數學傳播 43卷3期, pp. 95-98

對著名外森比克不等式幾個加强的代換簡證

李發勇

1919 年數學家外森比克提出了一個著名的幾何不等式:

在 $\triangle ABC$ *中, 三邊長分別是* a、b、c, *面積記爲* S, *則* $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$.

這個優美的不等式, 數學上稱爲外森比克不等式, 曾作爲 1961 年國際數學競賽題, 圍繞它有許多推廣和加強, 這裏對幾個著名的加強不等式給出一種新的代換證明。

引理: 已知 $\triangle ABC$ 各邊長爲 a、b、c, 記面積爲 S, 半周長爲 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$, 記 $m=\sqrt{a(p-a)}$, $n=\sqrt{b(p-b)}$, $l=\sqrt{c(p-c)}$, 則以 m、n、l 之長的線段可以組成三角形, 記爲 $\triangle A'B'C'$, 面積記爲 Δ, 且 $S=2\Delta$.

證明: (1) 由於

$$\begin{aligned}
m^2+n^2&=a(p-a)+b(p-b)\\
&=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ac-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}b^2\\
&=\left(\frac{1}{2}ac+\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}c^2\right)+\left(\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{2}a^2+ab-\frac{1}{2}b^2\right)\\
&=\frac{c}{2}(a+b-c)+\frac{1}{2}(a+c-b)(b+c-a)
\end{aligned}$$

$$\text{又}\quad \because\quad a+b>c,\quad a+c>b,\quad b+c>a.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(a+c-b)(b+c-a)>0.$$

$$m^2+n^2>\frac{c}{2}(a+b-c)=\left(\sqrt{c(p-c)}\right)^2=l^2.$$

$$\because\quad m>0,\ n>0,\ \therefore\ (m+n)^2>m^2+n^2.$$

$$\therefore\ (m+n)^2>l^2,\quad \therefore\ m+n>l.$$

$$\text{同理,}\qquad m+l>n,\ n+l>m.$$

即以 m、n、l 之長的線段可以組成三角形。

(2) 海倫公式 (Heron's Formula): $\triangle ABC$ 的三邊長是 a、b、c, 面積記爲 S, 則 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 其中 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$. (見現行人教版高中《數學》必修五)

將海倫公式整理, 得

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4. \tag{1}$$

在 $\triangle A'B'C'$ 中, 由海倫公式, 得:

$$16\Delta^2 = 2m^2n^2 + 2n^2l^2 + 2m^2l^2 - m^4 - n^4 - l^4. \tag{2}$$

將 (2) 式通過邊長代換, 得:

$$\begin{aligned}16\Delta^2 = &\, 2ab(p-a)(p-b) + 2bc(p-b)(p-c) + 2ac(p-a)(p-c)\\ &-a^2(p-a)^2 - b^2(p-b)^2 - c^2(p-c)^2.\end{aligned}$$

將上式右端展開, 整理得:

$$16\Delta^2 = \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{2}b^2c^2 + \frac{1}{2}a^2c^2 - \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}c^4,$$

即

$$64\Delta^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4. \tag{3}$$

比較 (1)、(3) 兩式, 得 $S = 2\Delta$.

下面利用上述代換證明幾個著名幾何不等式

例1: (費–哈不等式) 設 $\triangle ABC$ 的三邊長爲 a、b、c, 面積記爲 S, 則 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, 當且僅當 $\triangle ABC$爲正三角形時, 等號成立。

證明: 在 $\triangle ABC$ 中, 由外森比克不等式, 得 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

同樣, 在 $\triangle A'B,C'$ 中, 滿足

$$m^2 + n^2 + l^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta. \tag{4}$$

將不等式 (4) 根據引理代換, 得 $a(p-a)+b(p-b)+c(p-c) = 2\sqrt{3}S$,

整理, 得 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$,

這就是外森比克不等式的一種加強即費–哈不等式。

例2: (費–哈不等式的一種加強) 設 $\triangle ABC$ 的三邊長爲 a、b、c, 面積記爲 S, 則 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 2R$ $(R \geq 0)$, 當且僅當 $\triangle ABC$ 爲正三角形時, 等號成立。

證明: 在 $\triangle ABC$ 中, 費–哈不等式爲

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

同樣, $\triangle A'B'C'$ 中, 滿足

$$m^2+n^2+l^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta+(m-n)^2+(n-l)^2+(l-m)^2. \tag{5}$$

將不等式 (5) 根據引理代換並整理, 得

$$a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)=2\sqrt{3}S+R. \tag{6}$$

其中

$$R=\left(\sqrt{a(p-a)}-\sqrt{b(p-b)}\right)^2+\left(\sqrt{b(p-b)}-\sqrt{c(p-c)}\right)^2+\left(\sqrt{c(p-c)}-\sqrt{a(p-a)}\right)^2.$$

將不等式 (6) 左端展開並整理, 得

$$\begin{aligned} 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2 &\geq 4\sqrt{3}S+2R \\ \therefore\ -a^2-b^2-c^2 &\geq 4\sqrt{3}S-2ab-2bc-2ca+2R, \end{aligned} \tag{7}$$

將不等式 (7) 兩邊加上 $2a^2+2b^2+2c^2$, 再配方得

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2R. \tag{8}$$

當 $\triangle ABC$ 爲正三角形時, $2R=0$, 不等式 (8) 取等號。

我們將不等式 (8) 看作費–哈不等式的一種加強。

例3: (Tsintsifas不等式) 設 $\triangle ABC$ 的三邊長爲 a、b、c, 面積記爲 S, 則 $ab+bc+ca \geq 4\sqrt{3}S$. 當且僅當 $\triangle ABC$ 爲正三角形時取等號。

證明: 在 $\triangle A'B'C'$ 中, 由外森比克不等式, 得

$$m^2+n^2+l^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta. \tag{9}$$

由於

$$\begin{aligned} m^2+n^2+l^2 &= a(p-a)+b(p-b)+c(p-c) \\ &= ab+bc+ca-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

將不等式 (9) 利用引理代換, 得

$$ab+bc+ca-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \geq 4\sqrt{3}\times\frac{S}{2}=2\sqrt{3}S.$$

即

$$2ab + 2bc + 2ca - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S. \tag{10}$$

在 $\triangle ABC$ 中,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S. \tag{11}$$

(10)、(11) 兩式相加, 得 $2ab + 2bc + 2ca \geq 8\sqrt{3}S$.

所以 $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S$.

數學上, 稱 Tsintsifas 不等式是外森比克不等式的另一種加強。

數學是鍛鍊思維的體操, 對同一問題採取不同角度、不同方式進行探究, 可以開闊人的思路, 促進創新思維的發展。

—本文作者任教中國四川省巴中市巴州區大和初中—