數學傳播　43卷3期, pp. 69-74

多項式除法的商式和餘式

吳　波

文 [1] 中陳建燁先生給出了如下的「多項式除法基本定理」:

引理1 (**見**[1]): 設 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 兩兩不等, 且 $n\ge m\ge 2$, 則

$$x^n=\left[\prod_{1\le i\le m}(x-p_i)\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{n-m}h_{n-m-j}(p)x^j\right]+\sum_{j=1}^{m}p_j^n\frac{\prod\limits_{1\le i\le m, i\ne j}(x-p_i)}{\prod\limits_{1\le i\le m, i\ne j}(p_j-p_i)}.$$

其中 $h_k(p)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=k,\\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\ge 0}}(p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\cdots p_m^{\lambda_m})$, 即 $h_k(p)$是 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 的 k 次完全齊次對稱多項式。

注: 爲表述方便, 本文將文 [1] 中的 $h_k(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ 簡寫爲 $h_k(p)$, 並將商式改爲按 x 的升冪排列。

本文探求一般的 n 次多項式 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 所得的商式 $q(x)$ 和餘式 $r(x)$, 即:

$$f(x)=q(x)\prod_{1\le i\le m}(x-p_i)+r(x).$$

其中 $q(x)$ 是 $n-m$ 次多項式 $(n\ge m)$, $r(x)$ 是次數不超過 $m-1$ 的多項式。

本文還要用到文 [1] 中的 $h-L$ 轉換公式:

引理2 (**見**[1]): $m\ge 2$, $k\ge 0$ 且 $k\in N$, $L_k(p)=\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{p_i^k}{\prod\limits_{1\le s\le m, s\ne i}(p_i-p_s)}$, 則:

$$h_k(p)=L_{k+m-1}(p).$$

一、求商式 $q(x)$

按文 [1] 的思路, 要求 $q(x)$, $r(x)$, 只需把 $f(x)$ 的各項都除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 找到商式和餘式, 再分別求和。

對於商式 $q(x)$, 只需考慮 $f(x)$ 中次數不低於 m 的項「a_mx^m, $a_{m+1}x^{m+1}$, $\ldots$, a_nx^n」所產生的商式即可。因此我們有必要將 $f(x)$ 拆成兩部分, 即:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=u(x)+v(x),\ \text{其中}\ u(x)=\sum_{i=m}^{n}a_ix^i,\quad v(x)=\sum_{i=0}^{m-1}a_ix^i. \tag{1}$$

另外, 本文的推導中需要截取 $f(x)$ 中的某些連續的項, 因此我們設:

$$u_k(x)=\sum_{i=k}^{n}a_ix^i\qquad (k=m,m+1,\ldots,n). \tag{2}$$

注: (2) 式中的 $u_m(x)$ 即是 (1) 式中的 $u(x)$.

由 $u(x)=u_m(x)=\sum\limits_{i=m}^{n}a_ix^i$, 結合引理 1 可知商式:

$$\begin{aligned}q(x)&=\sum_{i=m}^{n}\left[a_i\sum_{j=0}^{i-m}h_{i-m-j}(p)x^j\right]=\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=0}^{i-m}[a_ih_{i-m-j}(p)x^j]\\&=\sum_{j=0}^{n-m}\sum_{i=m+j}^{n}a_ih_{i-m-j}(p)x^j.\end{aligned} \tag{3}$$

(3) 式給出的 $q(x)$ 的運算式中含有係數 a_i 和完全齊次對稱多項式 $h_{i-m-j}(p)$, 顯得不夠簡潔。下面我們給出 $q(x)$ 的另一種表達形式。

由 (3) 式和引理 2, 在 (3) 式中令 $j=0$, 可得商式 $q(x)$ 中的常數項爲:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}a_ih_{i-m}(p)&=\sum_{i=m}^{n}a_iL_{i-1}(p)=\sum_{i=m}^{n}\left[a_i\sum_{s=1}^{m}\frac{p_s^{i-1}}{\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}\right]\\&=\sum_{i=m}^{n}\sum_{s=1}^{m}\frac{a_ip_s^{i-1}}{\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}=\sum_{i=m}^{n}\sum_{s=1}^{m}\frac{a_ip_s^{i}}{p_s\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}\\&=\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=m}^{n}\frac{a_ip_s^{i}}{p_s\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}=\sum_{s=1}^{m}\frac{\sum\limits_{i=m}^{n}a_ip_s^{i}}{p_s\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}.\end{aligned}$$

結合 (2) 式可知: 上式$=\sum\limits_{s=1}^{m}\dfrac{u_m(p_s)}{p_s\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}$.

同理, 在 (3) 式中令 $j=1$, 可得商式 $q(x)$ 中 x 的係數爲:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m+1}^{n}a_ih_{i-m-1}(p)&=\sum_{i=m+1}^{n}a_iL_{i-2}(p)=\sum_{i=m+1}^{n}\left[a_i\sum_{s=1}^{m}\frac{p_s^{i-2}}{\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}\right]\\
&=\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\frac{a_ip_s^{i-2}}{\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}=\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\frac{a_ip_s^{i}}{p_s^2\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}\\
&=\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=m+1}^{n}\frac{a_ip_s^{i}}{p_s^2\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}=\sum_{s=1}^{m}\frac{\sum\limits_{i=m+1}^{n}a_ip_s^{i}}{p_s^2\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}\\
&=\sum_{s=1}^{m}\frac{u_{m+1}(p_s)}{p_s^2\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}.
\end{aligned}$$

一般地, 可推得商式 $q(x)$ 中 x^j 的係數爲:

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{u_{m+j}(p_s)}{p_s^{j+1}\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne s}(p_s-p_k)}\quad(j=0,1,\ldots,n-m).$$

因此, 我們得到了 (3) 式的如下等價形式:

$$q(x)=\sum_{j=0}^{n-m}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_{m+j}(p_i)}{p_i^{j+1}\cdot\prod\limits_{1\le k\le m,k\ne i}(p_i-p_k)}x^j.\tag{4}$$

二、求餘式 $r(x)$

由引理 1 知: $f(x)$ 的第一部分 $u(x)$ 除以 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 的餘式爲:

$$\sum_{j=1}^{m}u(p_j)\frac{\prod\limits_{1\le i\le m,i\ne j}(x-p_i)}{\prod\limits_{1\le i\le m,i\ne j}(p_j-p_i)}.$$

因此由 (1) 式知餘式

$$r(x)=\sum_{j=1}^{m}u(p_j)\frac{\prod\limits_{1\le i\le m,i\ne j}(x-p_i)}{\prod\limits_{1\le i\le m,i\ne j}(p_j-p_i)}+v(x).$$

注意到 $v(x)$ 和 $\sum_{j=1}^{m} v(p_j)\dfrac{\prod\limits_{1\le i\le m, i\ne j}(x-p_i)}{\prod\limits_{1\le i\le m, i\ne j}(p_j-p_i)}$ 次數都不超過 $m-1$, 而它們在 $x=p_1,p_2,\ldots,p_m$ 處的值都分別相等, 因此

$$v(x)\equiv\sum_{j=1}^{m} v(p_j)\frac{\prod\limits_{1\le i\le m, i\ne j}(x-p_i)}{\prod\limits_{1\le i\le m, i\ne j}(p_j-p_i)}.$$

所以

$$r(x)=\sum_{j=1}^{m}[u(p_j)+v(p_j)]\frac{\prod\limits_{1\le i\le m, i\ne j}(x-p_i)}{\prod\limits_{1\le i\le m, i\ne j}(p_j-p_i)}=\sum_{j=1}^{m} f(p_j)\frac{\prod\limits_{1\le i\le m, i\ne j}(x-p_i)}{\prod\limits_{1\le i\le m, i\ne j}(p_j-p_i)}. \tag{5}$$

由多項式插值理論知, (5) 式有如下等價形式:

$$r(x)=f(p_1)+c_1(x-p_1)+c_2(x-p_1)(x-p_2)+\cdots+c_{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}(x-p_j). \tag{6}$$

其中 c_j 是多項式 $f(x)$ 關於插值點 $p_1,p_2,\ldots,p_j$ 的 j 階差商, c_j 有如下計算公式:

$$c_j=\sum_{i=1}^{j+1}\frac{f(p_i)}{\prod\limits_{1\le k\le j+1, k\ne i}(p_i-p_k)}\qquad (j=1,2,3,\ldots,m-1).$$

注: 由文 [2] 知 (5) 式是多項式 $f(x)$ 關於插值點 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 的次數不超過 $m-1$ 的 Lagrange 插值多項式, 而 (6) 式是 $f(x)$ 在相同插值點處的次數不超過 $m-1$ 的 Newton 插值多項式。而兩者在插值點 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 處的值都分別相等, 因此這兩個多項式是恒等的。

三、結果與實例

綜合第一、二部分中的結果, 我們得到:

定理: 設 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 兩兩不等, $n\ge m\ge 2$, $h_k(p)$ 是 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 的 k 次完全齊次對稱多項式。多項式 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$, $(a_n\ne 0)$, 而 $u_k(x)=\sum\limits_{i=k}^{n}a_ix^i$, $(k=m,m+1,\ldots,n)$, 則 $f(x)$ 除以多項式 $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)$ 的商式 $q(x)$ 由 (3) 式或 (4) 式確定, 而餘式 $r(x)$ 由 (5) 式或 (6) 式確定。

下面我們舉一個例子來驗證這個定理中的 (4)、(5) 兩式。

設 $f(x)=x^6+2x^5+3x^4+4x^3+5x^2+6x+7$, $\prod\limits_{1\le i\le m}(x-p_i)=x(x+1)(x+2)$, 這裡 $n=6$, $m=3$. 因 $\dfrac{u_3(x)}{x}=x^5+2x^4+3x^3+4x^2=x^2(x^3+2x^2+3x+4)$, 所以

$$\frac{u_3(0)}{0}=0,\quad \frac{u_3(-1)}{-1}=2,\quad \frac{u_3(-2)}{-2}=-8.$$

注: $\dfrac{u_3(0)}{0}$ 是將 $x=0$ 代入多項式 $x^5+2x^4+3x^3+4x^2$ 進行計算, 是有意義的(參看 (4) 式的推導過程)。

而 $\prod\limits_{1\le k\le 3,k\ne 1}(p_1-p_k)=2,\quad \prod\limits_{1\le k\le 3,k\ne 2}(p_2-p_k)=-1,\quad \prod\limits_{1\le k\le 3,k\ne 3}(p_3-p_k)=2.$

所以商式中常數項爲:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{u_3(p_i)}{p_i\prod\limits_{1\le k\le 3,k\ne i}(p_i-p_k)}=\frac{0}{2}+\frac{2}{-1}+\frac{-8}{2}=-6.$$

因 $\dfrac{u_4(x)}{x^2}=x^4+2x^3+3x^2=x^2(x^2+2x+3)$, 所以

$$\frac{u_4(0)}{0}=0,\quad \frac{u_4(-1)}{(-1)^2}=2,\quad \frac{u_4(-2)}{(-2)^2}=12.$$

所以商式中 x 的係數爲:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{u_4(p_i)}{p_i^2\prod\limits_{1\le k\le 3,k\ne i}(p_i-p_k)}=\frac{0}{2}+\frac{2}{-1}+\frac{12}{2}=4.$$

同理, 商式中 x^2 的係數爲 $\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{u_5(p_i)}{p_i^3\prod\limits_{1\le k\le 3,k\ne i}(p_i-p_k)}=-1.$

x^3 的係數爲 $\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{u_6(p_i)}{p_i^4\prod\limits_{1\le k\le 3,k\ne i}(p_i-p_k)}=1.$

結合 (4) 式即知商式

$$q(x)=x^3-x^2+4x-6.$$

而由 (5) 式知餘式

$$\begin{aligned}r(x)&=7\times\frac{(x+1)(x+2)}{2}+4\times\frac{x(x+2)}{-1}+31\times\frac{x(x+1)}{2}\\&=15x^2+18x+7.\end{aligned}$$

容易驗證: 上述結果與多項式做長除法時的結果是一致的。

參考資料

1. 陳建燁。商式定理。數學傳播季刊, 41(4), 78-88, 2017。
2. 喻文健。數值分析與算法。北京市: 清華大學出版社, 214-217, 2012。

—本文作者任教中國重慶市長壽龍溪中學—