數學傳播　43卷3期, pp. 56-59

2^n 在分母的級數收斂性質

張進安

等差數列 $\{a_n\}$ 以首項 a_1 和公差 d 爲生成元素, 定義在 N 的一次函數。如果有人告訴你說, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=a_2$ 恰好就是 a_1+d, 對所有等差數列恆成立, 不知道你會不會有所懷疑的問:「真的嗎? 」本文將探討對各種數列 $\{a_n\}$, 逐項除以 2^n 所形成的級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$ 的收斂值和 $\{a_n\}$ 的函數性質的關係。

一、$\{a_n\}$ 爲常數數列, 即 $a_n=c$, 顯然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c}{2^n}=c\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=c$。

二、$a_n=n$ 爲基本的一次數列, 令 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 則

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots,\\
\text{則 } 2S&=1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}+\cdots,\\
\text{則 }\quad S&=2S-S=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,\\
\text{則 }\quad S&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2.
\end{aligned}
$$

我們得到一個很有用的$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}=2$。現在可以來證明 $\{a_n\}$ 爲等差數列 (即 n 的一次函數) 時的收斂情形。

證明: 設 $a_n=a_1+(n-1)d$, 對每一項 $\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{a_1+nd-d}{2^n}$, 所以

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nd}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{2^n}\\
&=a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}-d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\\
&=a_1+2d-d=a_1+d=a_2.
\end{aligned}
$$

這時候, 你也可以將 $a_n = n$ 看成首項和公差都是 1 的等差數列, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} = 1 + 1 = 2$。

三、$\{a_n\}$ 爲 n 的二次函數的數列, 則 $\{a_n\}$ 是二階等差數列, 我們必須先求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$。

令 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = \dfrac{1^2}{2^1} + \dfrac{2^2}{2^2} + \dfrac{3^2}{2^3} + \dfrac{4^2}{2^4} + \cdots + \dfrac{n^2}{2^n} + \cdots$,

則 $2S = 1 + \dfrac{2^2}{2^1} + \dfrac{3^2}{2^2} + \dfrac{4^2}{2^3} + \cdots + \dfrac{n^2}{2^{n-1}} + \cdots$,

則 $S = 2S - S = 1 + \dfrac{2^2-1^2}{2^1} + \dfrac{3^2-2^2}{2^2} + \dfrac{4^2-3^2}{2^3} + \cdots + \dfrac{n^2-(n-1)^2}{2^{n-1}} + \dfrac{(n+1)^2-n^2}{2^n} + \cdots$,

所以 $S = 1 + \dfrac{3}{2^1} + \dfrac{5}{2^2} + \dfrac{7}{2^3} + \cdots + \dfrac{2n+1}{2^n} + \cdots$,

所以 $S = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{2^n} = 1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1 + 2 \cdot 2 + 1 = 6,$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 6.$

當 $a_n = f(n) = a + bn + cn^2$ 時,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn^2}{2^n} \\
&= a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + b\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} + c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \\
&= a + 2b + 6c.
\end{aligned}$$

四、用相同的方法化簡一般項 $\dfrac{(n+1)^3 - n^3}{2^n} = \dfrac{3n^2+3n+1}{2^n}$, 我們可以求出

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 1 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 1 = 26,
\end{aligned}$$

這樣就能解決分子是三階等差數列的問題了。顯然若 $a_n = a + bn + cn^2 + dn^3$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{2^n} = a + 2b + 6c + 26d$。

依此類推對任意正整數 k, 我們都能求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^k}{2^n}$, 也就能解決 k 階等差數列的問題了。

五、$\{a_n\}$ 是等比數列時, 令 $a_n=a_1r^{n-1}$ 則

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1r^{n-1}}{2^n}=\frac{a_1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{a_1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{r}{2}\Big)^{n-1},$$

收斂條件爲 $\left|\dfrac{r}{2}\right|<1$, 所以 $|r|<2$, 收斂值爲 $\dfrac{a_1}{2-r}$。

六、$\{a_n\}$是遞迴數列, 首先看最簡單的費波那契數列, 則$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{F_n}{2^n}=2$, 也是一個令人驚豔的結果。證明如下:

$$\text{令}\quad S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\cdots+\frac{F_n}{2^n}+\cdots,$$

$$\text{則}\ 2S=1+\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{F_n}{2^{n-1}}+\frac{F_{n+1}}{2^n}+\cdots,$$

$$\text{則}\quad S=2S-S=1+\frac{1-1}{2^1}+\frac{2-1}{2^2}+\frac{3-2}{2^3}+\frac{5-3}{2^4}+\cdots+\frac{F_n-F_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{F_{n+1}-F_n}{2^n}+\cdots,$$

$$\text{則}\quad S=1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{F_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{F_n}{2^n}+\cdots\Big),$$

$$\text{所以}\quad S=1+\frac{1}{2}S,$$

$$\text{所以}\quad S=2.$$

我們要用這個重要的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{F_n}{2^n}=2$, 推廣到廣義的費波那契-盧卡斯數列 (Fibonacci-Lucas Sequence)。

首先定義 $L_n(a,b)$ 爲 $L_1=a,\ L_2=b,\ L_{n+2}=L_n+L_{n+1},\ (a,b\in R)$, 則我們有更令人讚賞的結果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{L_n(a,b)}{2^n}=a+b$。

證明如下: 因爲

$$L_n(a,b): a,b,a+b,a+2b,2a+3b,3a+5b,\ldots,$$

顯然 $L_{n+2}=a\cdot F_n+b\cdot F_{n+1}$ 或 $L_n=a\cdot F_{n-2}+b\cdot F_{n-1}\ (n\geq 3)$

$$\begin{aligned}\text{所以}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n}{2^n}&=\frac{a}{2^1}+\frac{b}{2^2}+\frac{a+b}{2^3}+\frac{a+2b}{2^4}+\cdots+\frac{a\cdot F_{n-2}+b\cdot F_{n-1}}{2^n}+\cdots\\&=\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\Big(\frac{a}{2^1}+\frac{a}{2^2}+\frac{2a}{2^3}+\frac{3a}{2^4}+\cdots+\frac{a\cdot F_{n-2}}{2^n}+\cdots\Big)\\&\quad+\Big(\frac{b}{2^2}+\frac{b}{2^3}+\frac{2b}{2^4}+\frac{3b}{2^5}+\cdots+\frac{b\cdot F_{n-1}}{2^n}+\cdots\Big)\\&=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}+\frac{b}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}\cdot 2+\frac{b}{2}\cdot 2=a+b.\end{aligned}$$

至此, 我們再回頭檢視 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(1,1)}{2^n}=1+1=2$, 就只是一個特例了。值得注意的是, 當 $a\neq b$ 時 $L_n(a,b)$ 和 $L_n(b,a)$ 除了第三項外是完全不同的數列, 但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(a,b)}{2^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(b,a)}{2^n}$ 都收斂到 $a+b$, 正好就是第三項。

七、更高次的遞迴數列

如果定義 $L_n(a,b,c)$ 爲 $L_1=a$, $L_2=b$, $L_3=c$, $L_{n+3}=L_n+L_{n+1}+L_{n+2}$ 則 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(a,b,c)}{2^n}=a+b+c$。證明過程和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(a,b)}{2^n}=a+b$ 的證明類似, 或者還想再推更高次的遞迴就留給有興趣的人當練習了。

八、結語

級數 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收斂的必要條件是 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$。所以對一般的等差數列或高階等差數列或遞迴數列 $\{a_n\}$, 都是 n 的函數, 若逐項只除以 n, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ 通常還不會趨近於 0。即使 $\{a_n\}=\{1\}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 還是發散的。而逐項除以 2^n, 在非指數型的數列, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}=0$ 通常都是成立的。而且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 也確實有很多有趣的結果。如果還有人要問, 爲何是 2^n 而不是 3^n, 10^n, 或是不特定的 k^n。你只要對 $|k|>1$, 先求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{k^n}=\frac{k}{(k-1)^2}$ 就會發現, 如果不是 $k=2$ 就多了分母的變化, 收斂的公式就不再如此簡潔漂亮了!

—本文作者爲高雄市中正高中退休教師—