數學傳播 43卷3期, pp. 45-52

隨機性的統一理論

Kevin Hartnett[1]

翻譯：姜義浩

原文刊登於 Quanta Magazine August 2, 2016[2].

研究者發現不同型態的隨機物件之間的深層連繫, 闡明隱藏的幾何結構。

標準的幾何物件可用簡單的規則來描述; 舉例來說, 每一條直線正好都是 $y = ax + b$, 而且彼此之間存在著良好的關係：連接兩點構成直線, 連接四個線段構成正方形, 連接六個正方形構成立方體。

這些都不是麻省理工學院的數學教授 Scott Sheffield 關心的那類物體。他研究的是隨機過程建構出的幾何形狀; 這類物體各不相同。隨機漫步是最爲人熟知的隨機圖形, 它們無處不在, 既見諸財務資產價格上的變化, 也呈現爲量子物理中的粒子路徑。這些漫步被描述爲隨機, 因爲我們無法預知它下一步何去何從, 即使已知它在某個時間點之前的所有軌跡。

除了一維的隨機漫步, 還存在許多其它種類的隨機幾何圖形, 諸如各種隨機路徑、二維隨機曲面, 以及隨機成長模型, 其中的一些模擬青苔在岩石上的散佈方式。所有這些幾何圖形都自然而然地出現在物理世界, 但直到最近, 仍存在於嚴謹數學的範圍之外。著眼於大量隨機路徑或隨機二維幾何圖形時, 數學家很可能無法講出這些隨機物件共有的特性。

然而在過去幾年的工作中, 經常合作的 Sheffield 及劍橋大學 Jason Miller 教授證明了: 這些隨機物件可分成若干類型, 各類型分別有其獨特的性質, 而且某些類型和其他類型有著出人意表的明確關連。他們的工作開創了幾何隨機性 (geometric randomness) 的統一理論。

「考慮一些最自然的物件, 譬如樹、路徑、曲面等等, 而後證明它們互有關連。」Sheffield 說,「一旦有了這些連結, 就可以證明以前不能證明的各種新定理。」

數月之內, Sheffield 與 Miller 將發表一系列三篇論文的完結篇, 提出隨機二維曲面的第一個全面性觀點, 其成就將不亞於歐幾里德的平面映射。

瑞士 ETH 的 Wendelin Werner 教授曾因機率論和統計物理上的工作獲 2006 年菲爾茲獎; 他說：「Scott 和 Jason 已能落實自然的概念, 不受制於技術細節」,「基本上, 他們能夠推導出其它方法看來遙不可及的結果」。

[1] Quanta Magazine 的資深數學作家。

[2] https://www.quantamagazine.org/a-unified-theory-of-randomness-20160802

量子弦上的隨機漫步

在歐氏幾何中, 有趣的幾何物件包括直線、射線, 以及圓或拋物線之類的平滑曲線。這些形體的坐標都具清楚有序的模式, 可用函數表示。舉例來說, 若知直線上的兩點坐標, 就可得知直線上其它各點的坐標。圖 1 中, 在一點輻射出的射線上, 其點坐標亦是如此。

想要著手描繪隨機二維幾何時, 可想像一架飛機。在飛行長途航線時, 譬如從東京到紐約, 飛行員會循直線從一個城市飛至另一個城市。但把航線畫在地圖上時, 看到的是不平直的曲線; 這是球體 (地球) 上的直線映射到平坦紙面的結果。

如果地球不是球狀, 而是更複雜的形體, 甚或以放肆且隨機的方式彎曲, 那麼飛機的軌跡 (展現在平坦二維地圖上) 就會顯得更不規則, 如同圖 2 的射線。

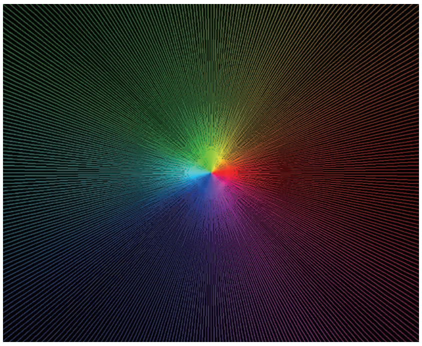

圖 1 : Scott Sheffield 繪製

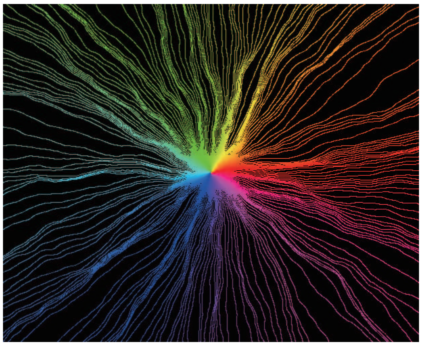

圖 2 : Scott Sheffield 繪製

每條射線呈現飛機從原點出發後的軌跡, 途中它盡可能沿著直線飛越某隨機起伏的幾何曲面。曲面的隨機程度在圖 3 及圖 4 中鮮明呈現 : 隨著隨機程度增加, 射線搖晃且扭曲, 形如更加銳利的鋸齒狀閃電, 幾乎無條理可循。

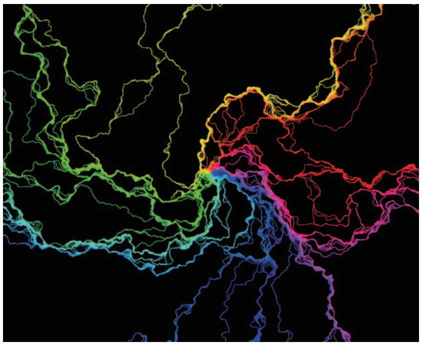

圖 3 : Scott Sheffield 繪製

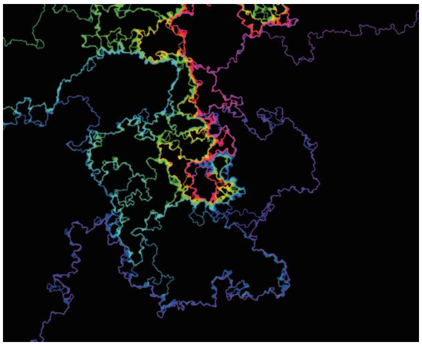

圖 4 : Scott Sheffield 繪製

然而無條理可循並不意味無從理解。在隨機幾何中, 一旦得知某些點的位置, 就可 (在最好

的情況下) 將機率分配給後續點的位置。而就如同做了手腳的骰子仍具隨機性, 但其隨機性不同於正常骰子, 我們仍可用不同的機率測度來產生隨機曲面的點座標。

數學家發現, 並且希望可以繼續發現, 隨機幾何中的某些機率測度極爲特殊, 往往會出現於許多不同的場景。大自然似乎傾向於用一類非常特別的骰子 (有不可數無窮多面的骰子), 去生成它的隨機曲面。Sheffield 及 Miller 等數學家力圖精確理解這些骰子的性質 (以及它們產生的形體的典型性質), 希望能如數學家理解普通球面一般。

循此方式理解的第一類隨機幾何圖形, 就是隨機漫步。就概念上來說, 一維隨機漫步, 正是你反覆丟銅板所得的路徑, 過程中出現正面時往某方向走、出現反面時往反方向走。在現實世界, 這類運動在 1827 年首獲關注, 因當時英國植物學家 Robert Brown 觀察懸浮在水中的花粉隨機移動。這看來隨機的運動, 肇因於個別的水分子撞擊各個花粉。1920 年, MIT 的 Norbert Wiener 教授對這個過程做出準確的數學描述, 名之爲布朗運動。

布朗運動是隨機漫步的「尺度極限 (scaling limit)」; 若隨機漫步的步距很短, 兩步間隔的時間也極短, 則隨機路徑會越來越像布朗運動。隨著時間推移, 布朗運動是幾乎所有隨機漫步趨近的幾何形狀。

對照於此, 最早關注於二維隨機空間的, 是物理學家, 源自他們了解宇宙結構的企圖。

在弦論中, 我們考慮隨時間擺動且演化的細小的弦。如同點的時間軌跡可描繪爲一維曲線, 弦的時間軌跡也可理解爲二維曲線; 這個二維曲線通稱爲世界片 (worldsheet), 蘊藏了一維的弦隨時間擺動所形成的歷史。

「爲理解弦的量子物理」Sheffield 說,「你希望曲面有類似於布朗運動的東西。」

多年來, 物理學家有類似的東西, 至少在某種程度上是如此。1980 年時, 物理學家 Alexander Polyakov (目前在普林斯頓大學) 想到了描述這些曲面的方式, 日後被稱爲 Louiville 量子重力 (LQG)。對隨機二維曲面, 他提供了一個不完整但仍非常有用的看法。特別來說, 它提供物理學家一個定義曲面角度的方法, 讓他們可以計算曲面面積。

同時, 另一種被稱爲布朗映射 (Brownian map) 的模型, 提供了研究隨機二維曲面的不同方法。LQG 讓計算面積變得容易, 而布朗映射的結構允許研究者計算點之間的距離。布朗映射與 LQG 提供了物理學家及數學家兩個互補的觀點, 他們希望這兩個觀點基本上是相同的。但他們無法證明 LQG 和布朗映射彼此相容。

Sheffield 說:「這是個很奇怪的狀況; 對你所謂的最標準的隨機曲面, 有兩個相抗衡的隨機曲面模型, 傳達出關於曲面的不同訊息。」

始自 2013 年, Sheffield 跟 Miller 著手證明：這兩個模型本質上描述的是同一件事。

隨機增長的問題

本世紀初, Sheffield 是史丹佛大學的研究生, 跟著理論機率學家 Amir Dembo 做研究。

Sheffield 在博士論文中提出一個問題, 想在一群複雜的曲面中找出秩序。他把這個問題當成平日的思考練習題。

Sheffield 說 :「我以為這會是非常困難的問題, 要兩百頁才能解決, 並且可能永遠沒人會去研究它。」

但 Miller 出現了。在 Sheffield 畢業多年後, 2006 年時 Miller 去了史丹佛, 也開始跟 Dembo 做研究。Dembo 要他探究 Sheffield 的問題, 藉以理解隨機過程。Sheffield 說 :「Jason 設法解決這個問題, 這讓我很驚訝, 於是我們開始合作研究, 後來有幸請他到 MIT 當博士後。」

為證明 LQG 和布朗映射是二維隨機曲面的等價模型, Sheffield 和 Miller 採取的作法在觀念上十足簡單。他們決定去看看, 可否發明某種方法, 來測量 LQG 曲面上的點距離, 而後證明 : 這個新的距離測度正是布朗映射的距離測度。

因此 Sheffield 和 Miller 考慮設計一個數學尺, 來測量 LQG 曲面上的距離。然而他們立即發現到, 一般量尺無法用在這些隨機曲面; 這個空間如此脫序, 隨意移動筆直的物件, 必然會把它折斷。

於是他倆揚棄了尺, 轉而嘗試將距離問題重新詮釋為成長的問題。要理解這個方法如何運作, 可想像某曲面上成長的菌落; 初始之時它只佔據一個點, 但隨著時間推移, 它向各個方向擴展。要測量兩點的距離, 一個 (看似迂迴的) 方法是讓菌落從某一點開始擴展, 測量該菌落花費多少時間才包含另一點。Sheffield 說, 訣竅是要用某種方法「描述球逐漸增長的過程。」

在普通平面上描述球如何增長是很容易的, 因為所有的點都已知且固定, 增長的方式也為確定。隨機增長描述起來困難許多, 長期困擾數學家。但 Sheffield 和 Miller 很快得知 :「相較平滑曲面, 隨機增長在隨機曲面容易理解些。」在某種意義下, 增長模型的隨機性, 與執行該模型的曲面之隨機性完全一致。Sheffield 說:「你在一個瘋狂的曲面上添加一個瘋狂的增長模型, 但不知何故, 這在某些方面實際上讓事情變得更好。」

下三圖展現特定的隨機增長模型, 即所謂的 Eden 模型。該模型描述菌落的隨機增長, 而菌落的增長仰賴隨機放置在邊界的細菌簇。在任何給定的時間點, 都無法確知下個細菌簇將出現在邊界的何處。在這些圖像中, Miller 和 Sheffield 展示了 Eden 增長如何在隨機二維曲面上進行。

圖 5 展現頗為平坦的 (亦即不特別隨機的) LQG 曲面上的 Eden 增長。成長以有序的方式進行, 幾乎形成同心圓。這些同心圓以色彩編碼, 標示曲面上的不同點發生增長的時間。

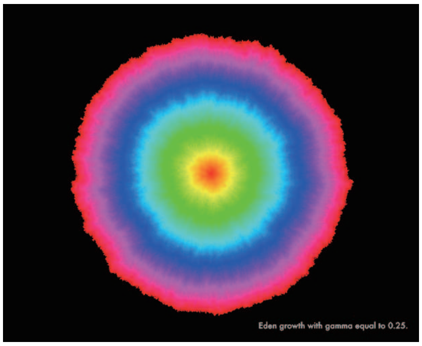

圖5 : $\gamma=0.25$ 的 Eden 模型

Jason Miller 繪製

在圖 6 及圖 7, Sheffield 與 Miller 展示了隨機性較大的曲面上的成長情況。曲面的隨機性是由常數 γ 所控制; 隨著 γ 增加, 曲面變得更爲崎嶇, 有更高的峰及更低的谷, 而曲面上的隨機增長也更爲脫序。圖 5 的 $\gamma = 0.25$, 圖 6 的 γ 定爲 1.25, 引入五倍大的隨機性來建構曲面, 其上的 Eden 增長也相形曲折蜿蜒。

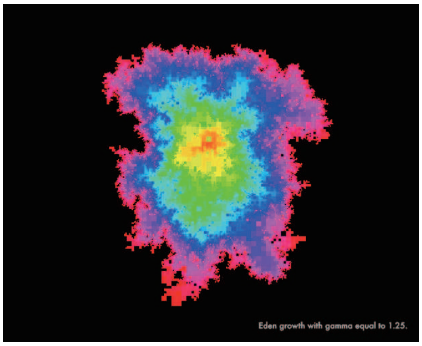

圖 6 : $\gamma = 1.25$ 的 Eden 模型,
Jason Miller 繪製

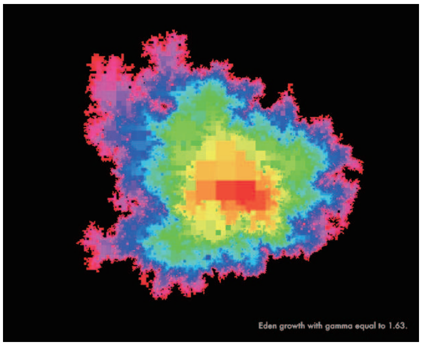

圖 7 : $\gamma = 1.63$ 的 Eden 模型,
Jason Miller 繪製

當 $\gamma = (8/3)^{1/2}$ (大約 1.63) 時, LQG 曲面起伏更形劇烈, 其崎嶇程度與布朗映射可相比擬, 因而可對隨機幾何曲面的兩個模型做更直接的比較。

在如此崎嶇的曲面上, 隨機增長以極不規則的方式進行。要以數學來描述它, 就好比試圖預測颶風中細微的壓力起伏。但 Sheffield 和 Miller 體認到 : 他們需要明確模擬極爲隨機的 LQG 曲面上的 Eden 增長, 方能建立一個與極爲隨機的布朗映射等價的距離結構。

Sheffield 說 :「弄淸楚如何在數學上讓隨機增長具嚴謹性, 是研究工作的巨大絆腳石。你總是需要某種神奇的巧妙技巧來達成。」我們注意到 : Warwick 大學的 Martin Hairer 獲 2014 年菲爾茲獎的工作, 克服的正是此種障礙。

隨機探索

Sheffield 和 Miller 的妙技植基於某特殊類型的隨機一維曲線, 它們和隨機漫步類似, 但不能自相交。物理學家已長年遭逢這類型的曲線, 譬如正旋粒子簇與負旋粒子簇的交界 (粒子簇的邊界是無自相交且隨機成形的一維路徑)。他們知道這種隨機且不自相交的路徑發生在大自然, 一如 Robert Brown 在大自然觀察到隨機且自相交的路徑, 但他們不知道如何以某種精確的方式思考它們。1999 年時, 任職於華盛頓州 Redmond 微軟研究院的 Oded Schramm 引進 SLE (Schramm-Loewner evolution) 曲線, 作爲不自相交隨機曲線的典範。

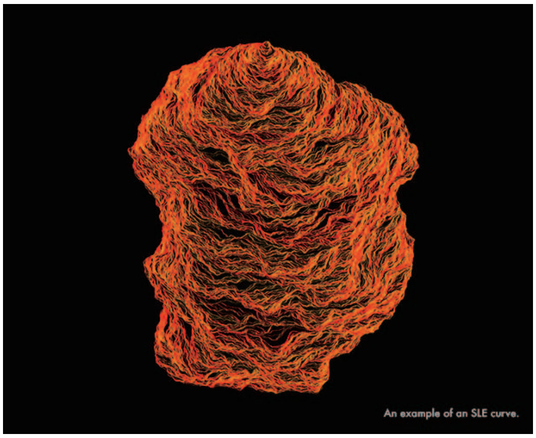

圖8：SLE 曲線, Jason Miller 繪製

Schramm 關於 SLE 曲線的工作, 是隨機物件研究的里程碑。Schramm 在 2008 年因登山意外喪生; 一般的共識是, 如果他早幾個禮拜發表成果, 就會獲菲爾茲獎 (菲爾茲獎只頒發給四十歲以下的數學家)。事實上, 他的兩位合作者承襲他的工作而獲此獎項：Wendelin Werner 於 2006 年, Stanislav Smirnov 於 2010 年。更重要的是, SLE 曲線的發現, 使得隨機物件的諸多事項能被證明。

Sheffield 是 Schramm 的朋友及合作者; 他說：「由於 Schramm 的工作, 很多物理方面的東西, 原本用物理的方式看來是對的, 現在突然進入到可用數學來證明的範圍內。」

對 Miller 和 Sheffield 來說, SLE 曲線以出人意表的方式變得非常有價值。爲了要在 LQG 曲面上測量距離, 從而證明 LQG 曲面和布朗映射是同一回事, 他們需要找到方法來爲隨機曲面上的隨機增長建立模型。SLE 正是這種方法。Miller 說:「令人振奮的一刻是當我們體認到：可以用 SLE 建構隨機增長, 並且 SLE 和 LQG 之間存有關連。」

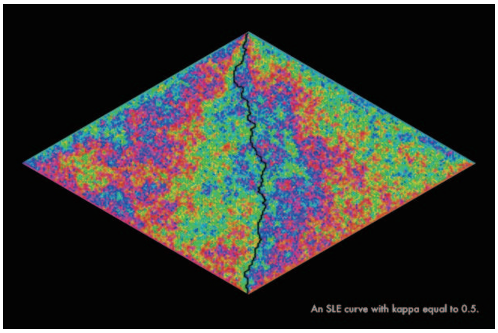

圖9：$\kappa=0.5$ 的 SLE 模型, Scott Sheffield 繪製

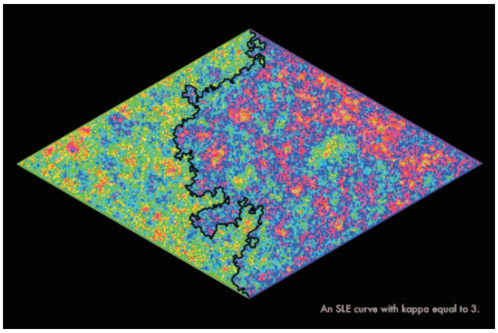

圖10：$\kappa=3$ 的 SLE 模型, Scott Sheffield 繪製

SLE曲線有個常數 κ , 扮演的角色類似於 LQG 曲線上的 γ。γ 描述 LQG 曲面的崎嶇程度, 而 κ 描述了 SLE 的起伏變動。當 κ 極小時, 曲線看起來像直線。隨著 κ 變大, 建構曲線的函數有了更大的隨機性, 曲線也變得更無規範, 儘管仍恪遵可反彈但不可自相交的規則。圖 9 是 $\kappa = 0.5$ 的 SLE 曲線, 圖 10 是 $\kappa = 3$ 的 SLE 曲線。

Sheffield 和 Miller 注意到：當他們把 κ 調整爲 6 而 $\gamma = (8/3)^{1/2}$ 時, 隨機曲面上的 SLE 曲線遵循某種探索過程。藉由 Schramm 和 Smirnov 的工作, Sheffield 和 Miller 知道：當 $\kappa = 6$ 時, SLE 曲線遵循「盲人探索家」的軌跡; 探索家行走時營造步道以標誌路徑：她盡可能隨機地移動, 除非觸及某段曾走過的路徑, 此時她轉身離開此段路徑, 以避免穿越自己的路徑或陷入死胡同。

Sheffield 說：「探索家發現, 每當她的路徑觸及自身, 就會割捨那塊被路徑完全包圍的土地, 她也就不能再造訪該地。」

Sheffield 和 Miller 接著考慮細菌成長的 Eden 模型。該模型在隨機曲面上推進時也有類似效果：它以擠掉地域的方式成長, 而後不再造訪舊地。被不斷增長的菌落擠掉的地域, 看起來與盲人探險家切割掉的土地完全相同。尤有甚者, 在任何時間點, 盲人探索家對隨機曲面上未探索區域所擁有的資訊, 和菌落擁有的資訊完全相同。兩者之間的唯一區別是, 菌落從其外側邊界的所有點同時增長, 而盲人探險家的 SLE 路徑只能從其尖端增長。

在一篇 2013 年發表於網路的論文中, Sheffield 及 Miller 想像：在盲人探索家造訪過的領土之邊界上, 如果每隔幾分鐘, 她就神奇地被送到隨機新地點, 將會發生何事? 藉著環繞邊界移動, 她將從各邊界點有效地同時增長路徑, 就如菌落一般。於是他們可以用一些已理解的事情, 亦即 SLE 曲線如何在隨機曲面上推進, 再藉由某些特別配置, 證明曲線的演變恰好描述了一個他們還未能理解的過程, 亦即隨機成長。Sheffield 說：「SLE 和增長之間的關係有些特別之處, 這就是讓一切成爲可能的奇蹟。」

藉由精確的理解這些曲面上隨機增長行爲, LQG 曲面的距離結構證實等價於布朗映射上的距離結構。因此, Sheffield 跟 Miller 把兩個不同的隨機二維形狀模型合併, 形成一個連貫且數學上已被理解的基礎項目。

把隨機變成一種工具

Sheffield 及 Miller 已發表兩篇文章證明 LQG 和布朗映射等價, 登載於科學預印本網站 arxiv.org; 他們並打算在今年夏天公布最後的第三篇。這些工作讓我們開始有能力探討不同的隨機形體及過程, 諸如: 了解隨機不自相交曲線、隨機增長, 以及隨機二維曲面之間如何相互關連。在隨機幾何的研究中, 可能會出現越來越繁複的結果, 這是一例。

Sheffield 說：「這就像你在山上有三個不同的洞穴, 一個有鐵, 一個有金, 一個有銅。突然間你找到連接三個洞穴的方法。有了這些元素, 你既可用它們建構一些東西, 也可以結合它們,

來製造之前不能建構的各種東西。」

很多問題尚待解決, 包括：在 LQG 曲面較平滑的情況, 判斷 SLE 曲線、隨機增長模型, 及距離量度之間的關係是否成立。實際上, Sheffield 和 Miller 的結果可用來描述實際現象, 譬如雪花、礦藏, 及洞穴中樹突的隨機增長, 但惟當這些隨機增長發生在想像世界中的隨機曲面才可如此。至於他們的方法可否應用到一般歐氏空間, 譬如我們所居住的空間, 就有待觀察了。