數學傳播 43卷4期, pp. 21-29

# 熔伽利略與勞倫茲變換於一爐

張海潮

牛頓 (1642~1727) 認爲存在絕對 (靜止的) 空間, 和絕對時間, 因此在互以等速 $v$ 運動的兩個慣性系統之間, 對事件所觀察的數據 $(x,t)$ 和 $(x',t')$ 應該服從伽利略變換:

$$x' = x - vt,$$
$$t' = t,$$

式中 $t = t'$ 代表絕對時間, $x, x'$ 分別是兩個系統對同一事件觀察到的位置[1]。

愛因斯坦 (1879-1955) 在 1905 提出的論文[2]否定了絕對空間和絕對時間, 他認爲互以等速運動的兩個慣性系統對事件所觀察的數據 $(x,t)$ 和 $(x',t')$ 應該服從勞倫茲變換[3]。後者與伽利略變換不同之處, 主要在於愛因斯坦提出光速恆定原理[4] 即光速在任一慣性系統中所見均爲常數, 而導致必須放棄絕對時間和空間。本文將在第 3 節嘗試不先假設光速恆定原理, 而從對稱的角度來同時探討伽利略或勞倫茲變換, 最後將此二變換的區分歸結於在慣性系統中, 質點的速度是否有上限, 如果沒有上限, 就是伽利略, 而有上限的情形就是勞倫茲[5]。

## 1. 勞倫茲變換

在此先引李怡嚴教授所著《大學物理學》第二冊 449 頁中的一段課文[6]:

在愛因斯坦發表特殊相對論前不久, 羅倫茲 (Lorentz) 做了一個很有趣的純數學工作, 他發現若在有相對運動的兩個慣性坐標間作下列的轉換:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned}$$

[1] 見牛頓《自然哲學之數學原理》中譯本第 28 頁, 台灣大塊文化出版股份有限公司。

[2] 愛因斯坦論文原名《論動體的電動力學》發表在德國物理學雜誌 Annalen der Physik, 17 卷 891-921 頁, 中譯本請見《愛因斯坦文集, 第二卷》新竹凡異出版社。

[3] 見本文第 1 節。

[4] 見高湧泉《光速爲什麼是固定的?》科學人雜誌 2016 年 6 月號。

[5] 見 Jackson, Classical Electrodynamics, 第三版第 568 頁, 習題 11.1。

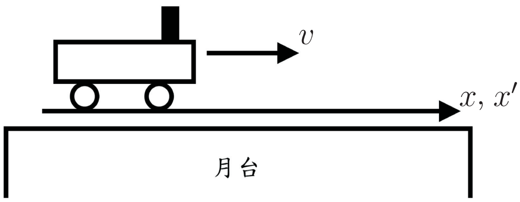
[6]《大學物理學》一書於民國五十七年二月由東華書局出版, 此處所引爲七十六年一月之 14 版, 作者李怡嚴當時爲台灣清華大學物理系教授, 現已退休。

則馬克士威爾方程式不變, 此種時空轉換稱爲羅倫兹轉換 (Lorentz transformation), 因此馬克士威爾方程式具有羅倫兹不變性 (Lorentz invarience); 此式所包含的物理意義, 羅倫兹並不了解, 一直到特殊相對論發表之後, 其中奧妙才爲人所知曉。[7]

以下, 我們將以 LT 代表上述四個式子, 或省略 $y'=y, z'=z$, 只論 $x, x', t, t'$ 的關聯。

愛因斯坦在他 1905 年有關狹義相對論的論文中從相對性原理和光速恆定原理同樣得到 LT 公式 (見註二)。

我們先略介紹 LT 公式中的符號。假設月台和火車是兩個互以等速 $v$ 運動的慣性系統, 並且月台前的 (直線) 鐵軌是月台的 $x$ 軸, 也是火車的 $x'$ 軸, 均以右邊爲正向, 如圖所示:




圖一

假設月台觀察火車的速度爲 $v$ (火車若向右前進 $v$ 爲正, 向左後退 $v$ 爲負), 並且在運動中, 兩個系統的 $y$ 和 $y'$ 軸, $z$ 和 $z'$ 軸均保持平行。進一步, 假設時間 $t=0$, 位置 $x=0, y=0, z=0$ 對應火車的 $t'=0$, 位置 $x'=0, y'=0, z'=0$。結論是, 同一個事件, 若從月台觀察爲 $(x, t, y, z)$, 從火車觀察爲 $(x', t', y', z')$, 則 LT 告訴我們這兩個觀察結果的關聯。[8]

愛因斯坦在他 1905 年的論文中首先認爲聯繫 $(x, y, z, t)$ 和 $(x', y', z', t')$ 的方程本應是線性的, 他說 (見註二、註八):

這些方程顯然應當都是線性的, 因爲我們認爲空間和時間是具有均勻性的。

注意到, 本文一開始所呈現的 LT, 不只是線性的, 並且, 基本上只涉及 $x, t$ 和 $x', t'$ 之間的聯繫, 這樣一個最基本的 LT, 稱爲一個 ($x$ 方向的) 勞倫兹推進 (Lorentz boost) (參考註二、註八), 如此一來, 我們只要決定四個 $v$ 的函數 $a, b, \tau, \xi$:

$$x' = a(v)x + b(v)t, \tag{1.1}$$

$$t' = \tau(v)t + \xi(v)x; \tag{1.2}$$

記得, 我們約定 $(x, t) = (0, 0)$ 對應 $(x', t') = (0, 0)$。

[7]公式中 $x - vt$ 項之 $v$, 代表兩慣性系統互以 $v$ 進行等速運動, 李所著教科書所用的符號是 $u$。式中 $c$ 代表光速, 注意到勞倫兹變換和伽利略變換的差異, 如果 $c$ 以無窮大代入, 兩者相同。特殊相對論 (special relativity) 現在通譯爲狹義相對論, 羅倫兹譯爲勞倫兹。

[8]見張海潮,《狹義相對論箚記》數學傳播 37 卷 1 期, 第 41-47 頁。

## 2. 勞倫茲變換的證明

在介紹愛因斯坦的 LT 證明之前, 先略整理 (1.1), (1.2) 兩式[9]:

**引理** 1: 上節 (1.1) 式可調整爲 $x' = a(v)(x - vt)$, 並且如果月台看火車的速度是 $v$, 火車看月台的速度是 $-v$ 的話, 則 $a(v) = \tau(v)$。

**證明**: 在 (1.1) 中, $x' = 0$ (即火車), 對月台而言是 $x = vt$ 或 $x - vt = 0$, 因此 (1.1) 式其實就是 $x' = a(v)(x - vt)$。

綜觀 (1.1), (1.2) 兩式, $x' = 0$ 代表火車, 此時 $ax + bt = 0$, 即 $v = \frac{x}{t} = -\frac{b}{a}$, 再考慮月台 $x = 0$, 則 $x' = bt,\ t' = \tau t,\ -v = \frac{x'}{t'} = \frac{b}{\tau}$, 所以有 $\frac{b}{\tau} = \frac{b}{a}$ 或 $a(v) = \tau(v)$。 □

接著, 我們將一個基本原則寫成引理 2:

**引理** 2: 若將 (1.1), (1.2) 式中的 $v$ 以 $-v$ 代入, 並且將 $x, t$ 與 $x', t'$ 互換, 就會得到 (1.1), (1.2) 的逆變換。

**證明**: 這只是月台和火車角色的互換, 最簡單的例子是伽利略變換

$$x' = x - vt,$$
$$t' = t,$$

的逆變換是

$$x = x' + vt',$$
$$t = t'.$$

□

**引理** 3: 承引理 1 與引理 2, $a(v) = a(-v)$。

**證明**: $x - vt$ 是月台觀察火車與事件的距離, 乘上 $a(v)$ 表示火車對此一距離的修正倍數, 因此有

$$x' = a(v)(x - vt).$$

由引理 2, 若將 $v$ 以 $-v$ 代, 並且將 $x', t'$ 與 $x, t$ 互換, 便得

$$x = a(-v)(x' + vt'),$$

其中 $x' + vt'$ 是火車觀察月台與事件的距離, 乘上 $a(-v)$ 表示月台對此一距離的修正倍數, 由於對稱, 這兩個修正倍數必須相等, 即 $a(-v) = a(v)$。 □

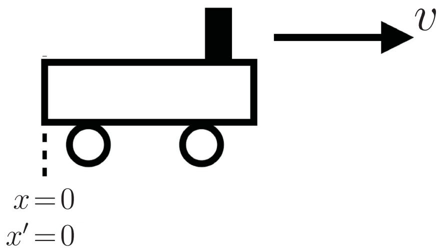
---

[9] 以下的證明, 基本上, 遵照愛因斯坦 1905 年論文的想法, 但是作了適當的簡化

因此, 我們可以稍稍簡化 LT 的形式如下[10]

$$x' = a(v)(x - vt), \tag{2.1}$$
$$t' = a(v)t + \xi(v)x, \tag{2.2}$$
$$a(v) = a(-v). \tag{2.3}$$

愛因斯坦在光速恆定的假設下, 參考下面的情形 (如圖二)




圖二

火車尾 $x' = 0$ 在 $t = t' = 0$ 時通過月台的原點 $x = 0$。在火車尾的旅客在 $t' = 0$ 時從 $x' = 0$ 向火車頭射出一束光, 光速爲 $c$。這束光到達車頭後, 被車頭的鏡子反射回到車尾。

假設月台觀察火車的長度爲 $l$, 則因光速恆定, 月台紀錄光的行程如下:

(i) 光從車尾射出的事件:

$$(x, t) = (0, 0) = (x', t').$$

(ii) 光到達車頭的事件:

$$(x, t) = \left(l + v \cdot \frac{l}{c - v}, \frac{l}{c - v}\right),$$

即在月台的時間 $\frac{l}{c-v}$ 到達車頭, 而車尾走到 $v \cdot \frac{l}{c-v}$, 車頭走到 $l + v \cdot \frac{l}{c-v}$。

(iii) 光反射回到車尾的事件:

$$(x, t) = \left(v \cdot (\frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v}), \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v}\right),$$

事件 (i) 對應 $t' = 0$, 事件 (ii) 對應 $t' = a\frac{l}{c-v} + \xi\left(l + v\frac{l}{c-v}\right)$, 事件 (iii) 對應 $t' = a\left(\frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v}\right) + \xi\left(v \cdot \left(\frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v}\right)\right)$。因爲對火車而言, 事件 (i), (ii) 的時間差必等於事件

[10] 此時尚未引入光速恆定原理的假設, 因此在 $a(v) = 1$, $\xi(v) = 0$ 的情形, 就是伽利略變換。

(ii), (iii) 的時間差, 所以有

$$a\left(\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}\right)+\xi\left(v\left(\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}\right)\right)-\left(a\frac{l}{c-v}+\xi\left(l+v\frac{l}{c-v}\right)\right)$$
$$=a\frac{l}{c-v}+\xi\left(l+v\frac{l}{c-v}\right);$$

化簡

$$\begin{aligned}(a+\xi v)\cdot\frac{2c}{c^2-v^2}&=2\left(\tfrac{a}{c-v}+\xi+\xi\tfrac{v}{c-v}\right)\\&=2\cdot\frac{a(c+v)+\xi(c^2-v^2)+\xi cv+\xi v^2}{c^2-v^2}\\&=2\cdot\frac{ac+av+\xi c^2+\xi cv}{c^2-v^2},\end{aligned}$$

得到

$$(a+\xi v)c=ac+av+\xi c^2+\xi cv,$$

因此有

$$\xi=-\frac{v}{c^2}a.$$

因此 LT 變成

$$x'=a(x-vt), \tag{2.4}$$
$$t'=a(t-vx/c^2). \tag{2.5}$$

在 (2.3) 式中, 若 $v$ 以 $-v$ 代, 便會得到

$$x'=a(-v)(x+vt).$$

將 $x,t$ 與 $x',t'$ 互換得 LT 的逆轉換

$$x=a(-v)(x'+vt').$$

根據引理 2, $a(v)=a(-v)$, 因此[11]

$$x=a(v)(x'+vt'). \tag{2.3'}$$

另一方面, 從 (2.3), (2.4) 解 $x$ (由克拉馬公式) 得:

$$x=\begin{vmatrix}x' & -a(v)v\\ t' & a(v)\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}a(v) & -a(v)v\\ -a(v)v/c^2 & a(v)\end{vmatrix}=\frac{x'+vt'}{a(v)\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}.$$

[11]請參考本節之引理 3。

與 (2.3') 比較, 得 $a(v)=\dfrac{1}{a(v)(1-v^2/c^2)}$, 亦即[12]

$$a(v)=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

我們注意到 (2.3), (2.4) 的結果, 因爲是在光速恆定的假設下得出, 絕對時間和絕對空間均不存在

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$
$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

上述基本上是愛因斯坦在 1905 論文 (見註二) 中的證明, 看來有些繁複, 到了 1916 年, 愛因斯坦已經完成了廣義相對論的基礎, 此時他爲一般讀者寫了一本科普書《相對論入門》[13]在這本書的附錄一, 愛因斯坦補了一段《勞倫茲變換的簡單推導》, 主要內容如下:

因爲光速恆定, 因此月台所見光的行徑 $x-ct=0$ 和火車所見 $x'-ct'=0$ 是一樣的, 我們不妨把 $x,t$ 和 $x',t'$ 換變數爲 $x-ct, x+ct$ 和 $x'-ct', x'+ct'$, 所以光速恆定告訴我們

$$x'-ct'=\lambda(x-ct), \tag{2.6}$$
$$x'+ct'=\mu(x+ct). \tag{2.7}$$

將 (2.6), (2.7) 兩式相加除以 2 得

$$x'=\frac{\lambda+\mu}{2}x-\frac{\lambda-\mu}{2}ct.$$

將 (2.7), (2.6) 兩式相減除以 $2c$ 得

$$t'=\frac{\lambda+\mu}{2}t-\frac{\lambda-\mu}{2c}x.$$

令 $a=\frac{\lambda+\mu}{2},\ b=\frac{\lambda-\mu}{2}c$ 則有

$$x'=ax-bt,$$
$$t'=at-\frac{b}{c^2}x.$$

由引理 1 知 $b=av$, 所以

$$x'=a(x-vt),$$
$$t'=a(t-\frac{v}{c^2}x).$$

12在 (2.1) 式中, $a>0$, 所以此處 $a$ 取正號 $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$。

13英文名爲《Relativity:The Special and the General Theory》中譯《相對論入門》譯者李精益, 台灣商務印書館。

此與 (2.4), (2.5) 一致, 因此同樣引入 (2.3') 即得 $a=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 而證出 LT 公式[14]。

## 3. 不用光速恆定來思考 LT 的證明

本節不用光速恆定, 但是要用到空間、時間的對稱性, 不防假設 LT 是下面的形式:

$$x' = a(v)(x-vt), \tag{3.1}$$

$$t' = a(v)t - d(v)x, \tag{3.2}$$

其中 $a(v)=a(-v)$, $(x,t)$ 和 $(x',t')$ 分別是月台和火車觀察某一事件的數據, 而火車的 $x'$ 軸和月台的 $x$ 軸重合並同樣指向右方, $v$ 是火車對月台的速度, 前進向右行駛 $v>0$, 後退 (向左) 行駛 $v<0$, 如圖一。

從 (3.1), (3.2) 以克拉瑪公式解 $t$ 得

$$t = \begin{vmatrix} a & x' \\ -d & t' \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & -av \\ -d & a \end{vmatrix} = \frac{at'+dx'}{a^2-avd}, \tag{3.3}$$

其中 $a=a(v),\ d=d(v)$。

又由引理 2, 將 (3.2) 式 $v$ 以 $-v$ 代入, 得 $t'=a(-v)t-d(-v)x$, 再將 $x,t$ 與 $x',t'$ 互換得 $t=a(-v)t'-d(-v)x'$, 與 (3.3) 比較 (且 $a(-v)=a(v)$) 得

$$a(v)^2 - a(v)vd(v) = 1, \tag{3.4}$$

$$d(v) = -d(-v). \tag{3.5}$$

我們將上面的討論暫時總結爲引理 4:

**引理** 4: 在不假設光速恆定原理下, 月台與火車兩個慣性系統之間的變換

$$x' = a(v)(x-vt),$$

$$t' = a(v)t - d(v)x,$$

滿足 $a(v)=a(-v),\ a>0,\ d(-v)=-d(v)$ 及 $a(v)^2-a(v)vd(v)=1$。

我們注意, $a(v)=1,\ d(v)=0$ 時就是伽利略變換, 而 $a=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ d=\frac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 是勞倫茲變換, $c$ 是光速。

以下討論 (3.1), (3.2) 的變換之下, 速度的轉換。假設一質點對火車以 $u'>0$ 作等速運

[14] 引入變數 $x-ct, x+ct$ 和 $x'-ct', x'+ct'$ 大大化簡 LT 公式的證明, 並可以看出光速恆定原理所扮演的角色。此一想法應爲愛因斯坦原創, 並見註八。

動, 對月台以 $u>0$ 作等速運動, 從 $(0,0)$ 走到 $(x,t)$ 及 $(x',t')$, 則

$$u'=\frac{x'}{t'}=\frac{x-vt}{t-\frac{d}{a}x}=\frac{\frac{x}{t}-v}{1-\frac{d}{a}\frac{x}{t}}=\frac{u-v}{1-\frac{d}{a}u},$$

或

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{d}{a}u'}. \tag{3.6}$$

**引理** 5: 若 $\frac{d}{a}=\frac{d(v)}{a(v)}\neq 0$, 則 $u'$ 必有上限。

**證明**: 若 $u'\to\infty$, 則

$$u=\frac{1+v/u'}{1/u'+d/a}\to\frac{a}{d},$$

其中 $a/d$ 是定值, 這表示雖然火車觀察質點的速度 $u'$ 越來越大, 但月台所見卻是接近 $a(v)/d(v)$, 與常識違背。 □

根據上述, 我們有下面的結論:

結論 1: 若 $u'$ 無上限, 則 $d(v)/a(v)=0$ 即 $d(v)=0$, 由 (3.4) 得 $a=1$, 此即伽利略變換。

結論 2: 若 $d/a\neq 0$, 則質點的速度有上限。

如果對某一個慣性系統 (如月台) 所觀察到質點的速度, 有一最小上界 $L$, 則 $L$ 也是其他慣性系統 (如火車) 所觀察到質點速度的最小上界。現仍假設火車與月台的 $x'$ 軸和 $x$ 軸重合且指向右方, 火車對月台的速度 $v>0$, 假設 $u'>0$, $u>0$, 則由 (3.6):

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{d}{a}u'}.$$

注意到, $u$ 對 $u'$ 的微分

$$\frac{du}{du'}=\frac{(1+\frac{d}{a}u')-(u'+v)\frac{d}{a}}{(1+\frac{d}{a}u')^2}=\frac{1-v\frac{d}{a}}{(1+\frac{d}{a}u')^2}.$$

但是由 (3.4), $a^2-avd=1$, 所以 $1-vd/a=1/a^2>0$, 換句話說, $u$ 對 $u'$ 是嚴格遞增, 亦即當 $u'\to L$ 時, $u\to L$, 因此取極限後 (3.6) 變成

$$L=\frac{L+v}{1+\frac{d}{a}L},$$

或 $L+\frac{d}{a}L^2=L+v$, 因此得出 $d/a=v/L^2$。將此式代入 $a^2-avd=1$, 得

$$a^2-\frac{a^2v^2}{L^2}=1,$$

或 $a=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/L^2}}$, 因此 (3.1), (3.2) 變成

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/L^2}}, \tag{3.7}$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{L^2}x}{\sqrt{1-v^2/L^2}}. \tag{3.8}$$

## 4. 結論

愛因斯坦在 1905 年 (見註二) 提出光速恆定原理 (The principle of the constancy of the velocity of light) 並且從此出發得到 LT 的公式

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

當時, 光速恆定只是一個假說, 一直要到 1964 年才在瑞士 CERN 實驗室證實 (見註五, 523 頁), 而此一光速值, 現在公認爲 299,792,458 公尺每秒。值得注意的是 1983 年的十七屆國際度量衡大會決議採用光在真空中於 299,792,458 分之一秒時間間隔所行經的距離爲 1 公尺, 在公尺的最新定義下, 等於是宣告光速恆定。

本文在第 3 節嘗試先不假設光速恆定, 來處理 $(x,t)$ 和 $(x',t')$ 變換的可能形式, 最後得到如果在慣性系中質點的速度無上限的話, 則有伽利略變換:

$$x'=x-vt,$$

$$t'=t.$$

另一方面, 如果有上限, 且最小上限是 $L$, 則有勞倫茲變換:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/L^2}},$$

$$t'=\frac{t-vx/L^2}{\sqrt{1-v^2/L^2}},$$

但是需要從實驗上確定 $L$ 就是光速 $c$。

在證明的過程中, 有引理 1 至引理 5, 這些引理或多或少引入了基於對稱出發的直觀, 因此也許不是邏輯最嚴謹的工作, 但是希望能用一個另類的視野來聯繫伽利略和勞倫茲。

—本文作者爲台大數學系退休教授—