數學傳播 43卷4期, pp. 30-53

# 微局部分析簡介第一講：分佈論

沈威銓・蕭欽玉

## 1. 導論

微局部分析 (Microlocal analysis) 是偏微分方程理論中的重要領域。最早的起源是爲了研究線性偏微分方程式; 特別是某一類非橢圓 (non-elliptic) 及連次橢圓都缺乏 (non-hypoelliptic) 的線性偏微分方程式而發展起來的一門學問。許多大數學家如約瑟夫・孔恩 (Joseph Kohn), 路易・尼倫博格 (Louis Nirenberg), 拉爾斯・霍曼德 (Lars Hörmander), 佐藤幹夫 (Mikio Sato), 柏原正樹 (Masaki Kashiwara), 路易斯・布得德莫維 (Louis Boutet de Monvel), 約翰拿斯・史約史特蘭 (Johannes Sjöstrand) 等人都在這個領域有重要的貢獻。微局部分析的理論主要由擬微分算子 (pseudodifferential operators) 及傅立葉積分算子 (Fourier integral operators) 所構成。微局部分析的方法往往是先在餘切叢 (cotangent bundle) 上每一點的錐鄰域 (conic neighborhood) 中作分析, 再進行整體研究。這種方法比傳統偏微分方程研究常用的局部化技術更有力也更有幾何意義。例如, 在研究偏微分方程解的奇性傳播 (propagation of singularities) 與偏微分方程的局部可解性 (local solvability) 時, 微局部分析是最有效的方法。此外微局部分析方法在這幾年被應用到許多的重要數學領域而產生許多豐碩的成果。比如指標理論 (Index Theory), 複幾何 (Complex Geometry), 科西黎曼幾何 (Cauchy–Riemann Geometry), 幾何量子化 (Geometric Quantization Theory) 等領域。這幾年的許多重要進展都需要用到最上乘且細膩的微局部分析且只有用微局部分析的方法才能抓到這些相關幾何問題的本質。利用微局部分析來研究上述的領域已經成爲一個新潮流, 且可預期是未來幾何分析的重要方向。有鑑於此, 筆者決定寫一系列的文章來介紹微局部分析。

學習微局部分析需要較多的預備知識, 如傅立葉分析 (Fourier Analysis), 調和分析 (Harmonic Analysis) 及辛幾何 (Symplectic Geometry) 都是學習微局部分析需要具備的知識, 也因此對初學者而言較難入門。基於這些因素, 筆者決定在這一系列的文章中, 我們會介紹所有用到的工具, 如上述提到的傅立葉分析, 調和分析及辛幾何。我們只假設讀者具備高等微積分及基本的複變等知識。在某些部分, 需要有基本的實分析及泛函分析的知識, 讀者若無這方面的背景, 可參考相關書籍, 應不會影響後續的閱讀。

## 2. 分佈論簡介

在微局部分析裡, 分佈論 (Distribution Theory) 是最基本的知識; 分佈論也是學習傅立葉分析及調和分析的基本的知識。因此, 在第一講中, 我們會仔細介紹分佈論的基本性質, 並會介紹且證明著名的施瓦茲分佈核定理 (Schwartz kernel theorem)。我們先簡介一下爲何需要分佈論這一門學問。分佈論的起源來自偏微分方程理論的發展。給定歐式空間 $\mathbb{R}^n$ 的一組線性偏微分方程式 $A=\sum_{|\alpha|\leq N}a_\alpha(x)(-i\partial_x)^\alpha$, 偏微分方程裡的重要課題是要能夠知道 $A$ 的可解性及正則性 (regularity)。正則性最簡單的說就是假設我們有一組解 $Au=v$, 當 $v$ 是平滑 (smooth) 時, 我們會想知道 $u$ 是否也是或必定是平滑。一般而言, 我們會先在 $L^2$ 空間內解 $Au=v$, 因爲 $L^2$ 空間爲希爾伯特空間 (Hilbert space), 這時我們就可用泛函分析的理論或希爾伯特空間的理論來研究解的存在性。一旦解的存在性解決後, 我們就可用一些偏微分方程及傅立葉分析的估計, 不等式等技巧, 來研究解的正則性。這邊立刻遇到一個問題, 當 $u$ 只在 $L^2$ 空間時, $\partial_x^\alpha u$ 是什麼意思? 傳統的方式是引入索伯瑞夫空間 (Sobolev space), 弱導數 (weak derivative) 等概念來克服這些困難。但最有效的方式是考慮 $u$ 是一個分佈 (distribution), 一個分佈不管微分幾次都是一個分佈, 因此我們可在分佈的層次解 $Au=v$, 接著再去研究解的正則性等課題。

分佈的概念是由法國數學家羅亨・施瓦茲 (Laurent Schwartz) 在 50 年代提出 [3]。在施瓦茲提出分佈的概念之後的很長一段時間, 分佈論其實飽受批評。原因大多是許多人包含許多著名的數學家都覺得分佈雖然提供了最廣泛設定的框架, 但傳統的弱導數等概念就已足夠處理眼前問題, 根本不需分佈論。著名數學家馬塞爾・里斯(Marcel Riesz) 甚至當著施瓦茲面前批評他的分佈論, 里斯甚至說出希望施瓦茲這輩子能發現出一些有些用處的東西等重話[2]。但數學的進展卻超出預期, 在 75 年代左右, 在許多數學家如拉爾斯・霍曼德(Lars Hörmander), 查爾斯・費弗曼 (Charles Fefferman), 路易斯・布得德莫維 (Louis Boutet de Monvel), 約翰拿斯・史約史特蘭 (Johannes Sjöstrand) 的努力之下, 慢慢發現在許多重要流形 (manifolds) 上的線性偏微分方程式存在不在任何 $L^p$ 空間的零解 ($Au=0$, $u$ 稱作 $A$ 的零解), 這些解只能是一些分佈。這意味著這些線性偏微分方程的垂直投影到零解空間的算子的施瓦茲分佈核 (Schwartz distribution kernel) 會有奇異點 (singularities), 而這些奇異點會決定這些流形的重要幾何性質。因此如何研究這些奇異點就成爲一個重要的課題。研究這些奇異點所發展出來的許多細膩且深入的分析理論就構成了現今的微局部分析, 因此分佈論成爲這些學問最重要的基本知識。

在這一講中, 我們會介紹基本的分佈論, 主要的參考文獻爲施瓦茲 [3] 及霍曼德 [1] 的兩本經典著作。從現今的角度來看, 這兩本名著雖然只在處理基本的分佈論或分析題材, 但卻可以看出這兩位當代分析學大師的深厚功力及深入細緻的數學觀點。讀完本文的讀者, 不妨參考這兩本經典著作。

# 3. 測試函數

## 3.1. 記號與定義

設 $X$ 爲 $n$-維歐式空間 $\mathbb{R}^n$中的一個開集, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, 其中 $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, 記 $X$ 上的 $k$ 次連續可微函數(函數值可爲實數或複數) 全體爲 $C^k(X)$。類似地, 記 $X$ 上的光滑(無窮可微) 函數全體爲 $C^\infty(X) := \cap_k C^k(X)$。

**定義** 3.1: 對於一連續函數 $u \in C^0(X)$, 我們定義 $u$ 的支撐集 (support)爲

$$\operatorname{supp}(u) := \overline{\{x \in X : u(x) \neq 0\}}.$$

上述符號 $\overline{\{\bullet\}}$ 爲閉包之意, 而經過簡單的集合論證, 我們可以檢驗 $\operatorname{supp}(u)$ 實爲 $X$ 上的最小的閉子集使得限制函數 $u|_{X \setminus \operatorname{supp}(u)} = 0$。

**定義** 3.2: 分別記 $X$ 上擁有緊緻支撐 (compact support) 的 $k$ 次連續可微函數全體和有緊緻支撐的光滑函數爲 $C_0^k(X)$和$C_0^\infty(X)$。

在後續的行文中我們稱 $C_0^\infty(X)$ 中的元素爲 測試函數 (Test functions)。下面的命題保證總是存在測試函數:

**命題** 3.1: 存在一非負函數 $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\phi(0) > 0$。

**證明**: 考慮函數 $f(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & : t > 0 \\ 0 & : t \leq 0 \end{cases}$。可檢驗 $f(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$。令 $\phi(x) := f(1 - |x|^2)$, 則 $\phi(0) = f(1) > 0$, 並且 $\phi \in C_0^\infty(B_1(0))$, 其中 $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$。 $\square$

注意到透過對上述的函數 $\phi$ 平移與伸縮, 我們可以得到非負函數 $x \mapsto \phi\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right)$, 他在給定的點 $x_0$ 上是正的, 而且其支撐集落在 $B_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$ 內。

## 3.2. 捲積

在被廣泛使用的光滑化 (regularization)手法中, 捲積 (convolution)是最基本的一種方法。在此我們快速回顧關於捲積的基本性質而不加以證明。對於函數 $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 若至少其中一函數有緊緻支撐, 我們定義 $u$ 和 $v$ 的捲積爲

$$u * v(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y) v(x - y) dy \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

透過直接計算, 可驗證 $u * v(x) = v * u(x)$。事實上, 捲積可視爲函數空間上的乘法結構:

**命題** 3.2: 若 $u, v, w \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且這個集合 $\{u, v, w\}$ 中至少有兩個函數有緊緻支撐, 則 $(u * v) * w = u * (v * w)$。

對於 $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, 我們稱 $\alpha$ 爲一個多重指標並令 $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$。對於函數 $f \in C^k(X)$, 多重指標記號 $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, 我們用 $\partial_x^\alpha f$ 來表示偏微分 $\partial_x^\alpha f := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$。我們有下列關於捲積與微分關係:

**命題** 3.3: 若 $u \in C_0^k(\mathbb{R}^n), v \in C^l(\mathbb{R}^n)$, 則 $u * v \in C^{k+l}(\mathbb{R}^n)$, 並且對於任意 $|\alpha| \leq k$ 和 $|\beta| \leq l$,

$$\partial^{\alpha+\beta}(u * v) = \partial^\alpha u * \partial^\beta v.$$

記局部可積函數全體爲

$$\begin{aligned} L^1_{\text{loc}}(X) := \{ & f\text{爲}X\text{裡的可測度函數 (measurable function)} \\ & : \int |\phi f| dx < \infty \text{對於所有的} \phi \in C_0^\infty(X)\}. \end{aligned}$$

我們有下列關於捲積的光滑化性質:

**命題** 3.4: 若 $u \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ 而 $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 則 $u * v \in C^k(\mathbb{R}^n)$。

在這小節的結尾, 我們給出一個關於捲積和測試函數的簡單應用。考慮非負函數 $\chi \in C_0^\infty(B_1(0))$ 滿足 $\int \chi dx = 1$; 對於任意 $1 > \epsilon > 0$, 令 $\chi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, 則我們仍有 $\int \chi_\epsilon dx = 1$。

**定理** 3.1: 對於緊緻集 $K \subset X$, 其中 $X$ 爲 $\mathbb{R}^n$ 中的開集, 我們可以找到一函數 $\phi \in C_0^\infty(X)$ 滿足

$$0 \leq \phi \leq 1, \ \text{並且在 } K\text{的某個鄰域上}\phi\text{均爲}1\text{。}$$

**證明**: 由於 $K$ 是緊緻的, 我們可取到一個極小的常數 $\epsilon > 0$ 使得對所有的 $x \in K$ 和 $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$, 我們都有 $|x - y| > 4\epsilon$。對任意 $\delta > 0$, 定義集合

$$K_\delta := \{y \in \mathbb{R}^n : \text{存在}x \in K\text{使得}|x - y| < \delta\}.$$

注意到此集合必包含 $K$。令 $v(x) := 1_{K_{2\epsilon}}(x) := \begin{cases} 1 : x \in K_{2\epsilon} \\ 0 : x \notin K_{2\epsilon} \end{cases}$, 則對於函數

$$\phi(x) := (v * \chi_\epsilon)(x) = \int v(x - y)\chi_\epsilon(y) dy = \int \chi_\epsilon(x - y) v(y) dy = \int_{K_{2\epsilon}} \chi_\epsilon(x - y) dy,$$

由 $\epsilon$ 的選取和 $\operatorname{supp}(\chi_\epsilon) \subset B_\epsilon(0)$, 我們不難推論出 $\phi \in C_0^\infty(K_{3\epsilon}) \subset C_0^\infty(X)$。另一方面, 由

$$1 - \phi(x) = \int \chi_\epsilon(y) dy - \int v(x - y)\chi_\epsilon(y) dy = \int (1 - v(x - y))\chi_\epsilon(y) dy,$$

我們可以發現對 $x \in K_\epsilon$, 當 $|y| \geq \epsilon$ 時, 則 $\chi_\epsilon(y) = 0$; 而當 $|y| < \epsilon$ 時, 因爲 $|x-y| \in K_{2\epsilon}$, $1 - v(x-y) = 0$。也就是說, 對所有的 $x \in K_\epsilon$, $\phi(x) = 1$。 □

我們通常稱上述構造的函數爲截斷函數 (cut-off functions)。

### 3.3. 單位分解引理

在大域分析當中, 常會遇到如何將局部獲得的結論「黏」起來得到全域結果的問題。我們在這介紹其中一個常用的手法, 又稱單位分解引理 (partition of unity):

**定理** 3.2: 令 $X_1, \ldots, X_k$ 爲 $\mathbb{R}^n$ 中的開集, $\phi \in C_0^\infty(\cup_{j=1}^k X_k)$。則我們可以找到 $\phi_j \in C_0^\infty(X_j)$, $j = 1, \ldots, k$, 使得 $\phi = \sum_{j=1}^k \phi_j$。若 $\phi \geq 0$, 我們則也可經過挑選使得 $\phi_j \geq 0$, 對所有的 $j = 1, \ldots, k$。

**證明**: 按照假設, 不難發現對於所有的 $i = 1, \ldots, k$, 我們可以找到緊緻集 $K_i \subset X_i$ 並且 $\mathrm{supp}(\phi) \subset \cup_{i=1}^k K_i$。對於 $i = 1, \ldots, k$, 考慮截斷函數

$$\psi_i \in C_0^\infty(X_i) \text{ 滿足 } 0 \leq \psi_i \leq 1 \text{ 並且在 } K_i \text{ 上 } \psi_i = 1.$$

則 $\phi_1 := \phi\psi_1 \in C_0^\infty(X_1)$, $\phi_2 := \phi\psi_2(1-\psi_1) \in C_0^\infty(X_2), \ldots, \phi_k := \phi\psi_k(1-\psi_{k-1})\cdots(1-\psi_1) \in C_0^\infty(X_k)$ 滿足

$$\sum_{j=1}^k \phi_j - \phi = -\phi(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_k) = 0$$

即爲所求。 □

## 4. 基礎分佈論

### 4.1. 基本定義

這小節我們介紹分佈 (distribution)定義以及其衍伸的基本性質。我們採取其中一種可供讀者直接操作的定義方式。給定一個開集 $X \subset \mathbb{R}^n$, 我們說這個函數 $u : C_0^\infty(X) \mapsto \mathbb{C}$ 是 $X$ 裡的測試函數的線性泛函 (linear functional)若

$$u : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}$$

爲一個有界線性映射。

**定義** 4.1: 給定一個開集 $X \subset \mathbb{R}^n$, 我們說這個線性泛函 $u : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}$ 是 $X$ 裡的分佈若

對於所有的緊緻集 $K \subset X$ 和任意的 $\phi \in C_0^\infty(K)$, 存在常數 $C$ 以及 $k$ 使得

$$|u(\phi)| < C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha \phi|.$$

我們把 $X$ 裡的所有分佈的集合記爲 $D'(X)$。

**範例**: 這邊枚舉兩個常見的分佈實例:

1. 對於局部可積函數$f \in L^1_{\text{loc}}(X)$, 我們可透過

$$T_f : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}, \, \phi \mapsto \int f\phi dx$$

將 $f$ 視爲一個分佈。

2. 狄拉克算子 (Dirac-delta operator) $\delta_p$, $p \in X$, 可被視爲一個分佈

$$\delta_p : C_0^\infty(X) \to \mathbb{C}, \, \phi \mapsto \phi(p).$$

接下來我們列舉兩個關於分佈論常用的的敘述, 他們的定義或證明用到了泛函分析中拓樸向量空間 (topological vector spaces)的結果, 有興趣的讀者可以翻閱泛函分析書籍諸如[5], [4]的相關章節。此處的兩個敘述我們不給予證明。

給定 $X$ 上的測試函數序列 $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$, 對於 $\phi \in C_0^\infty(X)$, 若存在緊緻集 $K \subset X$ 和 $N \in \mathbb{N}_0$, 使得對於所有的 $j \geq N$, $\text{supp}(\phi_j) \subset K$ 並且對於任意多重指標 $\alpha$, $\sup_K |\partial_x^\alpha(\phi_j - \phi)| \to 0$ 成立, 則我們說 $\phi_j \to \phi$ 在 $C_0^\infty(X)$ 意義下收斂。下面是對於分佈連續性的刻劃:

**命題**4.1(**分佈是個連續的線性泛函**): 給定 $C_0^\infty(X)$ 上的的線性泛函 $u$, 下列敘述是等價的:

1. $u \in D'(X)$。
2. 對所有的 $X$ 上的測試函數序列 $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$, $u$ 滿足 $u(\phi_j) \to 0$, 當 $\phi_j \to 0$ 在 $C_0^\infty(X)$ 意義下收斂。

基於泛函分析中的一致有界性原理 (uniform boundedness principle), 我們有下列關於分佈完備性的事實:

**定理**4.1(**分佈的完備性**): 給定序列 $u_j \in D'(X)$, $j \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, 若對於所有的測試函數 $\phi \in C_0^\infty(X)$, 極限 $\lim_{j\to\infty} u_j(\phi)$ 都存在, 則這個線性泛函

$$\begin{aligned} u : C_0^\infty(X) &\mapsto \mathbb{C}, \\ \phi &\mapsto \lim_{j\to\infty} u_j(\phi), \end{aligned}$$

爲一個分佈, 也就是 $u \in D'(X)$。

## 4.2. 基本操作

這小節我們討論一些關於分佈最基本的操作。

**定義** 4.2: 給定兩個開集 $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$ 及 $u \in D'(X)$, 定義 $u$ 限制在 $Y$ 爲如下的分佈:

$$u|_Y = u_Y : C_0^\infty(Y) \mapsto \mathbb{C},$$
$$\phi \mapsto u(\phi).$$

**定義** 4.3: 給定開集 $X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in D'(X)$ 及 $f \in C^\infty(X)$, 定義光滑函數 $f$ 與分佈 $u$ 的乘積爲如下的分佈:

$$fu : C_0^\infty(X) \mapsto \mathbb{C},$$
$$\phi \mapsto u(f\phi).$$

**定義** 4.4: 給定開集 $X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in D'(X)$。對於所有的 $k = 1, \ldots, n$, 分佈對 $x_k$ 的微分爲如下的分佈:

$$\partial_{x_k} u : C_0^\infty(X) \mapsto \mathbb{C},$$
$$\phi \mapsto -u(\partial_{x_k}\phi).$$

容易驗證, 上述的三個定義均爲恰當定義的。

**範例**: 我們在這枚舉兩個關於分佈微分的基本例子:

1. 對於$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, $T_f \in D'(X)$, 則當$\phi \in C_0^\infty(X)$,

$$(\partial_{x_k} T_f)(\phi) := -T_f(\partial_{x_k}\phi) := -\int f \partial_{x_k}\phi dx.$$

特別地, 若 $f \in C^1(X)$, 這就是一般的分部積分公式。在一般的偏微分方或泛函分析理論中, 人們也稱呼這類透過測試函數對偶性定義出來的微分爲 *弱微分* (weak derivative)。

2. 考慮黑維塞函數 (Heaviside function)

$$H(x) := \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x \leq 0 \end{cases}.$$

由於 $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, 我們有 $H \in D'(\mathbb{R}^n)$。對所有的 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 我們有

$$H'(\phi) := -H(\phi') := -\int_0^\infty \phi'(x)dx = \phi(0) =: \delta_0(\phi).$$

因此$H' = \delta_0$。這個結論是符合直覺的, 原因是想像上 $\delta_0$ 是個在原點無窮大而其他處都是零的「函數」, 而函數 $H$ 剛好在原點處有個跳躍不連續點。而從這個簡單的例子我們可以看出分佈論提供了一個嚴謹的語言來描述這些奇異點的表現。

3. 假設我們在分佈空間中有個「自然」的乘法結構, 則我們將一個函數看成一個分佈時, 這個推廣的乘法結構應要和在函數時一致。此處我們利用上述例子中的黑維賽函數來說明這是不可能的, 也就是任意給定的兩個分佈, 定義他們的乘法一般來說是不會是恰當定義的。顯然地, 在函數的意義下$H^n(x) = H(x)$, 若這乘法也在分佈意義下成立, 則對兩邊取分佈的微分, 我們有 $nH^{n-1}\delta_0 = \delta_0$, 這明顯是矛盾的, 因爲等式只有單邊是 $n$-線性的。因此, 在本篇文章的後續內容中, 我們會介紹其他的乘法結構, 例如捲積和張量積。而歷史上爲了解決這類問題的困擾, 在霍曼德 (Lars Hörmander)引入了 *微局部分析* (microlocal analysis)中波前集 (wave front sets)的概念後, 數學家才得以找到條件使得分佈間的乘法是恰當定義的。

下列是個稍微複雜點的範例, 我們藉此來說明透過對偶性引進分佈這麼大的空間的一些好處:

**範例** (**高斯–格林公式** (Gauss – Green formula)): 給定歐式空間中的超曲面 (hypersurface) $Y \subset \mathbb{R}^n$, $Y := \{x \in \mathbb{R}^n : r(x) < 0\}$, 其中 $r$ 是個一次連續可微的實數值函數, 並且在邊界 $\partial Y := \{x \in \mathbb{R}^n : r(x) = 0\}$ 上 $dr \neq 0$。考慮特徵函數

$$1_Y(x) := \begin{cases} 1 : x \in Y \\ 0 : x \notin Y \end{cases}.$$

注意到藉由測試函數 $\phi$, 我們可定義

$$1_Y(\phi) := \int 1_Y(x)\phi(x)dx := \int_Y \phi(x)dx$$

使得 $1_Y(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$。這個範例中我們將透過計算分佈意義下的微分 $\partial_{x_k} 1_Y$ 來證明高斯–格林公式 (Gauss–Green formula)。固定一點 $x_0 \in \partial Y$, 不失一般性可假設 $\frac{\partial r}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$。令 $x' := (x_2, \ldots, x_n)$。藉由隱函數定理, 存在 $x_0$ 的某個鄰域 $D$, 我們可以找到函數 $\psi \in C^1(D)$, $\psi$ 和 $x_1$ 無關, 使得

$$\partial Y \cap D = \{x \in D : x_1 = \psi(x')\}.$$

注意到若 $\frac{\partial r}{\partial x_1}(x_0) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$, 則由均值定理, $Y \cap D$ 由集合 $\begin{cases} x_1 < \psi(x') \\ x_1 > \psi(x') \end{cases}$ 決定。不失一般性, 我們假設 $\frac{\partial r}{\partial x_1}(x_0) < 0$, 則

$$Y \cap D = \{x : x \in D : x_1 > \psi(x')\}.$$

考慮函數 $g(t) \in C_0^\infty([0,1])$, $\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 1$, 則對於函數 $h(x) := \int_{-\infty}^x g(t)dt \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$h(x) = \begin{cases} 1 : x \in (1, \infty) \\ 0 : x \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

現在我們考慮在 $D$ 上的計算： 對於 $\phi\in C_0^\infty(D)$, 由勒貝格控制收斂定 (Lebesgue dominated convergent theorem),

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} h\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\epsilon}\right)\phi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{x_1>\psi(x')\}}\phi(x)dx=\int_{Y\cap D}\phi(x)dx=:1_Y(\phi).$$

更進一步地, 透過分佈的微分、分部積分公式、函數 $h$ 的定義與微積分基本定理、和勒貝格控制收斂定理, 我們有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k}1_Y(\phi) &:= -1_Y\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)\\
&= -\int_Y \frac{\partial\phi}{\partial x_k}dx\\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} h\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\epsilon}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}dx\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} h'\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\epsilon}\right)\frac{v_j(x')}{\epsilon}\phi(x)dx\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} h'(y_1)v_j(x')\phi\left(\epsilon y_1+\psi(x'),x'\right)dy_1dx'\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} h'(y_1)v_j(x')\phi\left(\psi(x'),x'\right)dy_1dx'\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v_j(x')\phi(\psi(x'),x')dx'.
\end{aligned}$$

此處我們使用了符號 $(v_1,\ldots,v_n):=\left(1,-\frac{\partial\psi(x')}{\partial x_2}\cdots,-\frac{\partial\psi(x')}{\partial x_n}\right)$。考慮 $\partial Y$ 上的面積單元 $dS$, 局部在 $D$ 上可寫為

$$dS=\sqrt{1+|\nabla\psi|^2}dx'.$$

又, $\partial Y$ 上的單位指向內部法向量局部在 $D$ 上為 $N:=(N_1,\ldots,N_n)=\frac{V}{\sqrt{1+|\nabla\psi|^2}}$, 也就是說上述的計算告訴我們在 $D$ 上, 對所有的 $\phi\in C_0^\infty(D)$,

$$\partial_{x_k}1_Y(\phi)=\int_{\partial Y}N_k\phi dS.$$

最後, 透過單位分解引理, 我們可以在整個 $Y$ 上得到分佈意義下, 對所有 $k=1,\ldots,n$,

$$\partial_{x_k}1_Y=N_jdS.$$

現在我們可以證明高斯–格林公式： 令向量場 $F=(f_1,\ldots,f_n)$, 其中 $f_k$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的測試函數, $k=1,\ldots,n$。對於為歐式空間中的超曲面 $Y$, 令 $N$ 為 $\partial Y$ 上指向內的單位法向量, 則我們有

$$\int_Y(\mathrm{div}F)dx:=\sum_{k=1}^n\int_Y\frac{\partial f_k}{\partial x_j}dx=-\sum_{k=1}^n(\partial_{x_k}1_Y)(f_k)=-\sum_{k=1}^n\int_{\partial Y}N_kf_kdS=-\int_{\partial Y}F\cdot NdS.$$

**範例** (**拉普拉斯算子的基本解** (fundamental solution)): 令拉普拉斯算子 $\Delta_n := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $C_n$ 爲歐式空間 $\mathbb{R}^n$ 中單位球面的表面積,

$$E_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log|x| & : n = 2, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \dfrac{-|x|^{2-n}}{(n-2)C_n} & : n > 2, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{cases},$$

這邊 $C_n$ 爲歐式空間 $\mathbb{R}^n$ 中單位球面的表面積。我們在此利用高斯–格林公式與分佈意義下的微分來證明 $E_n$ 爲拉普拉斯算子的基本解, 也就是說在分佈意義下 $\Delta_n E_n = \delta_0$。對於 $x \neq 0$, 透過直接計算, 我們有

$$\Delta_n E_n = 0,\ \frac{\partial}{\partial x_j} E_n = x_j \frac{|x|^{-n}}{C_n}.$$

故 $E_n$, $\frac{\partial}{\partial x_j} E_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$。現在考慮 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 則

$$\begin{aligned}
(\Delta_n E_n)(\phi) &= E_n(\Delta_n \phi) \\
&= \int E_n \Delta_n(\phi) dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int 1_{\{|x|>\epsilon\}} E_n \Delta_n \phi dx \text{ (此處用到了勒貝格控制收斂定理)} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\{|x|>\epsilon\}} E_n \Delta_n \phi dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\{|x|>\epsilon\}} \left(E_n \Delta_n \phi - \phi \Delta_n E_n\right) dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\{|x|>\epsilon\}} \operatorname{div}(E_n \operatorname{grad}\phi - \phi \operatorname{grad} E_n) dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\{|x|=\epsilon\}} (\phi \operatorname{grad} E_n - E_n \operatorname{grad}\phi) \cdot N dS \text{ (此處套用了高斯–格林公式)} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\{|x|=\epsilon\}} \phi \operatorname{grad} E_n \cdot N dS + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\{|x|=\epsilon\}} -E_n \operatorname{grad}\phi \cdot N dS \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

注意到

$$\operatorname{grad} E_n = \left(\frac{x_1|x|^{-n}}{C_n}, \ldots, \frac{x_n|x|^{-n}}{C_n}\right), \operatorname{grad}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right), N = \left(\frac{x_1}{|x_1|}, \ldots, \frac{x_n}{|x_n|}\right).$$

所以

$$I_1 = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|=\epsilon} \frac{\phi(x)|x|^{1-n}}{C_n} dS = \phi(0)$$

並且透過極座標計算

$$I_2 = \begin{cases} \lim\limits_{\epsilon\to 0}\displaystyle\int_{|x|=\epsilon} \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)C_n}\frac{1}{|x|}\left(x_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)=0 & \text{若 } n>2,\\ \lim\limits_{\epsilon\to 0}\displaystyle\int_{|x|=\epsilon} \frac{\log|x|}{2\pi|x|}\left(x_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)=0 & \text{若 } n=2 \end{cases}.$$

於是我們得到了在分佈意義下$\Delta_n E_n=\delta_0$。

## 4.3. 局部化與緊支撐分佈

這小節我們介紹分佈局部化、支撐集和具有緊緻支撐的分佈。從現在開始, 除了特別提及, 我們總是固定 $\mathbb{R}^n$ 中的一個開集$X$。首先, 給定一分佈 $u\in D'(X)$, 若對於所有的點 $p\in X$, 都存在一 $p$ 點附近的開集 $U_p$ 使得分佈限制 $u|_{U_p}=0$, 則不難驗證在分佈意義下 $u=0$。事實上, 利用單位分解引理, 我們有個反過來的敘述, 其證明細節交由讀者驗證。

**定理** 4.2: 令 $X_1, X_2, \ldots$ 爲 $\mathbb{R}^n$ 上的開集, 考慮 $X := \cup_{j=1}^{\infty} X_j$。若在每個 $X_j$ 上有分佈 $u_j\in D'(X_j)$, 並且對任意不同的 $j, k$, 在交集 $X_j\cap X_k$ 上 $u_j=u_k$, 則存在唯一的分佈 $u\in D'(X)$ 使得對所有 $j$, $u|_{X_j}=u_j$。

**提示**: 給定任意的 $\phi\in C_0^\infty(X)$, 由於 $\operatorname{supp}(\phi)$ 是緊緻的, 利用單位分解引理我們可以找到有限個 $\phi_j\in C_0^\infty(X_j)$ 使得 $\phi=\sum_j\phi_j$。定義 $u(\phi):=\sum_j u_j(\phi_j)$。檢驗這樣的定義是恰當定義的, 也就是說和單位分解引理的函數選取無關。最後按照分佈的定義檢驗 $u\in D'(X)$。

另一方面, 透過前述對於分佈限制的觀察, 我們有下列的定義:

**定義** 4.5: 令 $u\in D'(X)$, 我們定義分佈的支撐集 $\operatorname{supp}(u)$ 爲得

$$\operatorname{supp}(u) := \{x\in X: \text{ 不存在 } x \text{ 附近的開集使得 } u \text{ 限制在上面爲 } 0\}.$$

換句話說, $u|_{X\setminus \operatorname{supp}(u)}=0$。

另一方面, 有了分佈的支撐的定義, 我們可以考慮一類的分佈子空間:

**定義** 4.6: 給定一個分佈 $u\in D'(X)$, 我們說 $u$ 是個緊緻支撐分佈 (distribution with compact support)若 $\operatorname{supp}(u)$ 爲 $X$ 內的緊緻集。我們把具有緊緻支撐分佈的全體記爲 $E'(X)$。也就是說

$$E'(X) := \{u\in D'(X) : \operatorname{supp}(u) \text{ 爲 } X \text{ 內的緊緻集}\}。$$

**範例**:

1. $C_0^\infty(X) \subset E'(X)$。
2. 直接的, 透過定義我們有$\text{supp}(\delta_p) = \{p\}$, 所以$\delta_p \in E'(X)$。

我們這邊也給出關於緊緻支撐分佈連續性的刻畫, 讀者可與先前小節的敘述比較一下。給定 $X$ 上的光滑函數序列 $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$, 對於 $\phi \in C^\infty(X)$, 若對於所有緊緻集 $K \subset X$ 和多重指標 $\alpha$, $\sup_K |\partial_x^\alpha(\phi_j - \phi)| \to 0$ 成立, 則我們說 $\phi_j \to \phi$在$C^\infty(X)$意義下收斂。

**定理** 4.3: 若 $u \in E'(X)$, 則 $u$ 可被連續的延拓至 $C^\infty(X)$ 並成爲一個連續線性泛函。

**證明**: 因爲 $\text{supp}(u)$ 爲緊緻的, 我們可以取 $\psi \in C_0^\infty(X)$ 使得在 $\text{supp}(u)$ 附近 $\psi = 1$。對於任意的 $\phi \in C^\infty(X)$, 定義

$$u : C^\infty(X) \to \mathbb{C},\ u(\phi) := u(\psi\phi).$$

我們先來確認這樣是恰當定義的。也就是說, 我們要確認這樣的定義與截斷函數 $\psi$ 的選取無關。現在, 對於另一 $\mathring{\psi} \in C_0^\infty(X)$ 滿足在 $\text{supp}(u)$ 附近 $\mathring{\psi} = 1$, 則由於 $u(\psi\phi) - u(\mathring{\psi}\phi) = u((\psi - \mathring{\psi})\phi)$ 並且 $\text{supp}(\mathring{\psi} - \psi)\phi \cap \text{supp}(u) = \emptyset$, 我們得到 $u((\psi - \mathring{\psi})\phi) = 0$。因此 $u(\mathring{\psi}\phi) = u(\psi\phi)$。我們得到這樣的定義與截斷函數 $\psi$ 的選取無關。我們只需驗證這樣的延拓是連續的。令 $K := \text{supp}(\psi)$, 它是緊緻的。則按照分佈定義, 存在常數 $C>0$ 和 $k\in\mathbb{N}_0$ 使得

$$|u(\phi)| = |u(\psi\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_K |\partial^\alpha(\psi\phi)| \leq C' \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_K |\partial^\alpha\phi|,$$

其中 $C' > 0$ 是一個新的常數。 □

事實上, 讀者可檢驗反過來的敘述也是對的。而我們可以整理上述討論爲:

**命題** 4.2: $u$ 是一個 $C^\infty(X)$ 上的連續線性泛函若且唯若 $u \in E'(X)$。

## 4.4. 再談卷積

在這小節, 我們將透過測試函數與分佈的卷積來示範所謂的光滑化技巧。

**定義** 4.7: 對於 $u \in D'(X)$, $\phi \in C^\infty(X)$, 我們將捲積定義爲函數 $(u * \phi)(x) := u(\phi(x - \bullet))$, 其中 $u$ 作用在 $\bullet$ 變數。

讀者可檢驗關係式 $\partial_x^\alpha u(\phi(x - \bullet)) = u(\partial_x^\alpha \phi(x - \bullet)$ 成立, 則藉此我們不難發現 $u * \phi \in C^\infty(X)$。此外, 讀者也可由定義來檢驗

$$\text{supp}(u * \phi) \subset \text{supp}(u) + \text{supp}(\phi).$$

**範例**:

1. 若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ , 則
$$(T_f * \phi)(x) := f(\phi(x-\bullet)) := \int f(y)\phi(x-y)dy,$$
這符合在函數空間上捲積的定義。
2. 考慮狄拉克算子 $\delta_0$, 則對所有的測試函數 $\phi$,
$$(\delta_0 * \phi)(x) := \delta_0(\phi(x-\bullet)) := \phi(x-0) = \phi(x).$$
3. 考慮常係數偏微分算子 $P := \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha \partial_x^\alpha$, 其中 $\alpha$ 爲多重指標且對所有的 $\alpha$, $a_\alpha$ 爲常數。若我們能找到一個分佈 $E \in D'(\mathbb{R}^n)$, 使得在分佈意義下 $PE = \delta_0$, 則對於 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 我們可以檢驗
$$P(E*\phi) = PE*\phi = \delta_0 * \phi = \phi.$$
我們稱 $E$ 爲偏微分算子 $P$ 的基本解 (fundamental solution)。而上述的關係式表明 : 若存在基本解那對於任意的測試函數 $\phi$, 我們總能找到光滑解 $u = E*\phi$ 使得 $Pu = \phi$。

**命題** 4.3: 若 $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 則 $(u*\phi)*\psi = u*(\phi*\psi)$。

**證明**: 不難檢驗對測試函數$\phi, \psi$, 當$h \to 0$, 黎曼和$f_h(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi(x-kh)h^n\psi(kh) \to (\phi*\psi)(x)$。事實上, $f_h(x) \to (\phi*\psi)(x)$亦在$C_0^\infty(X)$的拓樸下收斂。因此
$$\begin{aligned}
u*(\phi*\psi)(x) &= u((\phi*\psi)(x-\bullet)) \\
&= u(\lim_{h\to 0} f_h(x-\bullet)) \\
&= \lim_{h\to 0} u\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi(x-kh-\bullet)h^n\psi(kh)\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h^n\psi(kh)u(\phi(x-kh-\bullet)) \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h^n\psi(kh)(u*\phi)(x-kh) \\
&= \int (u*\phi)(x-y)\psi(y)dy \\
&= (u*\phi)*\psi.
\end{aligned}$$
□

現在, 我們敘述最基本的光滑化方法。考慮非負函數 $\chi \in C_0^\infty(B_1(0))$ 滿足 $\int \chi dx = 1$, $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$。對於 $\epsilon > 0$, 令 $\chi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$。注意到 $\int \chi_\epsilon dx = 1$ 且

對所有的 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_\epsilon * \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_\epsilon \to u$ 在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 意義下收斂。透過 $\chi_\epsilon$, 我們有以下的單位逼近 (approximation by identity):

**命題** 4.4: 令 $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $u_\epsilon := u * \chi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 則當 $\epsilon \to 0$, 在分佈意義下 $u_\epsilon \to u$。

**證明**: 令 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\check{\phi}(x) := \phi(-x)$。注意到 $(u_\epsilon * \check{\phi})(0) := u(\check{\phi}(-\bullet)) = u(\phi)$。於是對所有的測試函數 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$u_\epsilon(\phi) = u_\epsilon * \check{\phi}(0) = (u * \chi_\epsilon) * \check{\phi}(0) = u * (\chi_\epsilon * \check{\phi})(0) \to u * \check{\phi}(0) = u(\phi)$$

當 $\epsilon \to 0$, 因爲$\chi_\epsilon * \check{\phi} \to \check{\phi}$在$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$意義下收斂。 □

下列版本的光滑化逼近留給讀者練習:

**命題** 4.5: 令 $u \in D'(X)$, 則存在序列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty, u_j \in C_0^\infty(X)$, 使得 $u_j \to u$ 在分佈意義下收斂。

**提示**: 證明 $X$ 可以寫成 $X = \cup_{j=1}^\infty K_j$, $K_j$ 爲緊緻集滿足 $K_j \subset K_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n$ (我們稱 $\{K_j\}_{j=1}^\infty$ 爲窮竭緊緻集 (exhaustion compact sets))。考慮截斷函數 $\tau_j$ 使得在 $K_j$ 上 $\tau_j = 1$, 令 $u_j := \tau_j u * \chi_\epsilon$, $\epsilon = \frac{1}{j}$, 檢驗 $u_j$ 即爲所需。

接下來, 我們介紹如何將兩個分佈做捲積。靠慮平移算子 $\tau_h$

$$\tau_h(\phi)(x) := \phi(x - h),\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

注意到若 $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, 則

$$u * (\tau_h \phi) := u(\tau_h \phi(x - \bullet)) = u(\phi(x - h - \bullet)) = \tau_h(u * \phi).$$

我們先介紹一個跟平移有關的關鍵的定理:

**定理** 4.4: 考慮一連續線性泛函 $U : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 若 $U$ 和所有平移算子 $\tau_h$ 交換, 也就是說對所有的 $h \in \mathbb{R}^n$, $U\tau_h = \tau_h U$, 則存在唯一一個 $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ 使得 $U = u*$。

**證明**: 考慮線性泛函

$$\begin{aligned} u : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{C}, \\ \phi &\to (U\check{\phi})(0), \end{aligned}$$

其中 $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$。不難檢驗 $u \in D'(\mathbb{R}^n)$。注意到對於所有的 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 從 $u$ 的定義在原點我們有

$$u * \phi(0) = u(\phi(-\bullet)) = (U\phi)(0).$$

現在我們來使用平移的條件來得到上述的等式其實是在任意點成立的。對所有的$x=-h\in\mathbb{R}^n$,

$$U(\phi)(-h)=(\tau_h U\phi)(0)=(U\tau_h\phi)(0)=u*(\tau_h\phi)(0)=u*(\phi(-h-\bullet))=(u*\phi)(-h).$$

我們已證明了存在性。由命題 4.4, 我們立刻得到唯一性。詳細的細節交給讀者練習。 □

現在給定 $u_1\in E'(\mathbb{R}^n)$ 與 $u_2\in D'(\mathbb{R}^n)$, 注意到映射

$$u_1*:\begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)\\ C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)\end{cases}$$

和

$$u_2*:C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

都是在相對應的函數空間拓樸下連續的。對所有的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 考慮映射

$$U:C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n),\ U(\phi):=u_1*(u_2*\phi).$$

注意到 $U$ 在對應的函數空間下是個連續線性映射。而透過直接驗算, 我們可以發現對所有 $h\in\mathbb{R}^n$, $\tau_h U=U\tau_h$, 由前述的定理我們可以找到唯一一個 $u\in D'(\mathbb{R}^n)$ 使得 $U=u*$, 也就是說對所有測試函數 $\phi$,

$$U\phi=u*\phi=u_1*(u_2*\phi). \tag{4.1}$$

類似地, 對於所有的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 我們也可以考慮映射

$$\mathring{U}:C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \mathring{U}(\phi):=u_2*(u_1*\phi).$$

同樣地, 注意到 $\mathring{U}$ 在對應的函數空間下是個連續線性映射, 並且對所有 $h\in\mathbb{R}^n$, $\tau_h\mathring{U}=\mathring{U}\tau_h$。再次由前述的定理我們可以找到唯一一個 $R\in D'(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\mathring{U}=\mathring{u}*$, 也就是說對所有測試函數 $\phi$,

$$\mathring{U}\phi=\mathring{u}*\phi=u_2*(u_1*\phi). \tag{4.2}$$

上述討論引出了下列定義:

**定義** 4.8: 給定 $u_1\in E'(\mathbb{R}^n)$ 與 $u_2\in D'(\mathbb{R}^n)$。我們定義捲積 $u_1*u_2$ (或 $u_2*u_1$) 爲唯一一個 $u\in D'(\mathbb{R}^n)$ (或 $\mathring{u}\in D'(\mathbb{R}^n)$) 滿足式子 (4.1) (或 (4.2))。

下列性質讀者可用光滑化手法來驗證看看:

**命題** 4.6: 對於$u_1\in E'(\mathbb{R}^n)$與$u_2\in D'(\mathbb{R}^n)$, $u_1*u_2=u_2*u_1$。

**提示**: 對所有的$\phi,\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 檢驗$(u_1*u_2)(\phi*\psi)=(u_2*u_1)*(\phi*\psi)$。

我們以拉普拉斯算子的正則性作爲此小節的結尾。

**命題** 4.7: 給定 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 若我們可以找到 $u \in E'(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\Delta_n u = f$, 則實際上 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$。

**證明**: 令$E_n$爲$\Delta_n$的基本解, 注意到$E_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$, 由基本解的定義和分佈與測試函數捲積的微分法則, 我們可推論出 $u = E_n * \Delta_n u = E_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$。□

事實上, 我們可以得到一個在歷史上被稱爲魏爾引理 (Weyl lemma)的結果:

**定理** 4.5: 對於開集 $X \subset \mathbb{R}^n$ 和 $f \in C^\infty(X)$, 若 $u \in D'(X)$ 是方程 $\Delta_n u = f$ 的解, 則 $u \in C^\infty(X)$。

**證明**: 我們將透過局部化的技術來證明這件事情：若對於任意的開子集 $Y \Subset X$ (我們使用記號 $Y \Subset X$ 表示 $Y \subset X$ 爲開子集且 $\overline{Y} \subset X$ 爲緊緻子集), 而 $u$ 滿足限制 $u|_Y \in C^\infty(X)$, 則 $u \in C^\infty(X)$。我們現在固定一個開子集 $Y \Subset X$。考慮截斷函數 $\chi \in C_0^\infty(X)$, 在 $\overline{Y}$ 附近 $u = 1$。令 $v := \chi u \in E'(X)$。回顧對所有的測試函數 $\phi$, 我們定義 $\chi u(\phi) := u(\chi\phi)$。注意到

$$\Delta_n v = \chi f + g,$$

其中

$$g := 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \Delta_n(\chi) f \in E'(X) \subset E'(\mathbb{R}^n),$$

而且在 $Y$ 上 $g = 0$。令 $E_n$ 爲 $\Delta_n$ 的基本解, 注意到 $E_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$, 則

$$E_n * \Delta_n v = E_n * (\chi f + g) = E_n * (\chi f) + E_n * g,$$

其中 $E_n * \chi f \in C^\infty(X)$。所以我們只要證明 $E_n * g \in C^\infty(X)$, 那這個定理就完成了。現在, 視 $E_n * g$ 爲分佈 $D'(\mathbb{R}^n)$ 和 $E'(\mathbb{R}^n)$ 意義下的捲積, 考慮截斷函數 $\tau \in C_0^\infty(X)$, 其滿足在 $\operatorname{supp}(g)$ 附近 $\tau = 1$ 且 $\operatorname{supp}(\tau) \cap Y = \emptyset$。我們宣稱下列敘述成立:

$$E_n * g = g(\tau(\bullet)E_n(x - \bullet)). \tag{4.3}$$

注意到若此敘述是對的, 因爲 $\tau$ 在 $Y$ 附近爲零, 所以對所有的 $x \in Y$, 若 $\tau(y)E_n(x-y)$ 不爲零, 則必定有 $y \neq x$。由於 $E_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, 我們得到對所有的 $x \in Y$,

$$\tau(\bullet)E_n(x - \bullet) \in C_0^\infty(X).$$

透過分佈微分的定義我們不難證明 $E_n * g \in C^\infty(Y)$。現在我們來證明式 (4.3)。注意到

$$E_n * g = g * E_n = \tau g * E_n.$$

考慮光滑化逼近序列 $g_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $g_j\to g$ 在分佈意義之下收斂, 則 $\tau g_j*E\to\tau g*E$ 也在分佈意義下收斂。也就是說, 對於所有 $\phi\in C_0^\infty(Y)$,

$$\begin{aligned}
\tau g*E_n(\phi) &= \lim_{j\to\infty}(\tau g_j*E_n)(\phi)\\
&= \lim_{j\to\infty}\int(E_n*\tau g_j)(x)\phi(x)dx\\
&= \lim_{j\to\infty}\int\big(E_n(\tau(x-\bullet))g_j(x-\bullet)\big)\phi(x)dx\\
&= \lim_{j\to\infty}\iint E_n(y)\tau(x-y)g_j(x-y)\phi(x)dxdy\\
&= \lim_{j\to\infty}\iint E_n(x-y)\tau(x)g_j(x)\phi(x)dxdy\\
&= \lim_{j\to\infty}\iint E_n(y)\tau(x-y)g_j(x-y)\phi(x)dydx\\
&= \lim_{j\to\infty}\int g_j\big(\tau(\bullet)E_n(x-\bullet)\big)\phi(x)dx\\
&= \int g\big(\tau(\bullet)E_n(x-\bullet)\big)\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

最後一步我們用到了勒貝格的控制收斂定理：由於在分佈意義之下 $g_j\to g$, 而
$\tau(\bullet)E_n(x-\bullet)\in C_0^\infty(Y)$, 所以我們有逐點的收斂 $g_j\big(\tau(\bullet)E_n(x-\bullet)\to g\big(\tau(\bullet)E_n(x-\bullet)$。另一方面, 從分佈意義下收斂的定義我們可推論出對所有的緊緻集 $K\subset\mathbb{R}^n$, $\phi\in C_0^\infty(K)$, 存在常數 $k,C>0$ 使得

$$|g_j(\phi)|\le C\sum_{|\alpha|\le k}\sup_K|\partial^\alpha\phi|.$$

換句話說, 對所有的 $x\in Y$, 我們有

$$\big|g_j\big(\tau(y)E_n(x-y)\big)\big|\le C\sum_{|\alpha|\le k}\sup_{\mathrm{supp}(\tau)}\left|\partial_y^\alpha\left(\tau(y)E(x-y)\right)\right|\le M,$$

其中 $M$ 是個常數。故我們可以套用勒貝格控制收斂定理得到 (4.3)。 □

在 1950 年左右施瓦茲 (Laurent Schwartz) 建立了分佈的基本理論, 而透過傅立葉變換的方法 (我們將在下一講介紹相關內容), 數學家伯納・馬格宏茲 (Bernard Malgrange) 和里昂・艾倫普瑞斯 (Leon Ehrenpreis) 得到了任意的常係數線性偏微分算子都存在基本解結果:

**定理** 4.6: 給定任意 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 $m$ 階常係數偏微分算子 $P:=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha\partial_x^\alpha$, 其中 $\alpha$ 爲多重指標且對所有的 $\alpha$, $a_\alpha$ 爲常數。總是存在 $u\in D'(\mathbb{R}^n)$ 使得在分佈意義下 $Pu=\delta_0$。

而結合定理 4.5 和定理 4.6, 我們知道方程 $\Delta_n u = 0$ 總是有光滑解。可解性 (solvability) 與正則性 (regularity) 一直是現代偏微分方程中的主調之一, 我們將在後續篇章中透過擬微分算子 (pseudodifferential operators)的觀點來建立光滑函數係數橢圓算子 (elliptic operators)的橢圓正則性 (elliptic regularity)與局部可解性 (local solvability)。

# 5. 施瓦茲分佈核定理

## 5.1. 張量積與分佈核

令開集 $X \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$。令 $\mathcal{K} \in D'(X \times Y)$, 考慮線性映射

$$T_{\mathcal{K}} : C_0^\infty(Y) \to D'(X),$$
$$\phi \to T_{\mathcal{K}}\phi, \quad (T_{\mathcal{K}}\phi)(\psi) := \mathcal{K}(\psi \otimes \phi), \quad \psi \in C_0^\infty(Y).$$

此處函數的張量積 (tensor product)定義爲 $(\psi \otimes \phi)(x, y) := \psi(x)\phi(y)$。不難發現, 這樣的 $T_{\mathcal{K}}$ 是個連續線性映射。分佈論的建立者施瓦茲得到了下列重要的定理:

**定理** 5.1: 對任意的連續線性映射 $A : C_0^\infty(Y) \to D'(X)$, 存在唯一的分佈 $\mathcal{K}_A \in D'(X \times Y)$ 使得

$$(A\phi)(\psi) = \mathcal{K}_A(\psi \otimes \phi) \ \text{ 對所有的} \phi \in C_0^\infty(Y), \psi \in C_0^\infty(X).$$

我們稱這樣的 $\mathcal{K}_A$ 爲 $A$ 的施瓦茲核 (Schwartz kernel) 或是分佈核 (distribution kernel), 其完整的證明將出現在下個小節。在這之前我們介紹分佈間如何定義張量積。

**定理** 5.2: 給定$u_1 \in D'(X)$和$u_2 \in D'(Y)$, 則對於所有的 $\phi_1 \in C_0^\infty(X)$ 和 $\phi_2 \in C_0^\infty(Y)$, 存在唯一一個分佈 $u \in D'(X \times Y)$ 使得 $u(\phi_1 \otimes \phi_2) = u_1(\phi_1)u_2(\phi_2)$。事實上,

$$u(\phi) = u_1\big(u_2(\phi(x, y))\big) = u_2\big((u_1(\phi(x, y))\big),$$

此處$u_1$作用在變數 $x$ 上而$u_2$作用在變數 $y$ 上。藉此, 我們定義分佈間的張量積爲 $u_1 \otimes u_2 := u$。

**證明**: 我們分別證明張量積的唯一性與存在性。注意到若我們能證明對所有的 $\phi_1 \in C_0^\infty(X)$ 和 $\phi_2 \in C_0^\infty(Y)$, 當 $u(\phi_1 \otimes u_2) = 0$ 時, 在分佈意義下有 $u = 0$, 則唯一性就被證明了。現在我們假設對所有的 $\phi_1 \in C_0^\infty(X)$ 和 $\phi_2 \in C_0^\infty(Y)$, $u(\phi_1 \otimes u_2) = 0$。取函數 $\chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 他們的支撐集 $\operatorname{supp}(\chi_1), \operatorname{supp}(\chi_2) \subset B_1(0)$ 並且滿足 $\int \chi_1 = \int \chi_2 = 1$, 那麼對於

$$\Phi_\epsilon(x, y) := \left(\epsilon^{-n_1}\chi_1 \otimes \epsilon^{-n_2}\chi_2\right)\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}\right),$$

我們有 $\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Phi_\epsilon(x, y)dxdy = 1$, 並且對所有的 $g \in C_0^\infty(X \times Y)$, $\Phi_\epsilon * g \to g$ 在 $C_0^\infty(X \times Y)$ 的意義下。注意到若對所有的開集 $\Omega \Subset X \times Y$, 我們都有分佈意義下的限制 $u|_\Omega = 0$, 則由分

佈的局部化性值, 我們知道在分佈意義下 $u=0$。因此, 我們取一截斷函數 $\tau=\tau_1(x)\tau_2(y)\in C_0^\infty(X\times Y)$ 使得在 $\overline{\Omega}$ 附近 $\tau=1$, $\tau_1\in C_0^\infty(X)$, $\tau_2\in C_0^\infty(Y)$。透過對 $\tau$ 支撐集外的函數值取零延拓, 我們可以視 $\tau\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$, 並且 $\tau u\in D'(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$。則透過捲積的光滑化, 對所有的 $g\in C_0^\infty(\Omega)$, 當 $\epsilon\to 0$,

$$(\tau u*\Phi_\epsilon)(g)=(\tau u*\Phi_\epsilon)*\check{g}(0)=\tau u*(\Phi_\epsilon*\check{g})(0)\to\tau u*\check{g}(0)=\tau u(g)=u(\tau g)=u(g).$$

另一方面, 按照定義 $\tau u*\Phi_\epsilon$ 爲

$$\begin{aligned}\tau u(\Phi_\epsilon(x-\bullet,y-\bullet))&=u(\tau\Phi_\epsilon(x-\bullet,y-\bullet))\\&=u\left(\left(\epsilon^{-n_1}\tau_1(\bullet)\chi_1\otimes\epsilon^{-n_2}\tau_2(\bullet)\chi_2\right)\left(\frac{x-\bullet}{\epsilon},\frac{y-\bullet}{\epsilon}\right)\right)=0\end{aligned}$$

因此, 對所有的 $g\in C_0^\infty(\Omega)$, $u(g)=0$。至此我們已驗證了唯一性。

至於存在性的部分, 我們定義線性泛函

$$u:C_0^\infty(X\times Y)\to\mathbb{C},\ u(\phi):=u_1\big(u_2(\phi(x,y))\big).$$

考慮緊緻集 $K_1\subset X$, $K_2\subset Y$, $K\subset K_1\times K_2$, 則按照分佈的定義, 對於 $j=1,2$, 存在常數 $C_{j,K_j}>0$ 與 $k_j\in\mathbb{N}$, 對所有的 $\phi_j\in C_0^\infty(K_j)$,

$$|u_j(\phi_j)|\le C_{j,K_j}\sum_{|\alpha|\le k_j}\sup_{K_j}|\partial^\alpha\phi_j|$$

透過直接計算, 不難發現對所有的 $\phi\in C_0^\infty(K)$, $|u(\phi)|\le C_{1,K_1}C_{2,K_2}\sum_{|\alpha|\le k_1+k_2}\sup_K|\partial^\alpha\phi|$, 由分佈的定義, 我們發現了 $u\in D'(X\times Y)$。另一方面, 我們也可透過類似的論證來檢驗對於線性泛函

$$\mathring{u}:C_0^\infty(X\times Y)\to\mathbb{C},\ \mathring{u}(\phi):=u_2\big(u_1(\phi(x,y))\big),$$

$\mathring{u}\in D'(X\times Y)$。最後, 由於我們有

$$u(\phi_1\otimes\phi_2)=u_1\big(u_2(\phi_1\otimes\phi_2)\big)=u_1\big(\phi_1u_2(\phi_2)\big)=u_1(\phi_1)u_2(\phi_2);$$

而透過類似的計算我們也有 $\mathring{u}(\phi_1\otimes\phi_2)=u_1(\phi_1)u_2(\phi_2)$, 透過前述唯一性的結論, 我們知道

$$u=\mathring{u}\in D'(X\times Y),$$

並且對於所有的 $\phi_1\in C_0^\infty(X)$ 和 $\phi_2\in C_0^\infty(Y)$, $u(\phi_1\otimes\phi_2)=u_1(\phi_1)u_2(\phi_2)$。 □

**範例**: 令開集 $X,Y\subset\mathbb{R}^n$, $\delta_p\in D'(X),\delta_q\in D'(Y)$, 則 $\delta_p\otimes\delta_q=\delta_{(p,q)}\in D'(X\times Y)$。

## 5.2. 施瓦茲分佈核定理的證明

此小節我們證明定理 5.1。讀者可細細體會這個由霍曼德提出的證明方法[1, Theorem 5.2.1], 其中用到了許多分佈論中的重要想法與技巧。

分佈核的唯一性證明與定理 5.2 唯一性的部分是一致的, 在此留給讀者檢驗。我們現在來證明分佈核的存在性。考慮任意的開集 $Y_1 \Subset X_1$ 和 $Y_2 \Subset X_2$, 爲了方便起見我們也使用下列記號

$$\langle A\phi, \psi\rangle := (A\phi)(\psi)$$

來表示分佈與測試函數的配對。對任意的 $(x_1, x_2) \in Y_1 \times Y_2$ 和 $\epsilon > 0$, 考慮

$$\mathcal{K}_\epsilon(x_1, x_2) := \left\langle A\left(\epsilon^{-n_2}\psi_2\left(\frac{x_2 - \bullet}{\epsilon}\right)\right), \epsilon^{-n_1}\psi_1\left(\frac{x_1 - \bullet}{\epsilon}\right)\right\rangle$$

其中$\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n_j})$滿足$\psi_j \geq 0$, $\int \psi_j dx_j = 1$, $\operatorname{supp}(\psi_j) \subset \{x_j \in \mathbb{R}^{n_j} : |x_j| \leq 1\}$, $j = 1, 2$。不難發現, 若分佈核 $\mathcal{K}_A$ 真的存在, 則

$$\mathcal{K}_\epsilon = \mathcal{K}_A * \Psi_\epsilon \to \mathcal{K}_A$$

在 $D'(Y_1 \times Y_2)$ 意義下, 其中 $\Psi_\epsilon = \epsilon^{-n_1-n_2}\psi_2\left(\frac{x_2}{\epsilon}\right)\psi_1\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right)$。因此, 我們接下來的目標就是證明當 $\epsilon \to 0$, $\mathcal{K}_\epsilon$ 在空間 $D'(Y_1 \times Y_2)$ 中的極限存在, 並且極限就滿足分佈核的要求。

透過直接驗證, 不難發現對於任意緊緻集 $K_1 \subset X_1$ 和 $K_2 \subset X_2$, 存在常數 $C_{K_1,K_2}$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $\psi \in C_0^\infty(K_1)$ 和 $\phi \in C_0^\infty(K_2)$,

$$|\langle A\phi, \psi\rangle| \leq C_{K_1,K_2} \sum_{|\alpha| \leq N_1} \sup_{K_1} |\partial^\alpha \psi| \sum_{|\beta| \leq N_2} \sup_{K_2} |\partial^\beta \phi|.$$

透過上述的估計, 我們有

$$|\mathcal{K}_\epsilon(x_1, x_2)| \leq C\epsilon^{-n_1-n_2-N_1-N_2} =: C\epsilon^{-\mu}, \quad \mu := n_1 + n_2 + N_1 + N_2.$$

對於 $\epsilon \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial\epsilon}\mathcal{K}_\epsilon(x_1, x_2)$ 可寫成

$$\begin{aligned}&\left\langle A\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\epsilon^{-n_2}\psi_2\left(\frac{x_2 - \bullet}{\epsilon}\right)\right)\right), \epsilon^{-n_1}\psi_1\left(\frac{x_1 - \bullet}{\epsilon}\right)\right\rangle \\ &\quad + \left\langle A\left(\epsilon^{-n_2}\psi_2\left(\frac{x_2 - \bullet}{\epsilon}\right)\right), \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\epsilon^{-n_1}\psi_1\left(\frac{x_1 - \bullet}{\epsilon}\right)\right)\right\rangle\end{aligned}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\epsilon^{-n_2}\psi_2\left(\frac{x_2 - \bullet}{\epsilon}\right)\right) = \epsilon^{-n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\partial}{\partial x_{2,j}}\left(\frac{-x_{2,j} - \bullet}{\epsilon}\psi_2\left(\frac{x_2 - \bullet}{\epsilon}\right)\right)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\epsilon^{-n_1}\psi_1\left(\frac{x_1 - \bullet}{\epsilon}\right)\right) = \epsilon^{-n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\frac{\partial}{\partial x_{1,j}}\left(\frac{-x_{1,j} - \bullet}{\epsilon}\psi_1\left(\frac{x_1 - \bullet}{\epsilon}\right)\right)$$

成立, 這邊我們用這個記號$x_2=(x_{2,1},\ldots,x_{2,n})$, $x_1=(x_{1,1},\ldots,x_{1,n})$。我們記

$$L^j_\epsilon(x_1,x_2):=\epsilon^{-n_1-n_2}\left\langle A\left((-x_{2,j}\psi_2)\left(\frac{x_{2,j}-\bullet}{\epsilon}\right)\right),\psi_1\left(\frac{x_1-\bullet}{\epsilon}\right)\right\rangle\in C^\infty(Y_1\times Y_2),$$

和

$$M^j_\epsilon(x_1,x_2):=\epsilon^{-n_1-n_2}\left\langle A\left(\psi_2\left(\frac{x_{2,j}-\bullet}{\epsilon}\right)\right),(-x_{1,j}\psi_1)\left(\frac{x_1-\bullet}{\epsilon}\right)\right\rangle\in C^\infty(Y_1\times Y_2).$$

注意到從上述計算我們有

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\mathcal{K}_\epsilon(x_1,x_2)=\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\partial L^j_\epsilon(x_1,x_2)}{\partial x_{2,j}}+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{\partial M^j_\epsilon(x_1,x_2)}{\partial x_{1,j}},$$

其中 $|L^j_\epsilon(x_1,x_2)|\le C|\epsilon|^{-\mu}$, $|M^j_\epsilon(x_1,x_2)|\le C\epsilon^{-\mu}$。類似地, 透過迭代計算, 對任意 $\gamma\in\mathbb{N}$ 和多重指標 $\alpha\in\mathbb{R}^{n_2},\beta\in\mathbb{R}^{n_1}$, $|\alpha|+|\beta|=\gamma$, 則我們可以找到一些 $L^{\alpha,\beta}_\epsilon(x_1,x_2)\in C^\infty(Y_1\times Y_2)$ 滿足 $|L^{\alpha,\beta}_\epsilon(x_1,x_2)|\le C\epsilon^{-\mu}$ 並且

$$\mathcal{K}^{(\gamma)}_\epsilon(x_1,x_2):=\partial^\gamma_\epsilon\mathcal{K}_\epsilon(x_1,x_2)=\sum_{|\alpha|+|\beta|=\gamma}\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial x_2^\alpha\partial x_1^\beta}L^{\alpha,\beta}_\epsilon(x_1,x_2).$$

也就是說在$\epsilon\neq 0$, $\mathcal{K}_\epsilon(x_1,x_2)$是個對$\epsilon$變數光滑的函數。於是, 對於固定且夠小的$\delta>0$, 我們對變數$\epsilon$使用泰勒公式:

$$\mathcal{K}_\epsilon(x_1,x_2)=\sum_{\gamma=0}^{\mu}\frac{(\epsilon-\delta)^\gamma}{\gamma!}\mathcal{K}^{(\gamma)}_\delta(x_1,x_2)+(\epsilon-\delta)^{\mu+1}\int_0^1\mathcal{K}^{(\mu+1)}_{\delta+t(\epsilon-\delta)}(x_1,x_2)\frac{(1-t)^\mu}{\mu!}dt.$$

透過仔細地檢驗此式, 我們來證明$\lim_{\epsilon\to0}\mathcal{K}_\epsilon$在$D'(Y_1\times Y_2)$中存在。對於任意測試函數$\phi\in C^\infty_0(Y_1\times Y_2)$,

$$\langle\mathcal{K}_\epsilon(x_1,x_2),\phi(x_1,x_2)\rangle=\int\mathcal{K}_\epsilon(x_1,x_2)\phi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

其中

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to0}\sum_{\gamma=0}^{\mu}\int\frac{(\epsilon-\delta)^\gamma}{\gamma!}\mathcal{K}^{(\gamma)}_\delta(x_1,x_2)\phi(x_1,x_2)dx_1dx_2\\&\to\sum_{\gamma=0}^{\mu}\frac{(-\delta)^\gamma}{\gamma!}\int\mathcal{K}^{(\gamma)}_\delta(x_1,x_2)\phi(x_1,x_2)dx_1dx_2\end{aligned}$$

而積分型餘項

$$\lim_{\epsilon\to0}(\epsilon-\delta)^{\mu+1}\int_0^1\left(\int\mathcal{K}^{(\mu+1)}_{\delta+t(\epsilon-\delta)}(x_1,x_2)\phi(x_1,x_2)dx_1dx_2\right)\frac{(1-t)^\mu}{\mu!}dt$$

我們可以透過分部積分

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{K}^{(\mu+1)}_{\delta+t(\epsilon-\delta)}(x_1,x_2)\phi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\
&= \sum_{|\alpha|+|\beta|=\mu+1} \int \left( \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial x_2^{\alpha}\partial x_1^{\beta}} L^{\alpha,\beta}_{\delta+t(\epsilon-\delta)}(x_1,x_2) \right) \phi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\
&= (-1)^{\mu+1} \sum_{|\alpha|+|\beta|=\mu+1} \int L^{\alpha,\beta}_{\delta+t(\epsilon-\delta)}(x_1,x_2) \left( \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial x_2^{\alpha}\partial x_1^{\beta}} \phi(x_1,x_2) \right) dx_1dx_2.
\end{aligned}
$$

由於$|L^{\alpha,\beta}_{\delta+t(\epsilon-\delta)}(x_1,x_2)| \leq C|\delta+t(\epsilon-\delta)|^{-\mu}$, 由上述計算我們馬上得到

$$
\left| \int \mathcal{K}^{(\mu+1)}_{\delta+t(\epsilon-\delta)}(x_1,x_2)\phi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \right| \leq C|\delta+t(\epsilon-\delta)|^{-\mu} = C|t\epsilon+(1-t)\delta)|^{-\mu}.
$$

現在令函數

$$
f_\epsilon(t) := (\epsilon-\delta)^{\mu+1} \left( \int \mathcal{K}^{(\mu+1)}_{\delta+t(\epsilon-\delta)}(x_1,x_2)\phi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \right) \frac{(1-t)^{\mu}}{\mu!},
$$

則對所有$\epsilon > 0$,

$$
|f_\epsilon(t)| \leq C|\epsilon-\delta|^{\mu+1}|\epsilon+(1-t)\delta|^{-\mu}\frac{(1-t)^{\mu}}{\mu!} \leq C|\epsilon-\delta|^{\mu+1}\delta^{-\mu}\frac{1}{\mu!}
$$

並且對所有$t \neq 1$有逐點收斂

$$
\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t) = f_0(t) := (-\delta)^{\mu+1} \int \mathcal{K}^{(\mu+1)}_{(1-t)\delta}(x_1,x_2)\phi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \frac{(1-t)^{\mu}}{\mu!}.
$$

故由勒貝格控制收斂定理,

$$
\int_0^1 f_\epsilon(t) \to \int_0^1 f_0(t)dt,
$$

由分佈的完備性, 我們可推論出極限 $\mathcal{K}_A := \lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{K}_\epsilon$ 在分佈意義下存在。接下來我們檢驗對所有的測試函數 $\phi_2 \in C_0^\infty(Y_2)$和$\phi_1 \in C_0^\infty(Y_1)$, $K$ 滿足

$$
\mathcal{K}_A(\phi_1 \otimes \phi_2) = \langle A\phi_2, \phi_1 \rangle.
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}_A(\phi_1 \otimes \phi_2)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{K}_\epsilon(\phi_1 \otimes \phi_2)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int \mathcal{K}_\epsilon(x_1, x_2)\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)dx_1dx_2\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \iint \left\langle A\left(\epsilon^{-n_2}\psi_2\left(\frac{x_2-\bullet}{\epsilon}\right)\right), \epsilon^{-n_1}\psi_1\left(\frac{x_1-\bullet}{\epsilon}\right)\right\rangle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)dx_1dx_2\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}^{n_2}\\ k_2\in\mathbb{Z}^{n_1}}} \left\langle A\left(\epsilon^{-n_2}\psi_2\left(\frac{h_2k_2-\bullet}{\epsilon}\right)\phi_2(h_2k_2)h_2^{n_2}\right), \epsilon^{-n_1}\psi_1\left(\frac{x_1-\bullet}{\epsilon}\phi_1(h_1k_1)h_1^{n_1}\right)\right\rangle\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \left\langle A\left(\epsilon^{-n_2}\int \psi_2\left(\frac{x_2-\bullet}{\epsilon}\right)\phi_2(x_2)dx_2\right), \epsilon^{-n_1}\int \psi_1\left(\frac{x_1-\bullet}{\epsilon}\right)\phi_1(x_1)dx_1\right\rangle\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \langle A(\check{\psi}_{2,\epsilon} * \phi_2), \check{\psi}_{1,\epsilon} * \phi_1)\rangle\\
&= \langle A\phi_2, \phi_1\rangle.
\end{aligned}
$$

此處我們使用記號 $\check{f}(x) := f(-x)$。由於上述結果對任意 $Y_1 \Subset X_1$ 和 $Y_2 \Subset X_2$ 都成立, 透過分佈的局部化性質, 我們就找到了唯一一個 $\mathcal{K}_A$ 滿足分佈核的要求。定理證畢。

## 5.3. 施瓦茲分佈核定理的註記

施瓦茲分佈核定理在現今數學的發展中扮演著重要的角色。我們簡單敍述一下其重要性, 給讀者參考。在這一講中, 我們在歐式空間定義分佈論, 但其實我們可在流形定義分佈, 甚至可定義取值在向量叢的分佈 (distribution sections); 同樣的施瓦茲分佈核定理在這些範疇內都成立。給定一個流形 $M$ 上的一個偏微分方程式 $A$, 令 $\operatorname{Ker} A$ 爲 $A$ 的所有 $L^2$ 零解的集合 ($Au = 0$, 我們稱 $u$ 爲零解)。令 $P$ 爲這個從 $L^2$ 空間垂直投影到 $\operatorname{Ker} A$ 的算子, 可驗證 $P$ 滿足施瓦茲分佈核定理的條件, 根據施瓦茲分佈核定理, $P$ 存在施瓦茲分佈核 $P(x, y)$。如何了解 $P(x, y)$ 是現代數學非常重要的課題。比如說, 當 $M$ 是複流形(complex manifold) 或科西黎曼流形 (Cauchy-Riemann manifold), 而 $A$ 爲小平邦彥拉普拉斯算子 (Kodaira Laplacian) 或孔恩拉普拉斯算子 (Kohn Laplacian) 時, 這個施瓦茲分佈核 $P(x, y)$ 被稱爲柏格曼核 (Bergman kernel) 或史瑞格研究 (Szegő kernel), 柏格曼核及史瑞格核的研究是現今複幾何及科西黎曼幾何上的重要課題, 這些分佈核的研究和複幾何及科西黎曼幾何上的嵌入問題, 度量穩定性及幾何量化等問題息息相關。好好理解施瓦茲分佈核定理對進一步了解更深入的微局部分析甚至近代數學, 都會有很大的幫助。

## 參考資料

1. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators.* I, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
2. N. Letter, *A tribute of Lars Hörmander*, Mathematical Society, 2013, 24.
3. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Tome I. (French) Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 9. Hermann, Cie., Paris, 1950. 148 pp.
4. F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.
5. W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

—本文作者沈威銓爲中央研究院數學研究所研究助理, 蕭欽玉任職中央研究院數學研究所—