡瓦列里所使用。納皮爾在表示對數時套用 logarithm 整個詞, 並未作簡化。1624年, 克卜勒才把對數符號簡化爲 Log。在數學上我們以 log 來表示, 這個字除了木頭、日誌之外還有話語(word)、思想(thought) 等意思, 它有希臘哲學與基督教神學的背景。對數(logarithm) 這個字是由 比例(logos) 與數字(arithmos) 所組成意思是比例 (或理性) 的數 (number of ration)。古希臘哲學的主導概念是邏各斯 (logos)。這個重要的希臘文原文的意思是話語(道), 同時也解釋作理性、準則、論證或度量。如果我們想抓住希臘哲學的精神, 就必須牢記這一系列含義的重要性, 邏輯 (logic) 就是由此衍生而來, 邏輯學就是有關邏各斯 (logos) 的科學。希臘思

[3]對數的發明就像是一個晴天霹靂來到世界上。前人的任何工作都未能導致這項發明, 也沒有任何東西預見到它或預示它的到來。這項發明是孤立的, 它沒有藉助於其他的智力工作, 也沒有遵循原有的數學思想路線, 就突然闖進人類思想中。《Napier 300 年紀念文集之序言》。

想中"道" 的觀念大約開始於西元前 500 年, 在以弗所的一名哲學家赫拉克利特 (Heraclitus, BC535∼BC475), 他的基本思想是:每一樣東西時刻都在變動。他最著名的例子是 人不可能踏進同一條河流兩次。但是這一切變動並不是雜亂無章的, 而是有秩序的。赫氏認爲邏各斯 (logos), 道, 就是秩序的原則, 整個宇宙都藉它而存在。赫氏更進一步說, 不只物質世界有模式, 事情更迭變動的世界也有模式。他認爲沒有一件事物是漫無目的的, 在一切生命與生命的事蹟中都有一個目的, 一個計劃, 一個設計, 一個構思。然而什麼是力量控制著一切事物呢? 答案又是邏各斯 (logos), 使人有理性, 有認識真理的能力, 有辨別是非的能力就是上帝在人心中的邏各斯 (logos)。這種心意、理性的概念, 統御世界的 logos 使希臘人爲之著迷。例如, 柏拉圖就宣稱: 上帝的邏各斯 (logos) 使行星運行在軌道上, 又按時帶回季節與年份。這個概念後來由斐羅 (Philo, BC20∼AD40) 發揮得淋漓盡致, 他是一位住在亞歷山大的猶太人, 他致力於融合猶太人與希臘人這個崇高的思想, 他認爲上帝的邏各斯 (logos) 係「銘刻在萬物的構造之上」。基本上邏各斯 (logos) 是人和上帝之間的橋樑。

回顧歷史, logos 在對數中最接近的意義是指一切事物遵照它而運行的原則: 將定義域 0、1、2、3、$\cdots$ (arithmos) 對照到值域的一個規則。對數就其歷史而言是從算術–幾何 (等比) 級數之關係開始的:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ q^0 & q^1 & q^2 & q^3 & q^4 & q^5 & q^6 & q^7 & q^8 & \cdots \end{array}$$

關於上述這個關係式有一個有趣的歷史典故 : 據說 Galois 參加法國巴黎高等理工 (École Polytechnique) 的入學考試, 其中口試委員問他對數是甚麼? 他在黑板上寫的就是上述這個精練的關係。然而口試委員不滿意這個答案而認定他是錯的, 因而 Galois 憤而將板擦丟向該委員。

John Napier 考慮的是如下的等比數列

$$10^7(1-10^{-7})^n\,, \qquad n=0,1,2,3,\cdots. \tag{6.1}$$

他稱 n 爲對數, 所以 1 的對數爲 0, $(1-10^{-7})^{10^7}$ 的對數爲 1, 這個數與 e^{-1} 非常接近。

在中學我們是先定義指數 $y=a^x$, 然而再定義對數[4]爲 $x=\log_a y$

$$y=a^x \quad \Longleftrightarrow \quad x=\log_a y\,. \tag{6.2}$$

這裡我們看到一個數 y 的前面寫上"$\log_a$這個符號時, 它的意思是叫你

《到表裡去查, 看這個數要乘幾次方才會得到所要的數》

[4]Euler 在《無窮分析引論》就引進了以 a 爲底 x 的對數 $\log_a x$ 爲滿足 $a^y=x$ 的指數 y。這是歷史上第一次出現對數並明顯地以指數表現出來。

對數最重要的性質是

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)\,,$$

$$\log_a\Big(\frac{x}{y}\Big) = \log_a(x) - \log_a(y)\,,$$

$$\log_a(x^r) = r\log_a(x)\,, \qquad r \in \mathbb{R}\,.$$

對數函數 log 將 $x \in \mathbb{R}^+$ 帶到 $\log(x) \in \mathbb{R}$, 它是一個函數從正實數的乘法群 $(\mathbb{R}^+, \times)$ 映射到實數的加法群 $(\mathbb{R}, +)$

$$\log : (\mathbb{R}^+, \times) \mapsto (\mathbb{R}, +) \qquad x \mapsto \log x\,, \qquad \log 1 = 0$$

對數最重要的特徵是將乘法轉換爲加法。對比於指數函數常見的對數函數 $\log(x)$之定義如下:

定義 6.1: (**對數函數**)

(1) 曲線$y=\frac{1}{t}$下面由$t=1$到$t=x$之間的面積:

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt\,. \tag{6.3}$$

(2) 冪級數: 做個平移則上面的定義改寫爲

$$\log(x) = \int_0^{x-1} \frac{1}{1+t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}, \qquad |x-1| < 1\,; \tag{6.4}$$

要求 $|x-1|<1$ 主要是保證級數的一致收斂性, 通常我們將上式 表示爲

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\,, \qquad |x| < 1\,. \tag{6.4$'$}$$

(3) 一階微分方程的唯一解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad y(1) = 0\,. \tag{6.5}$$

(4) 指數函數 e^x 的反函數。

(5) 函數方程的唯一解:

$$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad f(e) = 1\,. \tag{6.6}$$

無論從哪個定義出發都可以推導出對數的基本性質

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \ln(1) = 0\,.$$

讀者可由《數學是什麼》一書中得到部分的結果。其它可自行練習, 我認爲一個數學人一生當中至少要有一次推導過這些不同定義之間的關係, 並且從中體會如何推廣到複數$\mathbb{C}$、矩陣, 甚至更抽象的算子, 如此我們便邁入複數函數論與泛函分析的奇異世界。

這五個定義各有其目的, 但根據 Felix Klein 的改革方案則以第一個定義視爲曲線 $y = \frac{1}{x}$ 的積分是最適當的出發點。從量綱分析的角度來看也是自然的。已知積分公式

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq -1 \tag{6.7}$$

當 $n = -1$ 時無法定義, 所以人們說 $\frac{1}{x}$ 的積分需要另外定義, 但是 (6.7) 略做個調整仍然可以推得對數的積分定義。由量綱分析得

$$\int \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{[x]}[x] = 1\,.$$

這個積分不具量綱, 因此這個函數必定非常特別, 我們將x^{n+1} 重新表示爲

$$x^{n+1} = e^{\ln(x^{n+1})} = e^{(n+1)\ln x} = 1 + (n+1)\ln x + \cdots\,. \tag{6.8}$$

所以 (6.7) 右式的x^{n+1}必須換爲$x^{n+1} - 1$, 因此由 L'Hospital 法則或由 (6.8) 直觀可得

$$\int \frac{1}{x} dx = \lim_{n \to -1} \frac{x^{n+1} - 1}{n+1} = \ln x\,.$$

同樣的概念可應用到二維的 Laplace 方程的基本解必然是取對數的形式, 我們可以說:

多項函數的臨界指數(*critical exponent*) 必然是對數!

7. 進入複數世界

『虛數是這樣可以像平常一樣進行算術運算, 這些令人感到神秘的最後結果猶如其名, 眞是既精緻又不中用。』

— Gerolamo Cardano (1501∼1576) —

虛數 (imaginary number) 是義大利數學家 Cardano (1501∼1576) 在他的名著《大術》(Ars Magna) 中首次引入的, 但是他卻對這個新觀念非常之猶豫。最早期的數學家解決這些奇怪的《數》所出現的困難, 例如 $\sqrt{-2}\sqrt{-2} = -2 < 0$, 基本上是駝鳥心態就是不理會它並加以非議和擯棄。直到高斯 (Carl F. Gauss, 1777∼1855) 在他的博士論文證明代數基本定理: 任何複係數一元 n 次多項式方程在複數域上至少有一根 $(n \geq 1)$。並且指出一個複數 $z = x + iy$ 就是平面上的一個點 (x, y), 所以複數平面也稱爲高斯平面。但更重要的是高斯將整個數學觀來個乾坤大挪移, 將數學的重心放在解的存在性與唯一性從此開啟數學的新紀元, 擺脫文藝復興以來多項式方程是否有根式解的糾葛。

最後我們必須提到複變函數論 (Complex Function Theory), 這對於完全理解函數特別是指數與對數函數是不可或缺的。在無懸念下函數最好的推廣是藉由 (收斂的) 無窮級數, 這基本上是 Lagrange 的思想,

定義 7.1: (**複數指數函數**)令 $z \in \mathbb{C}$, 則複指數函數定義爲

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{7.1}$$

由級數的計算可得複指數函數的基本性質

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \qquad e^0 = 1, \qquad e^{-z} = \frac{1}{e^z}\,. \tag{7.2}$$

由 (7.2) 自然可推得

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)\,; \tag{7.3}$$

因爲 $\cos y, \sin y$ 不同時爲 0, 故

$$e^z \neq 0, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

除此之外複指數函數與實數指數函數最大的差別在於

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,;$$

複指數函數 e^z 的週期是 $2\pi i$。

如果假設適當的收斂性則逐項微分得

$$\begin{aligned}(e^z)' &= \frac{1}{1!} + \frac{2z}{2!} + \frac{3z^2}{3!} + \cdots + \frac{nz^{n-1}}{n!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = e^z\,.\end{aligned}$$

同理可以定義 (複) 三角函數

$$\begin{aligned}\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\,, \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\,;\end{aligned} \tag{7.4}$$

因爲 $\cos z$ 只含有偶次方項, $\sin z$ 則只含有奇次方項, 我們容易推得 $\cos z$ 是偶函數, $\sin z$ 是奇函數

$$\cos(-z) = \cos z, \qquad \sin(-z) = -\sin z\,, \tag{7.5}$$

更進一步也可推導得複數形式的 Euler 公式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{7.6}$$

因此原來實數情形的三角函數可以完完全全地搬到複數。將 z 代換爲 $-z$ 則

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{7.7}$$

爲了使 Euler 公式從僅僅是形式上成立到嚴格的數學真理, 需要發展複變函數論, 這是19世紀最重要的數學成就。複三角函數也可以表示爲複指數

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,. \tag{7.8}$$

如果先定義複指數函數 (7.1), 則複三角函數可以不透過無窮級數 (7.3)-(7.4) 而根據 (7.8) 來定義。同理藉由 Euler 公式可以證明複數的和差化積 (或積化和差) 公式

$$\begin{aligned} e^{i(z_1+z_2)} &= \cos(z_1+z_2) + i\sin(z_1+z_2) = e^{iz_1}\cdot e^{iz_2} \\ &= (\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) \\ &= (\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i(\sin z_1\cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2)\,. \end{aligned}$$

其次由 (7.7) 可得

$$\begin{aligned} e^{-i(z_1+z_2)} &= \cos(z_1+z_2) - i\sin(z_1+z_2) = e^{-iz_1}\cdot e^{-iz_2} \\ &= (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2) \\ &= (\cos z_1\cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2) + i(\sin z_1\cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2)\,. \end{aligned}$$

這兩式相加減得

$$\begin{aligned} \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2 \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2\,. \end{aligned} \tag{7.9}$$

同理也可得

$$\begin{aligned} \cos(z_1-z_2) &= \cos z_1\cos z_2 + \sin z_1\sin z_2 \\ \sin(z_1-z_2) &= \sin z_1\cos z_2 - \cos z_1\sin z_2\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

由於複數的引進讓我們脫離原 (實數) 三角函數受幾何的限制, 而純粹只是代數的運算就可推廣得出這些複雜的公式。另外值得一提的是由 (7.8) 可得

$$\cos(iy) = \frac{1}{2}\big(e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}\big) = \frac{1}{2}\big(e^{y} + e^{-y}\big) = \cosh y\,,$$

$$\sin(iy) = \frac{1}{2i}\big(e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}\big) = \frac{i}{2}\big(e^{y} - e^{-y}\big) = i\sinh y\,;$$

一個偶函數在虛軸上必定取實數值, 反之一個奇函數在虛軸上必定是一個純虛數。

定義 7.1: (**複數指數函數**)令 $z \in \mathbb{C}$, 則複指數函數定義爲

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{7.1}$$

定義 7.2: (**複數雙曲函數**)令 $z \in \mathbb{C}$, 則複數的雙曲函數直接定義爲

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \qquad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})\,. \tag{7.11}$$

複數雙曲函數與複數三角函數有密切關係

$$\begin{aligned} -\,i\sinh(iz) &= \sin z, \qquad \cosh(iz) = \cos z\,, \\ -\,i\sin(iz) &= \sinh z, \qquad \cos(iz) = \cosh z\,. \end{aligned} \tag{7.12}$$

由三角函數的週期性可結論複數雙曲函數是週期函數

$$\sinh(z+2\pi i) = \sinh z, \qquad \cosh(z+2\pi i) = \cosh z\,,$$

而且有無限多個零根 $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$\begin{aligned} \sinh z = 0 &\iff z = n\pi i\,, \\ \cosh z = 0 &\iff z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i\,; \end{aligned} \tag{7.13}$$

這是實數雙曲函數所沒有的性質。

關於複數的對數我們可以透過指數的反函數來定義

$$w = \log z \iff z = e^w\,.$$

但是 $\log z$ 真正是甚麼? 令

$$z = re^{i\theta}, \qquad w = u + iv, \qquad r, \theta, u, v \in \mathbb{R}\,,$$

則

$$z = re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}\,.$$

比較得 (利用 2π 週期的性質)

$$e^u = r, \qquad v = \theta + 2n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

再由實數的對數得

$$u = \log r, \qquad v = \theta + 2n\pi\,.$$

因此複數的對數定義爲

$$w = \log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) = \log|z| + i(\arg\, z + 2n\pi), \qquad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{7.14}$$

(7.14) 對於任意非 0 的複數都有定義而且對數不僅可以是正數也可以是實數與複數。$\log z$ 內的整數 n 則說明 $\log z$ 是一多值函數, 如何從幾何的角度理解這個事實需要 Riemann Surface (黎曼曲面) 的知識。對數函數是複變函數中最重要的函數! 其根本原因是因爲 $\frac{1}{2\pi}\log r$ 是 Lapalce 方程的基本解。這也可以用來判斷一個人是否對複變函數論有真正瞭解 (understanding) 的標準。

從技術層面而言複變函數論是 19 世紀數學發展中最具有原創性的學科, 我們甚至可以說 19 世紀的數學基本上是《*複變函數論*》。雖然數學界對於複數早已耳熟能詳並接納爲完整數系的成員, 但是物理學界卻是躊躇不前的。但這現象在 1900 年有著革命性的改變, 才華洋溢卻又保守謹慎的德國物理學家普郎克 (Max Planck, 1858～1947) 提出量子理論, 引進以他爲名的普郎克常數 (Planck constant)

$$h \approx 6.6260693(11) \times 10^{-34}\text{焦耳}\cdot\text{秒}\,, \tag{7.15}$$

之後海森堡 (Heisenberg, 1901～1976) 直接就將 $i = \sqrt{-1}$ 寫進他著名的不確定性原理

$$[p, x] = px - xp = -i\hbar\,, \tag{7.16}$$

其中 p 是動量 x 是位置、$\hbar$是普郎克常數除以 2π

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.055 \times 10^{-34}\text{焦耳}\cdot\text{秒}\,, \tag{7.17}$$

從此物理學的理論第一次進入新的維度—複數平面。1926 年 Erwin Schrödinger (1887～1961) 將德布羅意 (Louis de Broglie, 1892～1987) 電子波動性的思想向前推進並將之寫成

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi\,; \tag{7.18}$$

這個 Schrödinger 方程由此一直成爲量子力學的代表, ψ 是一個位置 x 與時間 t 的函數稱爲波函數 (wave function)。它是一個複數, 無法被直接觀察但可以根據 Schrödinger 方程進行計算。而虛數i則蛻身一變成爲物理的真實存在。後來英國理論物理學家 Paul Dirac 爲了研究的量子力學, 在那兒他有系統地用 δ 函數作爲工具並獲得相當大的成果, 我們正式給定 δ 函數的定義 (這是 Dirac 的貢獻)。

定義 7.3: *Dirac δ 函數定義爲*

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1\,. \tag{7.19}$$

Dirac δ 函數並不是傳統意義下的函數, 但我們並不能因此說它不存在。數學不能否定已知的事實, 因此解決之道就是回到數學的基礎——函數是什麼? 對函數有更新、更高層次的

認識是當務之急; 爲著與傳統的函數有所區別我們將這種新的函數稱爲廣義函數 (generalized function)。廣義函數是古典函數的推廣, 它的數學理論基礎是後來由蘇聯數學家 S. L. Sobolev (1936) 與法國數學家 L. Schwartz (1950～1951) 所建立, 其中 L. Schwartz 還因這項工作獲得第二屆 Fields獎 (1950)。爾後經過多人的努力, 目前廣義函數已成爲研究數學、物理甚至工程的必備工具, 沒有廣義函數則現代的偏微分方程與理論物理幾乎是寸步難行。

誌謝:

有一次與好朋友台大數學系陳宜良教授談到大學教育時, 他有感而發的說:

『大部分的人不知道瞭解、認識(understanding) 是甚麼 ?』

的確是如此, 一個科目拿高分並不代表一個人真的瞭解該科目。男女朋友就算記得彼此的生日、血型... 都不等於瞭解對方。因爲這只是一種『客觀事實』的知道、認識而已。現代教育最可悲的是失落了情感, 人們被教育的越來越無情。其實在舊約聖經裏,「認識」的意思是指有親密的知識, 正如亞當「認識」夏娃, 因而懷了他們的兒子 (創四 1; 和合本譯爲 : 亞當和夏娃「同房」)。真正瞭解、認識 (understanding) 不是人云亦云, 而是有信仰的成分是有行動力的。文藝復興時期瑞士醫生、哲學家派拉西所斯 (Paracelsus, 1493～1541) 這首著名的詩就說明了這個事實。[5]

『一無所知的人, 就一無所愛。一事不做的人, 就一事不懂。一事不懂的人, 就一無所值。那能夠懂得的人, 就能夠愛, 能夠關懷, 能夠了解。對於一件事情越有所知, 愛越大。認爲一切果實都像草莓一樣同時成熟的人, 對於葡萄一無所知。』

— (Paracelsus, 1493～1541) —

參考文獻

1. Carl B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover Publications; 1st Edition edition, 1959. 中譯本: 微積分概念發展史, 唐生譯, 復旦大學出版社 (中國) (2011)。
2. R. Courant and H. Robbin, *What is Mathematics ? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 2nd edition, with additional material by Ian Stewart, Oxford University Press, London, 1996。中譯本: 數學是什麼 (上, 下) 容士毅譯, 左岸文化出版 (2011)。

   大二時就有老師推薦這本書, 雖然買了 (一直收藏在書架上) 也看了一些章節, 但始終沒有感覺。其實最好的讀書方法是找幾個志同道合的朋友組織讀書會一起看這些稍微硬一點的書。這本書我最喜歡的是尺規作圖與極大極小値這兩章並以此爲藍圖做過幾次的通俗演講。我個人的見解是只要看到 R. 庫朗 (R. Courant; 1888～1972) 的書都應該收藏, 因爲可以看到哥廷根偉大數學傳統的背影。本書寫作的背景正值新數學在美國興盛

[5] 這首詩我是在《愛的藝術》佛洛姆著 (新潮文庫, 志文出版社) 第一次看到。大學讀了這本書之後就迷上佛洛姆。他另外兩本書《逃避自由》與《自我的追尋》我也強力推薦。

之時, 數學越來越形式主義, 數學教學竟演變爲空洞的解題訓練, 爲了抵抗這股逆流並有感於教師少得可憐的熱情, 還有大量枯燥乏味、商業氣息十足的教科書和無視智力的教學風氣, 作者特別寫了這本只需中學程度即可看懂的書來告訴人們《數學是什麼?》雖然這本書可以看爲通俗數學的書, 但我個人到現在仍不時拿起閱讀並做爲教學與寫作的參考。

3. William Dunham, *The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Priceton, New Jersey, 2005. 中譯本: 微積分的歷程: 從牛頓到勒貝格, 李伯民, 汪軍, 張懷勇譯, 人民郵電出版社 (中國), 2010。

   這本書基本上按年代介紹了數學史上出現的重要函數。這些函數在數學發展的每個關鍵時刻扮演著不可取代的角色, 也幫助讀者對於數學分析有更深刻的體會。對於這個作者的認識是由他早期的著作而來, Willaim Dunham, Journey Through Genius, the great theorems of mathematics, John Wiley & Sons, Inc., (1990), Penguin Books, 1991. (中譯本: 天才之旅, 偉大數學定理之創立; 林傑斌譯; 牛頓出版股份有限公司, 1995。) 這是一本我愛不釋手的一本好書。大部分的數學史只有故事沒有數學, 我覺得是非常不足的而且有掩耳盜鈴之嫌。許多號稱數學史家實際上對於數學的認知是有問題的。我心中理想的數學史家至少是 Willaim Dunham 這樣的作家: 數學裡面有故事, 而講故事時是有數學內涵。

4. Lars Garding, *Encounter with Mathematics*, Springer-Verlag, New York, Inc, 1977. 中譯本: 數學概觀, 胡作玄譯, 數學名著譯叢, 科學出版社 (中國), 2001。

   第一次知道這本書是2009年暑假在中研院數學所與李志豪教授一起負責數學營的微分方程, 李老師選擇其中一部分作爲學生的研讀資料。後來在書店看到中譯本毫不考慮就買了兩本, 從此這本書就成爲我教學與寫作的重要參考書籍。Lars Garding 還有一本很好的書在此向讀者強烈推薦 "*Some Points of Analysis and Their History*", AMS University Lecture Series Vol. 11, 1997.

5. E. Hairer and G. Wanner, Analysis by Its History, UTM *Reading in Mathematics*, Springer-Verlag, 1995.

   早期的數學書籍傾向於形式化, 它們花在形式化證明上的篇幅過多, 以至於對於啟發與思考是沒有幫助的。Springer-Verlag 這一套《*Reading in Mathematics*》給大學部學生數學教科書非常優雅簡練, 如果妳/你不喜歡定義、定理、證明這種無血、無淚、沒有感情之三段式論證的書, 那麼我肯定妳/你會喜歡這一套叢書。第一次看到就被書名所吸引, 經過詳細閱讀越來越喜歡, 之後這本書就一直是我教學與寫作最重要的參考書。

6. 愛德華著。微積分的發展歷史。凡異出版社, 2001。
7. I. M. Gelfand and M. Saul, *Trigonometry*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1999。
8. F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Dover, 2004。中譯本: 克萊因著, 高觀點下的初等數學, Vol. 1,2,3, 復旦大學出版社 (中國), 1989。
9. Eli Maor, *e: The story of a number*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994。中譯本: 毛起來說 e, 胡守仁譯, 天下文化出版, 2000。
10. Eli Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998。中譯本: 毛起來說三角, 鄭惟厚譯, 天下文化出版, 2000。
11. Eli Maor, *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998。中譯本: 毛起來說無限, 曹亮吉譯, 天下文化出版, 2014。

   Eli Maor 的書是我每個學期教學要學生讀書報告的參考書目, 他所有的書都值得詳細閱讀。我的目的很簡單就是鼓勵學生在大學期間培養良好的閱讀習慣並喜歡上閱讀。我

們都是這個教育體制 (更精確而言是這個膚淺文化) 下的受害者, 連讀書也是功利的考量。閱讀不會讓我們發大財, 但一個不讀書的民族絕對是沒有未來的。

12. Barry Mazur, *Imaginary Number*, Farrar Strauss Giroux, New York, 2003.
13. Paul J. Nahin, *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998.
14. I.M. Yaglom, Felix Klein and Sophus Lie, *Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century*, Birkhäuser, Boston and Basel, 1988. 中譯本: 對稱的觀念在 19 世紀的演變 : Klein 和 Lie, 趙振江譯, 高等教育出出版社 (中國), 2016。
15. 林琦焜。數, 十進位與 Cantor 集。數學傳播季刊, 24(4), 76–86, 2000。
16. 林琦焜。棣美弗定理與 Euler 公式。數學傳播季刊, 27(4), 3–23, 2003。
17. 蔡聰明。星空燦爛的數學 (I)(II) 托勒密如何編製弦表。數學傳播季刊, 23(2), 57–67, 1999, 24(1), 43–55, 2000。

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—

2020 Taipei-Hsinchu Conference on Geometric Invariance and Partial Differential Equations

Mini-Course - 2019 年 12 月 29 ～ 30 日 (星期日 ～ 星期一)、
2020 年 1 月 2 日 (星期四) — 新竹清華大學

Conference - 2020 年 1 月 4 ～ 5 日 (星期六 ～ 星期日) — 中央研究院

Conference - 2020 年 1 月 7 ～ 9 日 (星期二 ～ 星期四) — 新竹清華大學

詳 見：

https://www.math.sinica.edu.tw/www/file_upload/conference/202001GEO/202001.html