

民國 57 年國中暫行課程標準 數學教科書之初探 (1968~1971)(上)

陳玟樺

摘要: 民國 57 年, 九年國民義務教育正式實施, 「集合論」首次納入中小學數學教科書。然而, 初版教科書實施後不久即進行修訂, 較為特別是, 修訂本中不僅「大幅地」縮減了「集合論」內容, 也改變不少原來講述數學概念的方法, 呈現出「即使同一單元主題, 前後版本內容卻大異其趣」現象。本研究採用課程的歷史探究和內容分析方法, 透過官方文件和 57 年國中數學暫行課程標準編修教科書等為分析, 期對此時數學課程改革的背景脈絡和教科書內容展演情形有一初步理解與探究。回顧我國數學課程發展史不僅有助於理解數學課程發展的軌跡, 亦有助於反思及擘劃我國未來數學教育發展之方向。

關鍵詞: 課程標準、數學教育。

壹、前言

民國 57 年, 我國實施九年國民義務教育, 當時受美國新數學運動影響, 各學習階段開展以集合論為基礎的數學課程變革, 集合論教材首次納入中小學課程, 可謂創舉。然 57 年國中數學教科書「初版」, 在使用後短短不到三年, 旋又進行了內容改版, 是為「修訂版」, 一般說來, 基於教材內容越趨完善之目的, 修訂乃屬必要, 惟此次修訂較為不同是, 在另成立有修訂小組下, 「修訂版」大幅度地刪減了集合論在教材中的地位, 呈現「同一課程標準下, 展演有兩種具明顯差異的數學教科書內容」樣貌。此一轉折, 正也為 61 年頒訂新的國中數學課程標準做出預備。然而, 此前後三年, 為何有如此轉變? 是在什麼樣的背景脈絡下發生? 數學課程目標又是什麼? 數學教科書的編審者和修訂者對發展以集合論的數學教材又有什麼觀點? 對於同一數學單元, 以「集合論」為基礎來發展概念及不以「集合論」為基礎來發展概念又有何不同樣貌? 不同版次的數學教科書單元編排有何差異或特色? 都是本研究意圖進行探究的重點。

林碧珍 (2010) 指出, 臺灣數學課程發展與演變至今已超過五十餘年, 數學課程的演變歷史是臺灣數學教育歷史上的重要紀事, 然目前甚為缺乏回顧性論文。有鑑於此, 本文基於前述研究旨趣, 以民國 57 年為探究數學課程史的起點, 不僅在於此為我國正式實施九年國民義務教育、

深具教育改革史上重要意義外，此時期我國數學教育的「樣貌」，正從國際潮流和國內社會期待之間來回「試煉」、「塑形」，對此一時期數學課程變革的背後脈絡進行理解，實富意義。

本研究採課程的歷史探究、內容分析，主要探討相關官方課程文件、依57年國中數學暫行課程標準所編修之教科書發展情形。此外，為對兩版本數學教科書之差異有更深刻理解，本研究擬以第一冊之「有理數」單元為例，進一步探查在同一單元名稱下、不同版次在內容上之鋪陳情形，以及發展其概念上的脈絡變動，以期更能理解課程進行修訂之意義。至於選定「有理數」單元的主因在於：依據57年國中數學暫行課程標準規定，國小畢業生在直升國中後，其將學習的第一冊單元有六，包括：「數的記法」、「集合的概念」、「點、線、平面、空間的認識」、「整數」、「分數」，以及「有理數」。在這些單元中，除了「點、線、平面、空間的認識」為「幾何」內容外，其餘皆為「數與量」範疇，「數與量」本是國中階段學習數學的基礎，對「數與量」有充分的瞭解與掌握後，更能裨益於其他數學內容（代數、幾何、統計與機率）的學習。在當時，小學階段的學生須學習「以十為底的記數法」，故國中階段雖編有「數的記法」，但為加深性質，對國一新生而言非完全陌生；「整數」和「分數」在小學階段亦為重要課程之一，國一新生也已有相當接觸；「集合的概念」雖是新的知識，但內容主要在於專有名詞、集合的表示方法之介紹，尚未進一步發展有較深之數學概念；至於「有理數」單元，則涉及「數系」擴充的處理，此對甫上國一新生而言，誠為一嶄新的數學知識內容，於此，本研究以為，教科書中對此「有理數」相關內容之說明和其說明的方式，對國一新生於日後的數學學習甚具有關鍵和導引作用，故值得進一步探究。

一般來說，在小學階段，學「數系」是從自然數系開始，自然數系之後便是正有理數系（分數），到了國中再推廣至負數，而有了整數之全體，然後自整數再進一步推廣，便是所有的有理數。數量之研究本起源於數，當數系更進一步發展時，整數被視為有理數的子集，有理數包含於實數中，連續的量即是以實數來表示，至於實數則可以被進一步廣義化成複數，實數與複數堪稱是人類處理量的問題的基本工具，是數學的基礎與根源所在。基於此，本研究探討57年國中數學暫行課程標準及教科書發展同時，將進一步以初版和修訂版中「有理數」單元為例，以期更能理解兩版次數學課程內容變動情形。

貳、57年暫行課程標準制訂之背景脈絡分析

一、數學課程改革背景脈絡之分析

1957年（民國46年），蘇俄搶先成功地發射一顆人造衛星Sputnik，向為近代美國教育主流地位的進步主義、兒童中心之教育，被抨擊已難適應時代下激烈的科學競爭需求，由進步主義過渡到本質主義發展歷程與其教育哲學的交替，變遷為「教科學」的教育方式（柯啟瑤，1977：9）。此時，美國為迎頭趕上，由Begle所領導的數學課程改革小組School Mathematics Study Group（簡稱S.M.S.G.）發展出一套數學教材，推廣到中小學使用，是所謂「新數學」，

此教材以集合論為基礎，用純演繹方式重寫數學，形成一股「世界級」的「數學革命」。受此「革命」影響，歐洲和日本等也紛紛投入此教材研究，並也採納作為學校的主要課程。

在我國方面，民國 51 年三月，甫自德國取得博士學位、回臺任教於臺灣師範大學數學系的徐道寧女士¹ 也參與了此教材的研究。徐女士在 2009 年接受清華大學數學系五十週年專訪時提及這段記憶 (陳華和吳孟青, 2014)：

1962年，在美國取得化學博士回師大任教的王澄霞教授，就建議教育部應該重視這件事情，於是中教司請了些大學教授來開會討論。開過幾次會之後，決定分組成立小組，進行改革的前置。在數學方面，除了師大的我們幾個人之外，還有剛從南洋回來，在淡江當系主任的鄧靜華教授。經過深入研究美國高中數學革新的幾種方案，認為 S.M.S.G. (School Mathtics Study Group) 的方案比較適合，於是初步決定翻譯這方面的三本書 (頁 8)。

為順應此股潮流，我國也加入了此波數學課程改革。民國 51 年，教育部先成立了「高級中學數學科及自然科學科教材研究編輯委員會」，委請當時清華大學的校長陳可忠擔任主任委員，下設數學²、物理、化學、生物四科小組，主要任務即在蒐集與研究美國最新发布之數學 S.M.S.G. 教材，並將其認為具價值之新知，依我國教學需要予以採擇納入學校數學教材中 (教育部, 1964：2-3)。民國 53 年，教育部公布「高級中學生物、化學、物理教材編輯大綱高級中學數學教材大綱」，規定「各年級教科書編輯均應以 S.M.S.G. 教材為主要參考資料並須採取其編輯精神」(教育部, 1964：62、68) 進行授課，且於 54 學年度開始實施。

高中課程改革後不久，國中、小數學課程也進行變革，時任教育部長為閻振興。56 年八月，國民政府先通過了「九年義務教育實施綱要」，57 年頒布「國民中學暫行課程標準」，在國中數學暫行課程標準制定方面，由康洪元擔任召集人，李新民、徐道寧、施拱星、陶濤、趙良玉、王冀、王德后、陳石貝為修訂委員，是年，國民教育正式延長為九年，初中改制為「國民中學」。此時，國中數學不再以「內容」作為分類³，改合併為「數學」，而以「集合論」為基礎發展數學概念的 S.M.S.G. 教材也首開先例地列入中、小學教材中 (國民中學暫行課程標準, 1968：84)。整體來說，本次數學課程改革自高中端開始，逐漸延續至中、小學階段，然而，因當時中小課程標準籌備時間僅一年 (約自 56 年七月至 57 年七月止)，修訂時程較為倉促，各科標準擬定皆於草創時期，故民國 57 年所訂頒之課程標準稱為「國民中 (小) 學暫行課程標準」。

¹徐女士於 1947 年畢業於北平師範學院 (北師大)，1957 年獲西德宏博基金會獎學金，1961 年完成西德哥庭根大學理學博士，隔年返國任教於師範大學 (陳華和吳孟青, 2014)。徐女士後來也是 57 年暫行課程標準國中數學教科書初版的編審委員之一，但後因故退出編審委員會。

²數學組成員中有教授亦有學校教師，包括：李新民 (召集人)、羅芳權、徐道寧、康洪元、胡澄生、彭喬育、余榮昌、蕭煥林、周宗權等共九人。其中教師所屬學校為教育部指定的四所高級中學科學教育實驗學校之教師代表，分別是省立新竹中學、省立高雄中學、省立嘉義中學，以及省立臺北一女中 (教育部, 1964：70)。

³民國 51 年中學課程標準的數學教材以幾何、算術、代數三類來分冊。

以「集合論」為基礎發展數學概念的新數學，關注嚴密的邏輯抽象推理，其「以集合為基礎發展數學概念」、「注重公設系統與邏輯推理的形式」、「對於名詞的界定與符號的使用甚為嚴謹」等特色，呈現方式極為「數學化」(呂溪木, 2007: 56-58)。當時，即使「學生、教師或家長都確實在下功夫學習」、「造成了一片熱烈的學習氣氛」(呂溪木, 2007: 57)，但其「把數學抽象化，這樣的新教材使學生仿照唸國文或英文的方式來唸數學，課本習題較缺乏深入的思考性計算題，取得代之的是一些概念題，學生喪失計算能力，以致聯考中很多人數學成績掛零」(余文卿, 1999: 52)，也引起了不少爭議和討論。事實上，S.M.S.G 教材於美國實施期間也面臨許多批評。1973年，美國數學教育家 Morris Kline 出版一本名為《為何強尼不識數》(Why Jonny Can't Add: the Failure of the New Math) 著作中，便對新數學實施後所引發的一系列問題提出攻擊，他指出，新數學不僅未讓學生學會應用數學，也無法讓學生自純數中習得臆測、證明、推廣與再臆測之循環研究程序。由於國內實施新數學課程後批評聲浪亦有，乃至對數學課程改革的呼聲再起，是以，民國 60 年二月，高中數學課程標準率先進行修訂，其修訂重點在於減輕「集合論」於數學教材中份量 (國民中學暫行課程標準, 1971: 116)，並於 61 年起開始實施，至於國中數學課程標準也在 61 年完成修訂，亦將「集合論」內容減量 (國民中學暫行課程標準, 1972: 91-93)，至於國小數學課程，則著重於教材逐年修改。不過，值得一提是，在尚未頒布新的國中數學課程標準之前，國立編譯館在「國民中學數學科教科用書編審委員會」外，另又成立有「國民中學數學科教科用書修訂小組」，在依據 57 年暫行課程標準下，已開始進行數學教科書之修訂工作，並在 61 年頒訂新的課程標準之前，已於 60 年四月發行「修訂版」數學教科書。

二、數學課程目標之分析

民國 57 年，「國民中學暫行課程標準」總綱揭示國民中學目標為「繼續國民小學之基本教育，發展青年身心，灌輸民族文化，培育科學基神，實施職業陶冶，充實生活之能，以奠定其學習專業技能或繼續升學為基礎，並養成忠勇愛國之健全國民」(國民中學暫行課程標準, 1968: 1)，此次修訂強調數學教學應培養學生思考推理能力、日常生活必備之智識重要性，以及重視科學精神與科學方法之培養 (頁 357-358)。關於「國民中學數學暫行課程標準」目標一共有五，分別為 (國民中學暫行課程標準, 1968: 83)：

- 壹、使學生了解數與形之性質及關係，並熟悉運算之原則與方法。
- 貳、供給學生日常生活中數量之知識，並啟發其研究自然環境中之數量問題。
- 參、訓練學生關於簡單計算及基本作圖之技能，使有準確迅速及精密整潔之習慣。
- 肆、培養學生以簡御繁，由已知推未知之能力。
- 伍、使學生認識數學之特質，並欣賞其應用價值。

相較於前一次 51 年所頒之數學課程標準目標⁴，本次增列了第五項「使學生認識數學之特質，並欣賞其應用價值」目標，前四項仍是學校數學課程所須達致的目標。陳冒海 (1989：165-166) 指出，此次數學課程教材架構呈現方式受美國 S.M.S.G. 實驗教材影響，以「集合」概念作為貫穿與組織，此次數學課程變革側重於數學結構與原則的了解、數學精神與方法之培養，以及邏輯推理的認知與訓練等，是以，教師在教學時應能引導學生能認識與理解數學的相關特質。整體來說，本次數學課程改革主要為順應世界潮流，其中也包括有「為適應國家建設發展之需要」(國民中學暫行課程標準，1968：342)、「推進科學教育」(頁340)，至於數學一科於養成學生具備科學方法和態度上，則扮演了一重要分工的角色。

三、數學教科書編修者對以「集合」發展數學概念之觀點分析

民國 57 年，九年國民義務教育正式實施，教科書改由國立編譯館主編，數學教科書之編製成立有「國民中學數學科課教用書編審委員會」，並邀請專家學者為委員。教科書編審委員對教科書內容最終呈現一向占有關鍵性角色，事實上，或也涉及個人學習經驗、課程觀，以及對課程標準的理解等。由於此時期強調以「集合論」發展數學概念，故同步探究 57 年暫行課程標準下教科書編修委員對此觀點有其必要性。

本研究於國家教育研究院教科書圖書館進行檢索，得依據 57 年暫行課程標準所編修之國中數學教科書「初版」和「修訂版」各六冊，亦是本研究主要分析之文件，茲先將此十二冊出版明細整理如表 1。

表 1 所列委員中，不少當時都甫自國外學成歸國、也包括回臺客座講學教授在內。這些委員基於語言優勢和地利之便，或參與了國內初期 S.M.S.G. 教材內容翻譯和研究工作，或因對美國實施 S.M.S.G. 狀況較有理解等，也有自己的觀點和評論。徐道寧女士也參與了國內初期 S.M.S.G. 教材內容翻譯和研究工作，她憶及當時國內發展新數學課程的種種挑戰，以及國人對「集合論」的陌生感受 (陳華和吳孟青，2014)：

⁴民國 51 年數學課程標準之數學課程目標有四，分別為：了解形與數之性質及關係，並熟悉運算之原則與方法；供給日常生活中數量之知識，並啟發學生研究自然環境中數量之問題；訓練關於計算及作圖之技能，使有準確迅速及精密整潔之習慣，以及肆、培養以簡御繁以已知推未知之能力等四項 (教育部，1962：87)。

表1：57年國中暫行課程標準下數學教科書「初版」和「修訂版」各冊出版狀況

	初版		修訂版	
版次日期/ 各冊名稱	57.8	國中數學科教科書第一冊	60.4	國中數學科教科書第一冊
	57.12	國中數學科教科書第二冊	61.1	國中數學科教科書第二冊
	58.8	國中數學科教科書第三冊	60.4	國中數學科教科書第三冊
	59.1	國中數學科教科書第四冊	61.1	國中數學科教科書第四冊
	59.8	國中數學科教科書第五冊	60.4	國中數學科教科書第五冊
	60.1	國中數學科教科書第六冊	61.1	國中數學科教科書第六冊
主編者	國立編譯館			
編審者	國民中學數學科教科用書編審委員會			
主任委員	李新民			
委員	王文思、王德埜、王冀 ⁵ 、林民和、范傳坡、徐道寧 ⁶ 、康洪元、陶濤、黃啟炎、程祿基、趙良五、鄧靜華、劉世超、劉拓、羅芳樺、蔡英藩 ⁷ 、鄭德峻			
總訂正	李新民			
修訂者			國民中學數學科教科用書修訂小組	
召集人			蘇競存	
委員			周元榮、施拱星、 黃敏晃(僅第二、四、六冊)、 陳尚慧、項武義、 楊維哲(僅第二、四、六冊)、 趙民德、賴東昇、繆龍驥、蘇競存	

本研究整理

談到翻譯，其實不是容易的事情，常常一句簡單的句子，換一種語言換一種文化，就沒辦法了解……新訂的教材就以三年一貫為原則，雖然不是一位老師從頭教到尾，但是課程是一貫的，沒有可以切割的地方。其實在編教科書以前，最初我是編師大教師暑期班的教材……我就自己編教材，由教務處來印。現在同學們可能很難想像，也沒有影印也沒有電腦打字，得要刻銅板油印。我曾聽人轉述，教務處印刷的人說：這個又不是軍訓課本，為什麼要“集合”？可見當時這個名詞有多陌生……(頁 8-10)。

⁵僅參與初版第一冊的編寫。

⁶僅參與初版第一冊的編寫。

⁷未參與初版第一冊的編寫，其他冊別均有參與。

至於修訂委員之一的旅美數學家項武義先生⁸，其在民國 59 年返台客座講學時，即曾公開反對國內直接「移植」美國 S.M.S.G 數學課程於國內學校教學的作法。項先生在 2008 年接受「數學傳播」專訪時提及 (劉太平和張海潮, 2008)：

當年回來有兩件事。一件事是在台大講課，另一個是碰到當時正把 S.M.S.G. 美國的那一套東西搬到台灣來，他們說這是美國一套偉大的教育革命，台灣現在正在現代化，一定要趕上。這在教育上相當於把外國的 SARS 移植到中國來，我當時公開演講反對這件事情……所以，我那時回來，他們也許覺得是：善者不來，來者不善。就想了一個辦法，請我去教育部參加那個課程標準的委員會，我記不清什麼名字了。因為假如我去參加，我就一個人去參加，而他們一大幫人，不管我講什麼話最後都沒有效果。但是我就不能再批評了，因為你項武義也是委員之一。於是教育部來請我，可是一請我，我個人雖然是一個呆頭呆腦的傢伙，但是我那時就警覺到這件事情，所以在請我時，我就講了，其實我們在台大數學系，那時候蘇競存也在，然後還有賴 (註：賴東昇) 先生、繆龍驥、施先生、趙民德，也對這個事情關心。所以那個課程委員會一下子就增聘了六個人。我們就不是絕對的少數了……還有一個客觀環境有所改變，就是 S.M.S.G. 引進來以後，弊病已經出來了，中學老師開始怨聲載道，教育部也不能完全不顧這件事情，教育部也有要把它改一改的意願，然後我們去了，我們能夠提出要改革的方案……其實，在私下主事者也頗有悔意……那一年，教育部就同意改…… (頁 4-6)。

整體來說，民國 57 年暫行課程標準下的數學教科書編製，無論初版或修訂版之編審者或修訂者，其面臨當時國際新數學潮流之席捲，以及國內社會存在有不同聲音，自是承受有巨大責任與壓力，尤其對教科書是否應參酌 S.M.S.G. 教材內容為主要編製，是否以「集合論」發展數學概念等，教育部、教科書編審/修訂委員、現場教學者無不各有體會與感受，存在有不少爭議。易言之，57 年暫行課程標準下的數學教科書編製，對編寫委員和修訂委員而言均是具有挑戰性任務，國內「新數學」課程發展可謂是「蹣跚而行」。

參、57年國中暫行課程標準數學教科書初版內容之分析

一、57年國中暫行課程標準教科書初版章節概覽和主要特色之分析

本版數學教科書共分為六冊，每學期一冊，供國中六個學期教學之用。關於取材，一方面對現代生活中所需之數學知識作詳盡之講述，使學生能學以致用，另一方面對數學上較重要之新觀念做初步介紹，以奠定良好基礎 (國立編譯館, 1968：編輯要旨)。本版數學教科書共 30 個

⁸項先生 1959 年畢業於臺灣大學數學系，1964 年獲美國普林斯頓大學數學博士學位。民國 59 年九月，項先生客座於臺灣大學講學一學期，開設課程名稱為「數學概論」(劉太平和張海潮, 2008)。項先生是 57 年暫行課程標準國中數學教科書修訂版的編審委員之一。

單元，每周教學節數為 3-4 節，本研究將初版各單元名稱及其教材內容所欲達成教學目標做一統析於表 2。

表 2：57年國中暫行課程標準數學教科書初版各單元名稱、教材內容，以及教學目標之整析

	單元名稱	數學內容	教學目標
第一冊	數的記法	數	熟悉大數分節法和各節中最右一位的位名、明瞭乘冪的意義並熟悉用之於記數法、了解兩底記數法相互變換的理由及其步驟、能透過認識古代記數法來理解今記數法的進步情形等
	集合的概念	數	認識集合和元素、熟悉集合的各種表示法、明瞭空集合的意義、明瞭兩集合相交和兩集合不相交的意義等
	點、線、平面、空間的認識	幾何	對空間和空間中的點線和平面有清楚的認識、能畫出簡單圖形(相交兩線、相交兩平面等)、熟悉線和線、線和平面、平面和平面的交集的各種情形、熟悉線、射線、線段的區別和記法、明瞭半線、半平面、半空間的意義等
	整數	數	了解0不能做除數的理由、能判別一種運算是否有反運算、熟悉整數對於加法和乘法的各種重要性質、熟悉最大公因數和最小公倍數的意義和求法等
	分數	數	知道具有相等值的分數有無限多個、知道怎樣比較兩分數的大小、熟悉分數的四則運算、熟悉分數對於加法和乘法的重要性質等
	有理數	數	認識並能區別加號和正號及減號和負號、熟悉絕對值的意義和比較絕對值大小、熟悉含有負號的數的計算、熟悉有理數對於加法和乘法的重要性質等
第二冊	小數	數	了解小數的意義和記法、熟悉小數的四則運算、了解循環小數的意義和記法、了解有限小數或循環小數和分數的互相化法、熟悉負小數的計算、了解小數的近似值等
	測度和度量	量	了解度量的意義、了解曲線和平面曲線的意義、了解簡單封閉曲線和封閉區域的意義、了解封閉區域的近似測度法、熟悉矩形(體)和正方形(體)面(體)積的求法等
	比和比例、百分率	數	了解比例的重要性質、熟悉正反比例的意義和其應用問題的解法、熟悉化成連比的方法、了解比例分配的意義、熟悉百分率的意義和記號等
	簡單直線形	幾何	了解SAS、ASA、AAS、SSS等性質及斜股性質的意義、認識證明的意義、熟悉簡單直線形的重要性質等

第三冊	基本作圖	幾何	了解幾何作圖的意義、了解幾何圖形中圓、圓心、半/直徑、圓弧和弦的意義、了解勾股弦定理、了解無理數的作圖法等
	直角坐標系	代數	了解坐標的意義、了解數線的意義與應用、了解直角坐標系的定義、能在座標平面上描圖等
	方程式簡介	代數	了解數詞和數句的意義、了解數句的解集合意義、能區別方程式和不等式、了解解方程式的運算法則、能利用方程式解決數學問題等
	誤差	數	了解和運用科學記號來表示大數和小數、了解度量與誤差的計算等
	統計圖表	統計	了解統計圖表的重要性、了解統計表的製作方法、了解算術平均數、中數與眾數的意義等
第四冊	變數法	數	了解兩種量之間的正變、了解兩種量之間的反變、了解三種量之間的聯變(限於一種量均與另外兩種量成正變的情形) 等
	相似三角形	幾何	熟悉相似三角形性質和其應用(做為討論比較複雜直線形圖形的基礎)、能利用相似三角形求未知角和邊等
	三角形的心	幾何	了解共點線問題的基本條件、能進行證明幾何命題中求角或線段相全等的利用、認識簡單命題、介紹若則命題及其逆命題之形式、區分、成立與否問題等
	圓	幾何	認識圓的意義、認識圓和直線的關係、認識弧和所對弦的關係、能計算弧的度量、認識圓的內接正多邊形、能計算圓的周長和弧長等
第五冊	實數系大意	數	了解數系擴充之順序、了解有理數與有理數集合及無理數與無理數集合的意義、了解實數系的產生及有關基本性質
	指數、根數	數	了解指數擴充之順序、了解根數的意義及其主值的規定、熟悉平方根的近似值求法等
	多項式	代數	了解多項式意義、了解多項式所佈於之數系的意義、了解多項式的四則運算等
	分解因式	代數	明瞭質數與質式及質因數與質因式的意義、明瞭質因式所佈數系的意義、明瞭分解因式的意義等
	最高公因式與最低公倍式	代數	明瞭公因式與最高公因式的意義及其求法、明瞭公倍式與最低公倍式的意義及其求法、明瞭因式分解的應用等
	分式、有理式	代數	明瞭分式及有理式的意義、明瞭有理式的四則運算、明瞭繁分式及其化簡、明瞭最高公因式與最低公倍式的應用

第六冊	二次方程式	代數	了解整式方程式的形式及其解法、熟悉複數的概念和其四則運算、能用視察法和配方法解二次方程式、能利用二次方程式解應用問題等
	分式方程式和無理方程式	代數	了解分式方程式的形式和其解法、能利用分式方程式解應用問題、了解無理方程式的解法、能利用無理方程式解應用問題等
	二元方程組	代數	了解二元一次方程式是由兩個二元一次方程式所成的複合數句、能應用代入消去法解方程組、能應用加減消去法解方程組、了解相依方程組和矛盾方程組的意義、熟悉簡易二元二次方程組的解法、能利用方程組來解應用問題等
	數列	代數	認識數列意義、熟悉等差數列及等比數列求和方法等
	函數及其圖形	代數	認識函數及其定義域與值域、了解函數的定義域與值域都是實數的部分集合時的表示法、了解定義域與值域都是實數的部分集合的函數的圖形、知道一次函數與線性函數的圖形、了解二次函數圖形等

本研究整理

由前提之背景脈絡可知，初版數學教科書主要特色之一是首開先例地將「集合論」列入中小學數學教材中，處處使用集合語言。例如，在討論幾何時，書中規定須將「半線」和「射線」加以區分（國立編譯館，1968）：

假設 P 是線 L 上任一點，除點 P 以外， P 分割 L 其餘所有點成兩部分，每一部分叫做半線， P 叫做每一半線的界或界點，作為界的 P 不屬於兩半線中的任一半線，半線雖有一方向不能任意延長，但半線沒有端點。一半線的所有點和界點所成的集合叫做一射線，射線恰有一端點……（頁66）。

上段文字為初版第一冊「點、線、平面、空間的認識」單元內容，強調學生須能知道「半線」和「射線」之不同處在於「是否包含端點」，此正也凸顯了該時期數學學習應具有的「嚴謹性」。再如「集合」、「元素」、「聯集」、「交集」等，這些名詞更「經常性」地「穿梭」於本版教科書中，更援以為發展數學概念，如：將三角形視為三個線段之「聯集」、將關係視為某種「集合」、將圖形視為「點之集合」、談方程式的「解集合」等，甚至也須填寫命題的真假值表及處理括號和字母一類抽象符號問題等。易言之，「集合論」為貫通此版本數學課程的基本材料，學生須學習以「集合論」的語言準確地應用到數學上，此對於教者或學者都甚具挑戰。

二、以「有理數」單元內容為例分析

小學畢業生升上國中後第一學期，教科書如何引導學習「有理數」？初版第一冊第六章「有

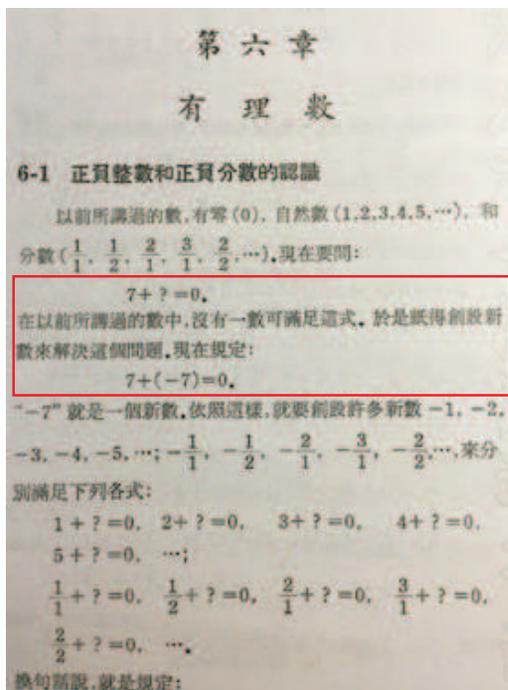
理數」單元共分為六節，茲將各節名稱列於表 3。

表 3：57年國中暫行課程標準數學教科書初版第一冊第六章「有理數」各節名稱和其篇幅

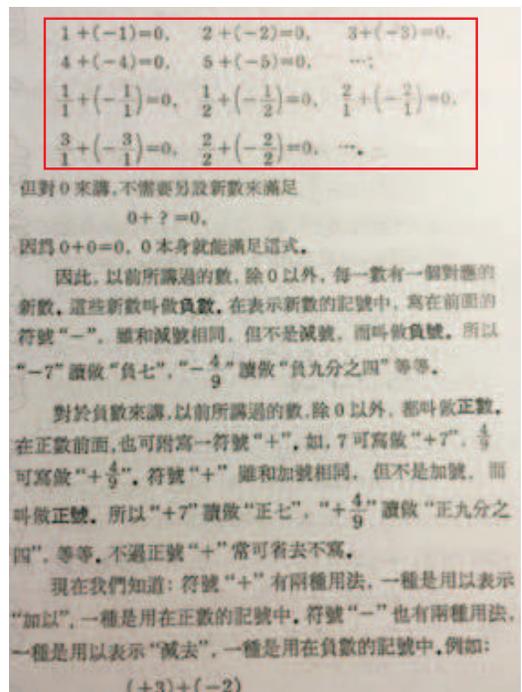
節次	名稱	篇幅(頁)
6-1	正負整數和正負分數的認識	4
6-2	有理數的意義	2
6-3	有理數的絕對值和次序	4
6-4	有理數的加法和減法	10
6-5	有理數的乘法和除法	10
6-6	有理數的重要性質	3
		共 33 頁

本研究整理

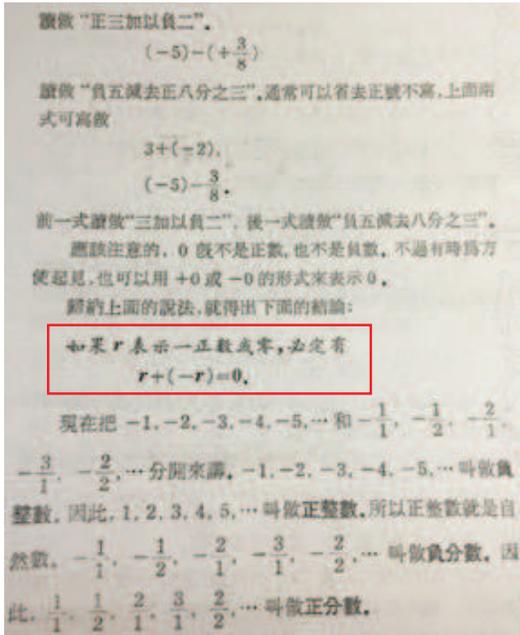
在「6-1 正負整數和正負分數的認識」一節中，共四頁篇幅，其中一頁為習題練習。書中先介紹了正負整數和正負分數的意義，包括：負數意義、性質符號和運算符號、正負整數和正負分數的簡單混合運算等，如圖 1。



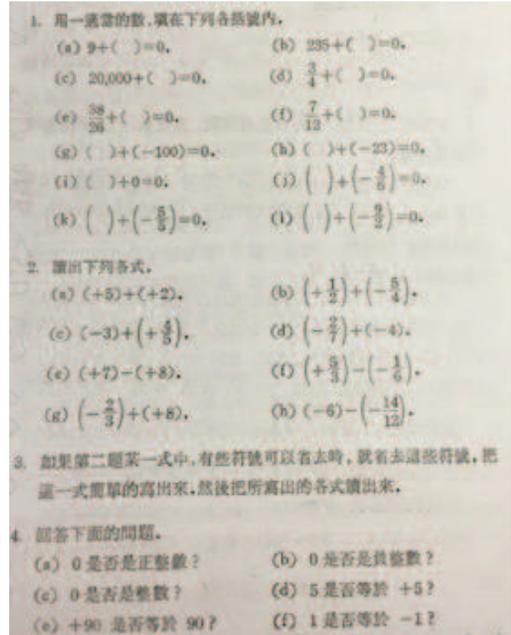
1a



1b



1c



1d

圖 1：57年初版國中數學教科書第一冊「6-1 正負整數和正負分數的認識」

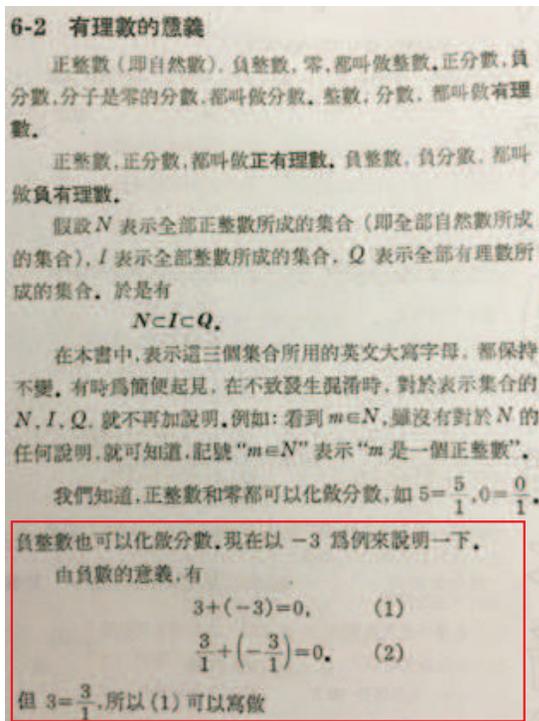
資料來源：國立編譯館 (1968 初版：130-133)

由圖 1 可知，此章節的教材重點主要有二，一為「負數意義之介紹」，另一則為「運算符號和性質符號之理解與區別」。此節意圖透過「假設 a 是一正整數或正分數，滿足 $a+?=0$ 的“?” 規定為 $-a$ ， $-a$ 是一負數」來引出「負數」(如圖 1a 和 1b 方框)，並說明了加號和正號、減號和負號之區別，最後也歸結有「如果 r 表示一正數或零，必定有 $r+(-r)=0$ 」(如圖 1c 方框) 結論。此節對於正負整數和分數的說明，可說植基於學生小學階段所認知的數系基礎 (即知有自然數，然後是分數)，提出為解決「 $7+?=0$ 」一類問題，所以創造一「新數」(即「負數」) 來滿足此式。易言之，書中所欲傳達意涵是「為使運算為可能，故須將數系做出擴展，此擴展可說是發展整個數系的一個重要動機」，從自然數 N 擴展到有理數系 Q ，將使四則運算不受限制。

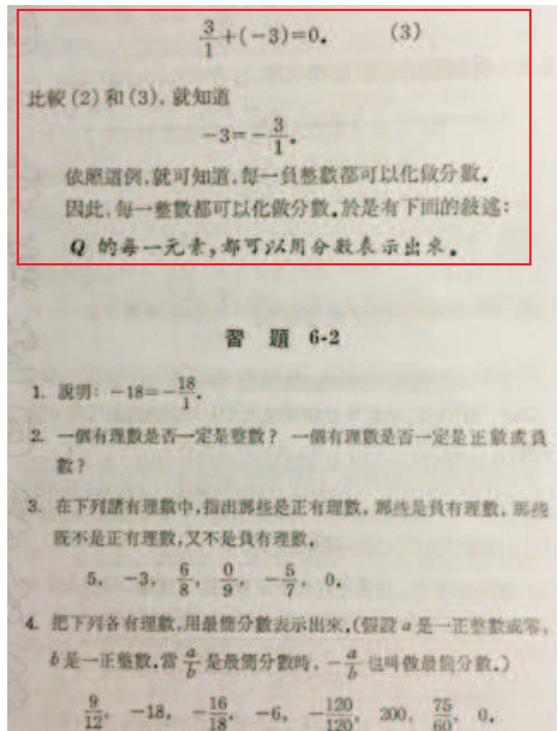
至於「6-2 有理數的意義」一節中，篇幅共兩頁，其中二分之一頁是習題練習，介紹了有理數的意涵，內容如圖 2。

從圖 2 內容看來，此節教材重點有二：一是「 N 表示全部自然數所成的集合 (即全部自然數所成的集合)， I 表示全部整數所成的集合， Q 表示全部有理數所成的集合，則 N, I, Q 之間有下列關係： $N \subset I \subset Q$ 」，另一則是「 Q 的每一元素 (即每一有理數) 都可以用分數表示出來」。關於後者，此版本特別以「 $-3 = -\frac{3}{1}$ 」為例 (如圖 2a、2b 方框) 說明。學生意圖說明此等號成立，須從前一節所學到的為解決「 $7+?=0$ 」中“?” 一類問題所創「負數」為說明起點，

即「因為 $3 + (-3) = 0$ ①」、「 $\frac{3}{1} + (-\frac{3}{1}) = 0$ ②」，又基於「 $3 = \frac{3}{1}$ 」為先備知識，故第 ① 式中「3」可換為「 $\frac{3}{1}$ 」，改得「 $\frac{3}{1} + (-3) = 0$ ③」，接著，再藉由比較 ② 和 ③，便能得知「 $-3 = -\frac{3}{1}$ 」。書中最後，也做出了一結論：「每一負整數都可以化為分數，因此，每一整數都可以化為分數，於是有下列的敘述：Q 的每一元素，都可以用分數表示出來」。易言之，教科書引導從「每一負整數都可以化作分數」擴充到「每一整數都可以化作分數」，然後再擴充到「每一有理數都可以化作分數」。由此知，即使對一些看似簡單、易理解或想像的「集」，以為使用一般語言描述或普通圖像表示便已足夠，但初版強調須加以詮釋，而詮釋過程中，學生須能充分運用如集合語言和符號來說明。



2a



2b

圖 2：57年初版國中數學教科書第一冊「6-2 有理數的意義」

資料來源：國立編譯館 (1968 初版：134-135)

進入 6-3 「有理數的絕對值和次序」一節，篇幅共四頁，其中一頁是習題練習，如圖 3。

6-3 有理數的絕對值和次序

假設 r 表示一正有理數，規定

r 的絕對值是 r ，
 $-r$ 的絕對值也是 r ，

又規定

0 的絕對值是 0。

$r, -r, 0$ 的絕對值分別用記號 $|r|, |-r|, |0|$ 表示。 $|r|, |-r|, |0|$ 分別讀做“ r 的絕對值”，“ $-r$ 的絕對值”，“0 的絕對值”。例如：

$$|5| = 5, |-5| = 5, \left| \frac{3}{8} \right| = \frac{3}{8}, \left| -\frac{3}{8} \right| = \frac{3}{8}, |0| = |0| = 0,$$

($\left| \frac{0}{9} \right|$ 讀做“九分之零的絕對值”。)

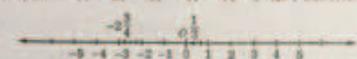
畫一水平線，在線上任取一點 O ，從 O 開始，分別向右和向左，在這線上每隔一樣遠畫出一點，如下面的圖形。



以點 O 表示 0；以點 O 右邊所畫出的各點，從左向右，依次表示 1, 2, 3, 4, 5, ...；以點 O 左邊所畫出的各點，從右向

3a

左，依次表示 -1, -2, -3, -4, -5, ...；如下面的圖形。



於是每一整數，在這線上恰有一點來表示，如果把點 O (表示 0 的點) 到表示 1 的點之間分做 3 等分，點 O 右邊第一分點就表示 $\frac{1}{3}$ ，如果把表示 -2 的點到表示 -3 的點之間分做 4 等分，表示 -2 的點左邊第三分點就表示 $-2\frac{3}{4}$ (即 $-\frac{11}{4}$)，仿照這樣，不是整數的每一有理數，在這線上也都恰有一點來表示，所以每一有理數，在這線上都恰有一點來表示。

點 O 叫做原點，表示整數每相鄰兩點之間的距離叫做單位，這線叫做數線。

假設 r 和 s 是零或正有理數，在第四章和第五章中，已講過如何比較 r 和 s 的大小，如果 $r < s$ ，以數線上的點表示 r 和 s 時，就可看出表示 s 的點在表示 r 的點的右邊。



因此，數線上的點，從原點起，愈向右移，這點所表示的有理數就愈大，現在把這性質推廣到全部數線，而作為一種規定，換句話說，假設 r 和 s 是任意兩有理數，如果數線上表示 s 的點在表示 r 的點的右邊，就規定

3b

$r < s$

依照這規定，就有下面的各敘述：

- 每一負有理數小於零，如：
 $-8 < 0, -\frac{2}{5} < 0$.
- 零小於每一正有理數 (這性質早已講過.)
- 每一負有理數小於每一正有理數，如：
 $-4 < 2, -6 < \frac{3}{5}, -\frac{7}{2} < 3, -\frac{4}{5} < \frac{1}{9}$.
- 假設 r 和 s 是相異兩正有理數，可依照以前所講的方法，比較 r 和 s 的大小。
- 假設 r 和 s 是相異兩負有理數，先比較 $|r|$ 和 $|s|$ 的大小，如果 $|r| < |s|$ ，必定有 $s < r$ 。

例 比較 $-\frac{5}{8}$ 和 $-\frac{4}{7}$ 的大小。

$$\left| -\frac{5}{8} \right| = \frac{5}{8}, \left| -\frac{4}{7} \right| = \frac{4}{7}$$

$$5 \times 7 = 35, 8 \times 4 = 32,$$

因為 $32 < 35$ ，所以

$$\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$$

因此，

$$-\frac{5}{8} < -\frac{4}{7}$$

3c

習題 6-3

- 寫出下列各有理數的絕對值。
 (a) -3, (b) $-\frac{7}{5}$, (c) 0,
 (d) $\frac{13}{6}$, (e) $\frac{9}{20}$, (f) 100,
 (g) $-2\frac{5}{7}$, (h) $\frac{49}{50}$, (i) -321.
- $|8-1| = ?$ $|3-2| = ?$ $|3-3| = ?$
- 畫一數線，在該數線上畫出表示下列各有理數的點。
 (a) $\frac{3}{4}$, (b) $-\frac{1}{2}$, (c) -6,
 (d) $\frac{0}{3}$, (e) $-3\frac{1}{6}$, (f) $2\frac{3}{4}$,
 (g) 7, (h) $4\frac{2}{3}$, (i) $-4\frac{2}{3}$.
- 假設 r 是一正有理數，在數線上，表示 r 的點到原點的距離和表示 $-r$ 的點到原點的距離，是否是一樣遠？
- 用符號“ $<$ ”和“ $>$ ”中之一適當符號，填入下列各方格內。
 (a) $-100 \square 1$, (b) $\frac{1}{5} \square 0$,
 (c) $0 \square -4$, (d) $-8 \square 8$,
 (e) $-\frac{4}{3} \square 2$, (f) $\frac{0}{7} \square -3\frac{5}{8}$,
 (g) $-\frac{4}{5} \square \frac{1}{5}$, (h) $1\frac{1}{3} \square -10\frac{2}{3}$.

3d

圖 3：57年初版國中數學科教科書第一冊「6-3 有理數的絕對值和次序」

資料來源：國立編譯館 (1968 初版：136-139)

由圖 3 內容可知, 此章節教材重點主要有二, 一為「有理數的絕對值意義之介紹」, 另一則為「每一有理數可用數線上一點來表示, 且可進行有理數大小的比較」。由於前兩章 (即「整數」和「分數」) 已教授過「零和正有理數的大小值比較」, 故此章在介紹「數線」之後, 便將重點放在引導學生能理解「數線上的點, 從原點起, 越向右移, 這點所表示的有理數就越大, 現在把這性質推廣到全部數線, 而作為一種規定...」(如圖 3b 方框) 講述上, 也為接下來的有理數之四則運算做出預備。不過, 特別一提是, 此節雖提「每一有理數可用數線上一點來表示」, 但尚未論及「實數」, 故暫不做「數線上的點和實數的一對一的對應關係」說明。

至於「6-4 有理數的加法與減法」和「6-5 有理數的乘法與除法」二節, 主要在處理有理數之四則運算, 兩節篇幅共達 20 頁, 習題練習各佔二至三頁, 可說是本章份量較重章節。6-4 和 6-5 兩節在一開始「破題」時, 皆以「集合」作為開場, 如圖 4。

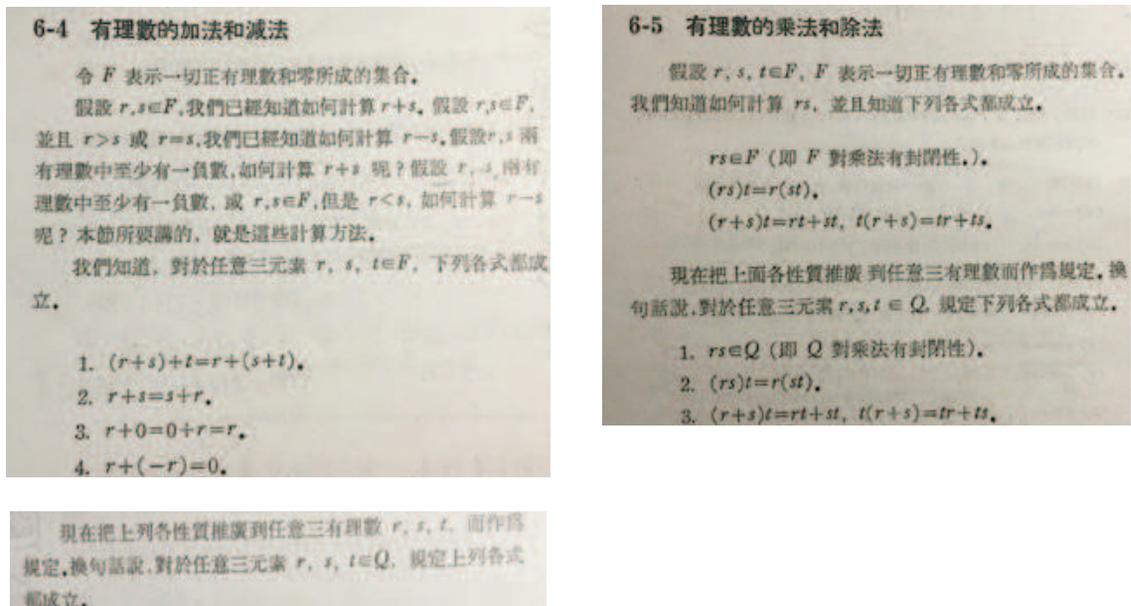


圖 4：57年初版國中數學教科書第一冊「6-4 有理數的加法與減法」、「6-5 有理數的乘法與除法」資料來源：國立編譯館 (1968 初版：140-141、150)

由圖 4 知, 對「正數系四則運算擴張到有理數系四則運算」之處理方法, 此版本採「以正數系四則運算為出發點, 僅有唯一的一種方式擴張到有理數系, 使得有理數系構成一數體」為說明。順此脈絡之下, 「6-4 有理數的加法與減法」和「6-5 有理數的乘法與除法」更提出幾種性質。在「6-4 有理數的加法與減法」一節中, 提出四種性質如下 (國立編譯館, 1968：141-146):

1. 對於任一元素, $r \in Q$, 有 $-(-r) = r$ 。

2. 假設 u, v 是任意兩正有理數, 並且 $u > v$ 或 $u = v$, 就有

$$u + (-v) = (-v) + u = u - v,$$

$$(-u) + v = v + (-u) = -(u - v)。$$

3. 假設 u, v 是任意兩正有理數, 就有

$$(-u) + (-v) = -(u + v)。$$

4. 對於任意兩元素, $r, s \in Q$, 有 $r - s = r + (-s)。$

對於上述性質, 教科書中均列有「詳細說明」, 茲以第 3 點「假設 u, v 是任意兩正有理數, 就有 $(-u) + (-v) = -(u + v)$ 」內容為例說明, 如圖 5。

(iii) 假設 u, v 是任意兩正有理數。

$(-u) + (-v) = ?$ ①

$((-u) + (-v)) + v = ? + v$ (上式兩邊同加以 v .)

$(-u) + ((-v) + v) = ? + v$ (由 1)

$(-u) + (v + (-v)) = ? + v$ (由 2)

$(-u) + 0 = ? + v$ (由 4)

$-u = ? + v$ (由 3)

$(-u) + u = (? + v) + u$ (上式兩邊同加以 u .)

$u + (-u) = ? + (v + u)$ (由 2, 1)

$0 = ? + (u + v)$ (由 4, 2)

$0 = (u + v) + ?$ (由 2)

$? = -(u + v)$ ②

所以 $(-u) + (-v) = -(u + v)$ 。

圖 5：57年初版國中數學教科書第一冊「6-4 有理數的加法與減法」

資料來源：國立編譯館 (1968 初版：144)

假設 u, v 是任意兩正有理數, 欲知「 $(-u) + (-v) = ?$ 」(如圖 5 方框 ①), 說明伊始, 是先將兩邊同時加以 v (運用等量加法公理), 然後將 $(-v) + v$ 做出合併 (運用結合律) 讓其為 0, 得「 $-u = ? + v$ 」, 接著, 再將兩邊同時加上 u (運用等量加法公理), 則等號左邊為 0, 得「 $0 = ? + (u + v)$ 」, 再得「 $? = -(u + v)$ 」(如圖 5 方框 ②)。究其過程發展脈絡, 主要從 6-1 和 6-2 節提及負數的意義 (即「 $a + (-a) = 0$ 」) 做出延伸。再以「6-5 有理數的乘法與除法」相關性質進一步說明, 此節提及性質有四如下 (國立編譯館, 1968：151-155):

1. 對於任一元素, $r \in Q$, 有 $r \times 0 = 0 \times r = 0$ 。

2. 對於任意兩元素, $r, s \in Q$, 有

$$(-r)s = -rs, r(-s) = -rs, (-r)(-s) = rs。$$

3. 對於任意兩元素, $r, s \in Q$, 有

$rs = sr$, 即有理數的乘法適合交換律。

4. 對於任意兩元素, $r, s \in Q$, 但 $s \neq 0$ 有

$$r \div s = r \times \frac{1}{s}。$$

茲以第 2 點「對於任意兩元素, $r, s \in Q$, 有 $(-r)s = -rs, r(-s) = -rs, (-r)(-s) = rs$ 」內容為例說明, 如圖 6。

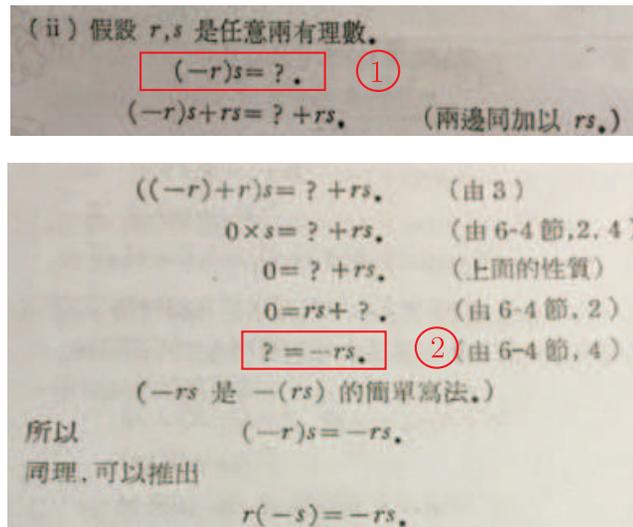


圖 6：57 年初版國中數學教科書第一冊「6-5 有理數的乘法與除法」

資料來源：國立編譯館 (1968 初版：151-152)

如圖 6 性質說明, 假設 r, s 是任意兩有理數, 欲知「 $(-r)s = ?$ 」(如圖 6 方框 ①), 說明伊始, 亦是先將兩邊同時加以 rs (運用等量加法公理), 然後將 $(-r) + r$ 做出合併 (運用結合律) 讓其為 0, 得「 $0 = ? + rs$ 」, 再得「 $? = -rs$ 」(如圖 6 方框 ②)。究其過程發展脈絡, 仍與圖 5 性質處理方式相同。本研究進一步察看 6-4 和 6-5 的其他性質「詳細說明」, 也幾乎如出一轍, 此類說明也幾乎涵蓋了 6-4 和 6-5 整體篇幅。易言之, 整個 6-4 和 6-5 章節洋洋灑灑地充斥了符號和字母, 即使每一性質在說明後, 皆附有相關題目練習, 但都鮮少與生活情境連結 (6-4 中僅一題提及氣溫度數相差問題, 6-5 也僅一題提及數學測驗得分計算問題), 最後習題練習處雖各有 30 至 40 題練習, 也多以「數」直接命題要求計算 (如: $5 + (-\frac{2}{3}) = ?$ 、 $(-6) - \frac{3}{5} + (-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{5}) = ?$ 、 $(-80) \div 5 = ? \dots$), 其間也穿插有一至二題要求能對所提之等式做出成立與否之解釋

(如: 「對於任意兩元素 $r, s \in Q$, $r - (-s) = r + s$ 是否一定成立?」、「假設 r, s, t 是任

意三有理數，並且 $t \neq 0$ ，則 $(r + s) \div t = (r \div t) + (s \div t)$ 爲什麼成立？寫出各步驟來」。整體來說，此兩節教材重點主要在於「有理數對於加法（減法定義在加法的基礎上）和乘法（除法定義在乘法的基礎上）重要性質之介紹」，惟介紹過程中，似更傾向於「加法和乘法之運算都引發群結構」、「以群爲抽象代數中重要概念的前身」等上著力，雖「有理數的四則運算」是達致數學課程目標「供給學生日常生活中數量之知識，並啟發其研究自然環境中之數量問題」較好發揮的章節之一，真實世界中許多實例可加以援用，此不僅能貼近學生生活經驗，也能提升學習興趣，但初版較少於此鋪陳。

本章最後一節「6-6 有理數的重要性質」，包括最後一頁習題練習在內，共三頁篇幅。本章主要在將前兩節所提之「有理數對加法和乘法的性質」歸納成八個重點：

假設 $r, s, t \in Q$,

1. 封閉性：

$$r + s \in Q, rs \in Q。$$

2. 結合律：

$$(r + s) + t = r + (s + t), (rs)t = r(st)。$$

3. 交換律：

$$r + s = s + r, rs = sr。$$

$rs = sr$ ，即有理數的乘法適合交換律。

4. 乘法對於加法的分配律：

$$(r + s)t = rt + st, t(r + s) = tr + ts。$$

5. 加法單位元素：

$$r + 0 = 0 + r = r, 0 \text{ 叫做 } Q \text{ 的加法單位元素。}$$

6. 乘法單位元素：

$$r \times 1 = 1 \times r = r, 1 \text{ 叫做 } Q \text{ 的乘法單位元素。}$$

7. 加法反元素：

對於 $r \in Q$ ，有元素 $-r$ ，使 $r + (-r) (= (-r) + r) = 0$ ， $-r$ 叫做 r 的加法反元素。

8. 乘法反元素

假設 $r \neq 0$ ，對於 $r \in Q$ ，有元素 $\frac{1}{r}$ ，使 $r \times \frac{1}{r} (= \frac{1}{r} \times r) = 1$

$\frac{1}{r}$ 叫做 r 的乘法反元素或倒數， $\frac{1}{r}$ 也可記做 r^{-1} ， r^{-1} 讀做“ r 的 -1 乘冪”。

觀其上述，此章節教材已「隱約地」帶出近代數學中的一些代數結構，如群 (groups)、環 (rings)、體 (fields) 等。以往，這些都是屬於大學數學系中課程，但 S.M.S.G. 將這些概念

提前於國中階段中經營,「6-6 有理數的重要性質」提到的代數結構概念至少包括：

(一)「群」是由一個集合及一個二元運算所組成。一個「群」必須滿足一些被稱為「群公理」的條件,即封閉性、結合律、單位元素、反元素等;

(二)「環」有兩個二元運算 (+) 和 (\times), 其中 \times 於 + 上是可分配的;

初版中, 雖未將這些名詞或代數結構概念具體描繪, 但教材之編寫, 顯然融入了「代數是現代數學的基礎語言之一, 主要使用公理化的方法來研究數學問題, 並有效地推導數學理論」、「它處理的對象是抽象的集合, 這些集合中的元素包括傳統的數系中的成員」, 以及「正因它的抽象性, 使它能做更廣泛的運用, 其抽象思考方式的威力在現在數學的發展上一再地被見證」的本意。綜此, 本節在最後習題練習處、亦是本「有理數」單元學習之末處, 學生需能解決的問題有：

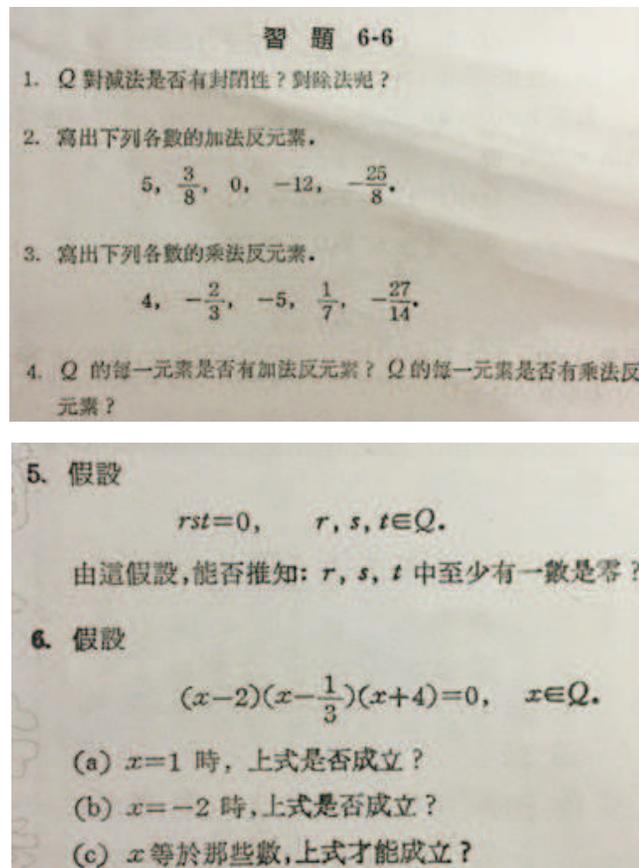


圖 8：57年初版國中數學教科書第一冊「6-6 有理數的重要性質」

資料來源：國立編譯館 (1968初版：162-163)

若順理於初版「有理數」單元學習脈絡, 本研究嘗試回答圖 8 中幾題問題如下：針對問題 1, 學生應提出之理想回答為「因為任意兩有理數的差仍是一有理數, 故 Q 對減法有封閉性, 但

誠如 $\frac{1}{5} \div 0$ 之商沒有意義，所以 Q 對除法沒有封閉性；針對問題 4，理想回答應為「 Q 的每一元素有加法反元素，但誠如 $\frac{1}{5} \div 0$ 之商沒有意義，故 Q 的每一元素不一定有乘法反元素」；至於問題 5，應提出之理想回答則為「因為 $rst = 0$ ，所以 r, s, t 中至少有一數是零，除了 t 可能為 0 之外，若換成 $rs = 0$ ，則知 r, s 中至少有一為 0，也就是說， r, s, t 中至少有一數是 0，故由 $rst = 0$ 和 $r, s, t \in Q$ 之假設，可推知 r, s, t 中至少有一數是零」。綜觀初版「有理數」各章節內容之安排，或可試著想像：對一甫自國小畢業、直升國中的學生而言，其在學習「有理數」單元時，對書中介紹之意義、概念發展、性質說明等，是否能夠加以理解？對意圖以「集合」為基礎來發展數學概念、甚至隱含有各種抽象的代數結構 對師生教學而言是否具有挑戰？事實上，57年「初版」數學教科書在實施後不到三年，即進行了內容修訂，「修訂版」中大幅縮減了「集合論」內容，也改變了講述數學概念的方法，以下將進一步探究。

參考文獻

1. 余文卿。漫談高中數學新課程。數學傳播, 23(1), 52-56, 1999。
2. 呂溪木。民國75年之前我國數學課程演變。論文發表於「吳大猷先生百歲冥誕科學教育學術研討會——我國近五十年之科學教育發展」研討會，臺灣師範大學科學教育所，臺北市，2007。
3. 林碧珍。台灣數學教育研究的回顧與反思。教育研究月刊, 190, 129-143, 2010。
4. 柯啟瑤。科學概念的學習(上)。台北市：幼獅文化, 1977。
5. 中學課程標準, 1962。
6. 國民中學暫行課程標準, 1968。
7. 國立編譯館(主編)。國民中學數學(初版, 一至六冊)。臺北市：編者, 1968-1971。
8. 國立編譯館(主編)。國民中學數學(修訂版, 一至六冊)。臺北市：編者, 1971-1972。
9. 教育部。高級中學生物、化學、物理教材編輯大綱高級中學數學教材大綱。臺北：作者, 1964。
10. 陳冒海。我國國民中學數學課程之發展。教育資料集刊, 14, 157-194。國立教育資料館, 1989。
11. 陳華、吳孟青。徐道寧教授專訪。載於陳國璋(主編), 清華大學數學系五十週年紀念文集(頁1-24)。新竹市：國立清華大學數學系, 2014。
12. 陳玟樺。民國五十至八十年代(1961-2000年)數學課程改革之探究。教育部高中數學學科中心電子報, 119, 1-21, 2017。
13. 劉太平、張海潮。有朋自遠方來—專訪項武義教授。數學傳播, 32(4), 3-15, 2008。
14. Morris Kline, *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*, New York: St. Martin's Press, 1973。

—本文作者投稿時為臺灣師範大學課程與教學所博士生—