數學傳播　43卷3期, pp. 99-104

從一個三角形全等定理引申出的定理

趙國瑞

《數學傳播》第三十九卷第四期發表了趙國瑞先生的文章《善待學生的提問》, 文中提到了一個判定三角形全等的定理「邊角高」定理：有一邊及其對角以及該邊上的高分別對應相等的兩個三角形全等。從這個定理不難發現, 滿足「邊角高」定理的兩個三角形的面積相等。反之, 如果兩個三角形滿足「一邊相等」和「面積相等」, 可以推出這兩個三角形相等邊上的高相等。由此我們得到「邊角高」定理的一個推論：

推論1：有一邊及其對角對應相等的兩個三角形, 如果這兩個三角形的面積相等, 那麼這兩個三角形全等。

三角形的邊和角是三角形的重要元素。而三角形的面積也是與三角形有關的一個重要概念, 我們也可以把它作爲三角形的一個重要元素。由面積我們自然想到周長這個重要概念。接下來我們來探討滿足「一邊及其對角對應相等」的兩個三角形的周長相等, 那麼這兩個三角形是否全等?

如圖1, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $BC=EF$, $\angle A=\angle D$, $AB+BC+AC=DE+EF+DF$。

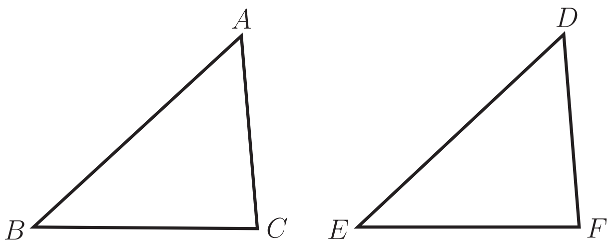

圖1

設 $\angle A=\angle D=\alpha$, $BC=EF=m$。$\therefore$ $AB+AC=DE+DF$。

在 $\triangle ABC$ 中, 由餘弦定理, 得 $m^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha$。

在 $\triangle DEF$ 中, 由餘弦定理, 得 $m^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cos\alpha$。

$\therefore\ AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\alpha = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cos\alpha$。

即 $(AB+AC)^2-2AB\cdot AC-2AB\cdot AC\cos\alpha=(DE+DF)^2-2DE\cdot DF-2DE\cdot DF\cos\alpha$。

由 $AB + AC = DE + DF$, 得 $(AB + AC)^2 = (DE + DF)^2$。

$\therefore\ -2AB \cdot AC - 2AB \cdot AC \cos\alpha = -2DE \cdot DF - 2DE \cdot DF \cos\alpha$。

即 $-2AB \cdot AC(1+\cos\alpha) = -2DE \cdot DF(1+\cos\alpha)$。

顯然 $1 + \cos\alpha$ 是正數, $\therefore\ AB \cdot AC = DE \cdot DF$。

由 $\begin{cases} AB + AC = DE + DF \\ AB \cdot AC = DE \cdot DF \end{cases}$ 容易推出 $\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \end{cases}$ 或 $\begin{cases} AB = DF \\ AC = DE \end{cases}$。

根據「邊邊邊」得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 或 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$。

由此我們再得到一個推論：

推論2：有一邊及其對角對應相等的兩個三角形, 如果這兩個三角形的周長相等, 那麼這兩個三角形全等。

綜合推論 1 和推論 2, 我們可以得到一個判定三角形全等的定理：

定理1：有一邊及其對角對應相等的兩個三角形, 如果這兩個三角形的周長 (或面積) 相等, 那麼這兩個三角形全等。

在證明推論 2 的過程中, 我們發現, 滿足「一邊及其對角對應相等」的兩個三角形, 兩個三角形的周長相等的本質是另兩邊的和相等, 由此我們得到推論 2 的一個推論：

推論3：有一邊及其對角對應相等的兩個三角形, 如果另兩邊的和相等, 那麼這兩個三角形全等。

由和我們自然想到差, 接下來我們探討滿足「一邊及其對角對應相等」的兩個三角形, 如果另兩邊的差相等, 那麼這兩個三角形是否全等?

如圖1, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $BC = EF$, $\angle A = \angle D$, $AB - AC = DE - DF$。

設 $\angle A = \angle D = \alpha$。

易得 $AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\alpha = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cos\alpha$。

即 $(AB-AC)^2+2AB\cdot AC-2AB\cdot AC\cos\alpha=(DE-DF)^2+2DE\cdot DF-2DE\cdot DF\cos\alpha$。

由 $AB-AC=DE-DF$, 得 $(AB-AC)^2=(DE-DF)^2$。

$\therefore\ 2AB\cdot AC-2AB\cdot AC\cos\alpha=2DE\cdot DF-2DE\cdot DF\cos\alpha$。

即 $2AB\cdot AC(1-\cos\alpha)=2DE\cdot DF(1-\cos\alpha)$。

顯然 $1-\cos\alpha$ 是正數, $\quad\therefore\ AB\cdot AC=DE\cdot DF$。

由 $\begin{cases}AB-AC=DE-DF\\ AB\cdot AC=DE\cdot DF\end{cases}$ 容易推出 $\begin{cases}AB=DE\\ AC=DF\end{cases}$。

根據「邊邊邊」得 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$。

由此我們得到推論 3 的一個推論：

推論 4： 有一邊及其對角對應相等的兩個三角形, 如果另兩邊的差相等, 那麼這兩個三角形全等。

由和、差我們自然又想到積、商。接下來我們探討滿足「一邊及其對角對應相等」的兩個三角形, 如果另兩邊的積相等, 那麼這兩個三角形是否全等?

我們可以仿照證明推論 2 的方法進行探討, 不過比較麻煩。聯想到三角形的面積公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ (三角形的兩邊爲 a,b, 兩邊的夾角爲 $\angle C$), 我們發現滿足「一邊及其對角對應相等」的兩個三角形, 另兩邊的積相等 $\Leftrightarrow$ 兩個三角形的面積相等。由此我們又得到一個推論：

推論 5： 有一邊及其對角對應相等的兩個三角形, 如果另兩邊的積相等, 那麼這兩個三角形全等。

下面我們來探討滿足「一邊及其對角對應相等」的兩個三角形, 如果另兩邊的商相等, 那麼這兩個三角形是否全等?

利用相似三角形的知識不難判定這兩個三角形相似。再根據一邊相等, 立刻得到這兩個三角形全等。由此我們又得到一個推論：

推論 6： 有一邊及其對角對應相等的兩個三角形, 如果另兩邊的商相等, 那麼這兩個三角形全等。

綜合推論 3、推論 4、推論 5 和推論 6, 我們可以得到一個判定三角形全等的定理：

定理 2： 有一邊及其對角對應相等的兩個三角形, 如果另兩邊的和 (或差或積或商) 相等, 那麼這兩個三角形全等。

「邊角高」定理涉及到了三角形的一個重要概念：三角形的高, 它是三角形的重要線段。除

了三角形的高, 還有另外兩條重要的線段 : 三角形的中線和三角形的角平分線。接下來我們探討滿足「一邊及其對角對應相等」的兩個三角形, 如果該邊上的中線相等, 那麼這兩個三角形是否全等?

如圖 2, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $BC=EF$, $\angle BAC=\angle EDF$, AM 是 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上的中線, DN 是 $\triangle DEF$ 的 EF 邊上的中線, 且 $AM=DN$。

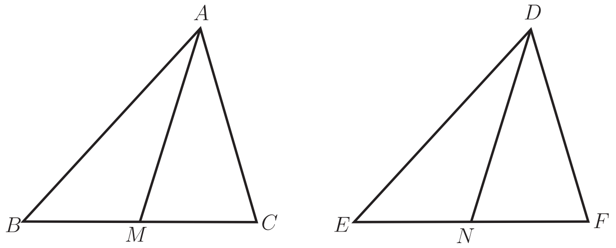

圖2

由三角形的中線定理 (又稱阿波羅尼奧斯定理), 得

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2),\quad DE^2+DF^2=2(DN^2+EN^2).$$

易知 $BM=EN$, 且 $AM=DN$, $\quad\therefore\ AB^2+AC^2=DE^2+DF^2$。

設 $\angle BAC=\angle EDF=\alpha$。

易得 $AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha=DE^2+DF^2-2DE\cdot DF\cos\alpha$。

$$\therefore\ AB\cdot AC\cos\alpha=DE\cdot DF\cos\alpha.$$

當 $\cos\alpha\neq 0$ 即 $\alpha\neq 90^\circ$ 時, 有 $AB\cdot AC=DE\cdot DF$。

由 $\begin{cases} AB^2+AC^2=DE^2+DF^2 \\ AB\cdot AC=DE\cdot DF \end{cases}$ 容易推出 $\begin{cases} AB=DE \\ AC=DF \end{cases}$ 或 $\begin{cases} AB=DF \\ AC=DE \end{cases}$。

根據「邊邊邊」得 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ 或 $\triangle ABC\cong\triangle DFE$。

當 $\cos\alpha=0$ 即 $\alpha=90^\circ$ 時, 由於無法推出 $AB\cdot AC=DE\cdot DF$, 因而也就無法推出 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 全等。

事實上, 斜邊相等的兩個直角三角形滿足「一邊及其對角對應相等且該邊上的中線相等」, 顯然這樣的兩個直角三角形並不一定全等。

由此我們再得到一個推論 :

推論 7 : 有一邊及其對角 (非直角) 以及該邊上的中線分別對應相等的兩個三角形全等。

接下來我們探討滿足「一邊及其對角對應相等」的兩個三角形, 如果該邊所對角的角平分線相等, 那麼這兩個三角形是否全等?

這個問題有一定難度, 用上面的方法探討比較困難。注意到已知條件中有角平分線這個條件, 我們可以通過構造三角形的外接圓的辦法進行探討。

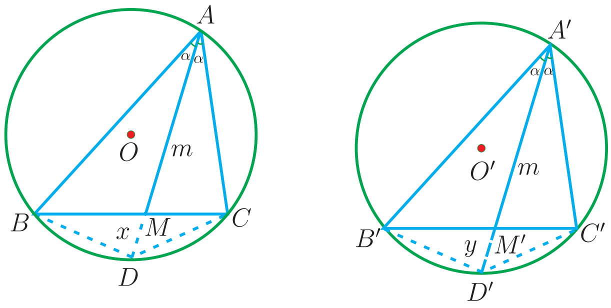

圖 3

如圖 3, AM 和 $A'M'$ 分別爲 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的角平分線, $\angle BAC=\angle B'A'C'$, $BC=B'C'$, $AM=A'M'$。分別作 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的外接圓 $\odot O$ 和 $\odot O'$, AM 和 $A'M'$ 的延長線分別交 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 於點 D, D', 連結 $BD, CD, B'D', C'D'$。由 $\angle BAC=\angle B'A'C'$ 和 $BC=B'C'$ 易知 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 是等圓。設 $\angle BAM=CAM=\angle B'A'M'=\angle C'A'M'=\alpha$。由圓周角定理易知 $\angle DBC=\angle DCB=\angle D'B'C'=\angle D'C'B'=\alpha$。設 $AM=A'M'=m$。由於 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 是等圓, 所以 $BD=B'D'$。設 $BD=B'D'=n$, $DM=x$, $D'M'=y$。易證 $\triangle BDM\sim\triangle ADB$, $\therefore\ \dfrac{BD}{AD}=\dfrac{DM}{BD}$, 即 $BD^2=AD\cdot DM$, $n^2=x(m+x)$。同理 $n^2=y(m+y)$。$\therefore\ x(m+x)=y(m+y)$。即 $(x-y)(m+x+y)=0$。由於 $m+x+y$ 是正數, 因此 $x-y=0$, 即 $x=y$。$\therefore\ AD=A'D'$。$\therefore\ \angle ABD=\angle A'B'D'$ 或 $\angle ABD=\angle A'C'D'$。進一步可以推出 $\angle ABC=\angle A'B'C'$ 或 $\angle ABC=\angle A'C'B'$。根據「角角邊」可知, 滿足條件的兩個三角形全等。由此我們再得到一個推論：

推論 8：有一邊及其對角以及該邊所對角的角平分線分別對應相等的兩個三角形全等。

綜合「邊角高」定理和推論 7、推論 8, 我們可以得到一個判定三角形全等的定理：

定理 3：有一邊及其對角 (非直角) 對應相等的兩個三角形, 如果該邊上的高 (或中線) 或該邊所對角的角平分線分別對應相等, 那麼這兩個三角形全等。

如果再注意到直角三角形正好是滿足「有一邊及其對角對應相等的兩個三角形」, 根據上面三個定理, 不難得到下面三個對應的推論：

推論9：斜邊相等的兩個直角三角形, 如果這兩個直角三角形的周長 (或面積) 相等, 那麼這兩個直角三角形全等。

推論10：斜邊相等的兩個直角三角形, 如果兩直角邊的和 (或差或積或商) 相等, 那麼這兩個直角三角形全等。

推論11：斜邊相等的兩個直角三角形, 如果斜邊上的高或直角的角平分線分別對應相等, 那麼這兩個直角三角形全等。

以上我們從「邊角高」定理出發, 通過聯想與「邊角高」定理中的條件相似的條件, 得到了一系列與之有關的定理和推論, 豐富了「邊角高」定理的內涵與外延, 有助於我們更好地理解「邊角高」定理。這也啟發我們, 在學習數學定理時不能滿足於定理本身, 要注意聯想與定理中的條件、結論、數字特徵、圖形特徵等相似的命題進行探索, 從而豐富定理的內涵與外延, 更好地把握定理本身。

參考文獻

1. 趙國瑞。善待學生的提問。數學傳播季刊, 39(4), 87-92, 2015。

—本文作者任教中國湖北省襄陽市襄州區黃集鎮初級中學—