數學傳播 43卷3期, pp. 43-44

再談抽籤的公平性

吳建生 · 張海潮

數學傳播 43 卷 2 期 (108 年 6月) 刊出一篇周伯欣老師的作品《抽籤的公平性》, 討論下列問題 (見周文 p.50)。

籤筒中共有 n 支籤 $(n \geq 1)$, 其中 k 支有獎 $(1 \leq k \leq n)$, 今有 p 個人依序來抽籤 $(1 \leq p \leq n)$, 抽後不放回, 命第 i 個人 $(1 \leq i \leq p)$ 中獎的事件爲 A_i。

周老師詳細計算了 $P(A_i)$, 得到 $P(A_i) = \frac{k}{n}$, 對所有 i 均成立 (見周文 p.54), 也就是說, 先抽後抽並無區別。

周文刊出後, 高雄女中的退休老師吳建生告訴我一個直接的看法。他的看法是: 只要證明這 p 個人中, 任兩位前後抽籤者中獎的機率都一樣, 就可以得出第 i 個人中獎的機率是 $\frac{k}{n}$ (因爲第 1 個人中獎的機率是 $\frac{k}{n}$)。

證明方式如下: 假設在這 p 個抽籤者中, 甲是第 q 位, 乙是第 $q+1$ 位, 而前面 $q-1$ 位都已經抽過了, 這時, 籤筒中還剩下 $n-(q-1)$ 支籤。前面這 $q-1$ 位也許抽到了一些有獎的籤, 不管如何, 籤筒中還剩下 l 支有獎的籤 (l 也許是 0)。令 $n-(q-1)=m$, 因爲甲和乙還沒抽, 所以當然 $m \geq 2$, 並且這 m 支籤中有 l 支有獎, $l \geq 0$。

(**情形一**): 如果 $l = 0$, 則甲和乙抽中獎籤的機率都是 0。

(**情形二**): 如果 $l \geq 1$, 則甲抽中獎的機率是 $\frac{l}{m}$, 甲抽不中的機率 $\frac{m-l}{m}$, 如果甲抽中, 則乙也抽中的機率是 $\frac{l-1}{m-1}$, 如果甲抽不中, 則乙抽中的機率是 $\frac{l}{m-1}$, 所以乙中獎的機率是

$$\begin{aligned}\frac{l}{m}\cdot\frac{l-1}{m-1}+\frac{m-l}{m}\cdot\frac{l}{m-1} &= \frac{l^2-l+ml-l^2}{m(m-1)}\\ &= \frac{l(m-l)}{m(m-1)}\\ &= \frac{l}{m},\end{aligned}$$

因此甲、乙兩人中獎的機率相等, 都是 $\dfrac{l}{m}$。

因爲這 p 個抽獎者, 任兩位前後抽獎的中獎機率都相等, 因此所有 p 位中獎的機率當然也相等, 都是 $\frac{k}{n}$, $\frac{k}{n}$ 其實也是第一位和第二位中獎的機率。

讀者也許困惑, 在上述的計算中, 甲、乙中獎的機是 $\frac{l}{m}$ 而非 $\frac{k}{n}$。這是因爲甲、乙來抽的時候, 前面的抽獎者已經讓籤的內容發生變化, 因此 $\frac{l}{m}$ 其實是對不同的 l 所計算的條件機率。重點是, 甲、乙兩人先抽後抽並無區別。

參考資料

1. 周伯欣。抽籤的公平性。數學傳播季刊, 43(2), 49-54, 2019。

—本文作者吳建生爲高雄女中的退休老師, 張海潮爲台大數學系退休教授—