數學傳播　43卷3期, pp. 32-42

用函數來思考 (上)

林琦焜

1. 歷史 — 教育的指南

『比我聰明、有學問的人從歷史發現出布局、韻律、預定的模式。這種種和諧我看不出來。我所看到的只是緊急事件一個接著一個發生, 有如海浪一波接著一波。關於歷史, 鑑於它的獨特性, 只有一點是眞的, 那就是對於歷史我們沒有辦法概括化; 對於學歷史的人只有一個定律 — 那就是他應該在人類命運的發展中意識到意外和不能預見的事所扮演的角色。這並不是消極和懷疑。進步的事實很清楚的寫在歷史書上, 但進步卻非自然的定律。上一代的成就可能在下一代輸光, 人的思想可能被引入通往災難、野蠻之路。』

— 《*A History of Europe*》, H.A.L. Fisher(1865∼1940) —

單純的歷史只是冰冷的往事, 是些已經發生、不再重現的遺跡, 所以是「不眞的」, 因為那裏沒有決斷的自由, 因此也沒有生命、沒有意義。真正的歷史並不是客觀地描述過去所發生的事件, 而是尋求事件的意義。真正的歷史是我們必須與研究的歷史進行「對話」, 使歷史再一次活現出來。

對於近代的文明與科學有興趣的人, 不能不對「文藝復興」、「宗教改革」與「啓蒙運動」有特別的情感。為何會發生文藝復興? 簡單的答案是《有交流就有改變》。由於十字軍東征, 迫使西方基督教世界與回教世界接觸, 並從中尋獲已失落千年的古希臘遺產。

文藝復興 (renaissance) 這個字是「重生」的意思, 它是指古代藝術文化 (特別是古希臘文化) 的再生。另外我們也說它是「人道主義」的復興, 因為在漫長的中世紀, 生命中的一切都是從神 (或教會) 的觀點來解釋, 但到了文藝復興時期, 一切又重新以人為中心。它最重要影響是改變了大家對人本身的看法, 文藝復興時期的人文主義精神使得大家對人本身和人的價值重新產生了信心。這時期有一項重要的發明 — 時鐘。這是古老的世界所沒有的, 鐘錶自然成為第谷 (Tycho Brahe, 1546∼1601) 與克卜勒 (Johannes Kepler, 1571∼1630) 研究行星運動的重要工具。這時期由於實際的需要和各門學科的發展, 使得自然科學轉向對《運動》的

研究, 對各種變化過程和各個變化著的量之間的依賴關係的研究。所以在數學中就產生了「變量」和「函數」的概念。要研究變化自然就需要「微分」的觀念。因此如果要問：既然阿基米得 (Archimedes 287?∼212B.C.) 已經有極限的概念, 為何沒有發明微積分？ 合理的答案是:

> *阿基米得只會積分不會微分, 但是牛頓與萊布尼茲則同時會積分也會微分。*

並不是阿基米得才智不如他們二人, 我們只能說那是歷史的無奈。在生活中只有遲緩的牛車或馬車是無法想像瞬間速度 (變化) 這件事, 更不用說*瞬間加速度*。古希臘思想對於嚴謹性的要求, 使得全等成為幾何的基礎, 並且不允許混淆離散 (discrete) 與連續 (continuous), 但是這種要求無法滿足動力學的嘗試。此外古希臘天文學也缺少加速度的概念, 一切都是平均速度, 所以行星只能是圓周運動。整體而言他們所缺少的就是*變化或改變* (change) 的概念。雖然阿基米得已經十分接近微分和積分的計算, 但卻停留在靜力學問題的範圍之內, 只有等到研究運動的時候, 產生了《*變量*》與《*函數*》的概念, 才促成微積分與數學分析的形成, 才會有牛頓科學革命的成功。

人類的歷史經由漫長的中古世紀來到文藝復興, 也正是數學的歷史由漫長的常量數學時期進展到變量數學時代, 換句話說就是從數進展到*函數*的數學史。只要若干量之間有一定的物理關係就會出現函數的概念。函數發展史最重要的奠基者應屬於法國數學家笛卡兒 (René Descartes, 1596∼1650) 與費馬 (Pierre de Fermat, 1601∼1665), 他們所引進的座標系統, 例如平面上的點以 (x, y) 表示, 從此取代歐幾里得那種模糊的幾何定義方式。而且還進一步提出 x 與 y 這兩個數有某種關係, 也就是說 x 的每一個值都對應著一個唯一的y值, 換言之, x 與 y 構成了一種函數關係。以費馬而言, 他寫道:「*每當我們找到兩個未知量的等式, 我們就有一條軌跡, 它描寫的不外乎是一條直線或曲線。*」費馬是從一個代數表達式開始, 然後根據這個表達式在平面上勾勒出一個幾何圖形, 他的預見使得後來的數學家們可以可以通過更複雜的方程式繪製新的曲線。這是數學史上最有意義的陳述之一。笛卡兒則是從幾何問題出發並運用代數技巧來求解。

> *『幾何的任何問題都可以簡化為這樣的關係式, 例如從特定直線的長度就足以知道它的結構 .... 我毫不猶豫地把這些算術關係引入到幾何中。』*

笛卡兒的思想為幾乎所有事物之系統化數學處理開了一扇門。另外笛卡兒的思想也拓展了數學的研究範圍, 為後來的《*分析(analysis)*》舖平了道路, 而數學特別是分析這門學問正是解開大自然奧秘之鑰。藉著分析或解析方法, 我們能運用簡單的方程式來描述整個族類的曲線之性質。笛卡兒也確信這種在數學領域上應用得如此順利的方法應當也可擴展至其他領域, 從而使探索者獲得如數學中的確定性。這就是他的名著《*方法導論*》的主要精髓, 其中最重要是底下四個原則:

1. 除了清晰且明白的觀念外, 絕不接受任何事物為真。

2. 我們應盡可能地把每一個問題分解成解決它所需的各個部分。
3. 思想必須遵循由簡單到複雜的次序進展, 如果沒有次序時, 我們就必須假設出一個次序來。
4. 我們應該經常徹底檢查一切, 以確保沒有任何被遺漏的地方。

通常我們將笛卡兒視爲近代哲學之父, 他的著作有股清新氣息, 他並不以教師的身分寫作, 而是以發現者與探索者的姿態執筆, 渴望將自己的心得傳達給人。他的文章平易近人且不迂腐, 並不是供學生上課念的, 而是供一般明白事理的人看的。近代哲學的開拓者有如此可佩的文學素養是值得慶幸的。

哥廷根偉大數學傳統的建立者 Felix Klein (1849～1925) 不僅是了不起的數學家更是不世出的數學經理人, 哥廷根的數學在他的帶領下不僅超越柏林大學且與法國的巴黎大學並駕齊驅, 號稱數學的中心 (聖地)。但他的格局並沒有侷限在數學, 年紀稍長時找來 Arnold Sommerfeld (1868～1951) 發展理論物理, 所以哥廷根不僅是數學的中心也是物理的中心。但是更令人驚訝的是 1904 年的第三屆國際數學家大會 Felix Klein 在聽完 Ludwig Prandtl (1875～1953) 十分鐘關於流體力學邊界層理論 (boundary layer theory) 的報告 (Prandtl 那時還是小人物! 只能給十分鐘的演講), 馬上警覺到 Prandtl 研究的重要性, 並將 Prandtl 延攬至理論物理研究所, 從此哥廷根更一舉成爲現代流體力學的發源地。Felix Klein 更令人欽佩的是他觀察到教育的根本重要性, 因此在哥廷根大學爲德國中學數學教師及在校學生開設講座, 強調要用近代數學的觀點來改造傳統的中學數學內容。Felix Klein 於 19 世紀末在德國領導的數學教育改革的口號就是「用函數來思考」。他的思想正是這篇文章寫作的動機。

我們已經知道數學中專門研究函數的這門學問叫做分析 (analysis), 如果說古希臘的數學是幾何的話, 那麼牛頓之後的數學的中心便是分析。函數是所有數學中最重要的概念, 藉由它人們才第一次對於大自然各種變化的過程提供了計量上的研究, 函數是數學的靈魂、貫穿了數學之理論與應用的每一個角落。20 世紀初由於理論物理 (特別是量子力學) 的革命性發展促進偏微分方程與相關數學的發展, 此時數學研究的對象是「函數的函數」, 這門學問就是泛函分析 (Functional Analysis), 而其中最重要的是廣義函數論 (Generalized Function) 或荷佈理論 (Distribution)。

2. 函數簡史

關於函數 (function) 的歷史有幾個重要里程碑:

1. 1694年德國數學家萊布尼茲 (Gottfried von Leibniz 1646～1716) 是歷史上第一位使用函數 (function) 拉丁文 (functio) 這個名詞。這名詞出現在他的拉丁文手稿《*Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus*》, 他也是第一位使用 x 的函數 (function of x) 這個慣用語。但是萊布尼茲的函數概念非常狹義, 過分地限制在幾何的領域內。對他而

言, 函數指的是跟隨一曲線上的點而變動的量, 譬如切線長、法線長、次切線、縱坐標等等。

2. 1718年瑞士數學家 Bernonlli 家族的 John Bernonlli(1667～1748) 使用數學符號φx表示函數, 並給出了一個脫離幾何語言的函數定義:

『一個變量的函數是由該變量與一些常數在某種方式之下所形成的量。』

事實上, 對於 Leibniz, Bernoulli 而言他們只對冪函數、三角函數這一類個別的例子才使用函數的概念。

3. 1738年瑞士數學家 L. Euler (1707～1783) 與法國數學家 Clairaut (1713～1765) 正式以 $f(x)$ 表示函數, 這個符號一直沿用至今。Euler 甚至在 1749 年給函數一個清楚的定義:

『一個與另一個變量相關的變量, 函數是另外的量相關的量, 當第二個量變化時, 第一個量也相應的變化。』

但是 Euler 以及同時代的其他數學家要求函數必須由一個算式表達出來, $y = f(x)$, 根據他們的觀點, 下列表達式

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

不是一個函數, 而是兩個函數。不過, Euler 卻是第一個突出函數概念的數學家, 並且對所有初等函數 (elementary functions) 以及它們的微分與積分做了系統研究與分類。此外, Euler 已經有代數函數與超越函數的區分。

4. D. Bernoulli (1700～1782) 在研究弦振盪方程式時, 獲得了一個稱爲三角級數 (即後來的 Fourier 級數) 形式的解; 同時代的法國數學家 d'Alembert (1717～1783) 也解決了同樣的問題但卻是 完全不同形式的解。Daniel Bernoulli 的解雖然是一個無窮級數但卻是單一的算式, 但 d'Alembert 的解則是由許多算式所表示, 因此衆人都懷疑 D. Bernoulli 並沒有得到所有的解。D. Bernoulli 從物理的眼光相信所有的函數都可以表示爲三角級數的形式, 所以引發著名的學術論戰。爲此幾乎所有十八世紀卓越的數學家都加入這場論戰; 例如 L. Euler、J. d'Alembert , 後來法國大數學家 Lagrange (1736～1813) 也投入, 他們幾乎一致反對 D. Bernoulli 的想法。綜觀這次的辯論; 本質上是環繞在 函數的概念而進行。對十八世紀的數學家而言, 函數必須由單一個算式表達出來。

5. 1800年左右法國大數學家 Lagrange 在《解析函數論》中就是以冪級數爲出發點, 並將函數的概念限制於所謂的解析函數

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots,$$

當然只有在收斂區域內上式才能夠定義一個函數。但是他只是形式地應用冪級數, 並不爲收斂性問題而操心。

6. 函數概念的進一步發展要歸功於法國數學家 Joseph Fourier (1768∼1830), 十九世紀初他由研究熱傳導方程著手, 針對前一個世紀 J. d'Alembert 與 D. Bernoulli 之爭論做了完整的解答:

 『在不同的區間一個三角級數的和可用不同的算式表達。』

 同時他給函數下一個新的定義, 強調對於函數的重點是指定之數值, 至於是否由單一算式給出並不重要, 除了釐清函數的概念之外 Fourier 也將十八世紀這場論戰精鍊成 Fourier 級數這門學問 之後他更將之推廣為 Fourier 積分 (這部分是他的創見否則 D. Bernoulli 與 L. Euler 早就得出 Fourier 級數)。

7. 德國數學家 Dirichlet (1805∼1859) 追隨 Fourier 研究 Fourier 級數的收斂性問題, 他將 Fourier 的結果加以精鍊證明: 任何已知的曲線都是三角級數和的圖形。他甚至還改善了 Fourier 對函數的定義並將 Euler 的思想加以算術化:

 『若對每一個變數 x 的值, 總有唯一的變數 y 之值與它對應, 則變數 y 就是變數 x 的函數。』

 這個定義的好處是我們根本不需要任何的算式, 函數是一個規則, 它告訴我們說, 變數 x 之值固定了, 其相應唯一的 y 值就是什麼。函數不一定要是個式子, 它只要能說清楚 x 到 y 之間的對應是什麼就可以, 因此可以直接推廣或抽象化到集合論, 例如 Dirichlet 研究 Fourier 級數的收斂性問題時就出現著名的 Dirichlet 函數

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q},\end{cases}$$

 這樣的函數根本無法用圖形來表示, Dirichlet的定義在本質上是定義在自變數 (independent variable) 上的數值函數, 再往前推的話, 就可以將函數定義在任何的集合上, 而這就是函數的近代定義。至此認為函數只是一種「解析表現式」的形式主義的觀點, 終於讓步於把函數視為「變量之間的關係」的認知。

8. 法國數學家 A. Cauchy (1789∼1857) 對於函數的看法是從批判他的同胞, 德高望重的 Lagrange 出發的:

 『我拒絕通過無窮級數將函數進行展開的做法。』

 Cauchy 曾經研究函數

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

 並證明 $f(x)$ 及其在 $x=0$ 的各階導數都等於 0, 因此按 Taylor 級數

$$f(x)=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots=0\,.$$

這顯然不是原來的函數。這說明 Lagrange 定義函數的侷限。Cauchy 在 1821 年利用關係 (relation) 明確給函數下了現代定義:

> 『在某些變數之間存在著着一定的關係, 只要其中某一變數的值給定了, 其它變數的值可隨之而確定時, 則將最初的變數叫自變量, 其它各變數就叫做函數。』

對 Cauchy 而言, 函數爲兩集合間的某種對應關係: 當集合 A 中的每一個元素在集中 B 皆恰有 (有且僅有) 一個元素與其對應, 我們稱這種對應關係爲一從集合 A 對應至集合 B 的一個函數關係。函數就像是一個「機器」, 它能夠將集合 A 裡面的每一個元素「唯一地」對應到集合 B 裡的一個元素。每給定一個集合 A (定義域) 內的元素, 就能對應到集合 B (對應域)。函數不過是一種規則, 它賦予任何輸入值獨一無二的輸出值。輸入值與輸出值甚至不需要真的是數字 (number), 而那種規則自然也不需要一個明確的表達式。

這就是函數的簡史, 但是真正的先驅則是 17 世紀笛卡兒 (Rene Decartes, 1596∼1650)、費馬 (Fermat, 1601∼1665) 創立的解析幾何, 將變量這個觀念引進數學, 爲微積分的發展鋪平了道路, 而且與代數的結合, 同時也帶來幾何學根本之改變。也因爲如此文藝復興時代的數學才得以超越古希臘人的成就。1637 年笛卡兒在他的《幾何學》中奠定了解析幾何的基礎 — 使平面上的曲線與有兩個未知數的代數方程式之間建立了聯繫, 這對變量數學的建立起著決定性的作用。要說明笛卡兒成功之處, 我們比較一下歐幾里得與笛卡兒關於圓 (假設圓心在原點) 的定義:

1. 歐幾里得:平面上所有跟一定點 O 等距離的點所成的軌跡叫做圓。
2. 笛卡兒:圓是由滿足方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ 的 (x, y) 所形成之集合。

希臘人的數學是幾何的, 阿基米德的著作中連一個公式都沒有; 甚麼都用文字與圖形來描述。到了17世紀, 人們覺得這種幾何的方法簡直是緊身衣, 最後終於把它擺脫掉。笛卡兒採用代數的語言來表示幾何性質, 這使得他提出了許多定理的簡單證明, 而這些定理若用傳統的幾何方法來處理是極其困難的。這裡笛卡兒最重要的貢獻將代數由文字敘述式轉變爲以符號描述的方程式, 從此代數與幾何不再是兩門獨立的數學分支, 並且它們表達了相同的真理。這是整個數學發展史最重要的旅程碑, 也是有史以來精確科學最大的一次進步。想瞭解數學但不使用方程式, 猶如想瞭解偉大的藝術卻不看畫, 這絕對是不可能的。把幾何從可見的範疇、把代數從數量或大小的觀念解脫出來, 然後兩者結合不再有代數與幾何之分、並超越圖像與計算的基本限制, 而形成「函數論」偉大結構, 這就是文藝復興之後數學最大的成就。

> 『當代數與幾何沿著它們各自的道路獨立前進時, 其進展是緩慢的, 而且應用範圍也有許多限制。但是, 當這兩門學科結合在一起, 它們相互從對方汲取新鮮的活力, 相輔相成, 並且以快速的步伐邁向完美。』
>
> —J. Lagrange(1736∼1814)—

對於深刻的思想家而言, 笛卡兒的幾何便有一種要超越三度經驗空間的傾向。例如, 空間的點不再像古希臘數學家侷限在可見的範疇而代之以座標 (x, y, z), 此時我們已不再有任何理由反對更一般的形式 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$。再以乘冪而言, 其起源是面積: a^2、體積: a^3, 但是當乘冪脫離了原來的限制, 經由無理指數、複數指數而進入「函數」的領域時, 它便成爲一個映射 (map) 或關係 (relation), 這就是進入高維度空間的第一步。函數是一個變量對另一個變量的依賴關係的抽象模型, 我們把數學中專門研究函數的領域叫做分析(或數學分析), 有時候也稱作無窮小量分析, 是因爲無窮小量之概念是研究函數的重要工具。在現代的觀念中, 無窮小法就是極限的方法。數學中的極限法的創造是對那些不能夠用算術、代數或幾何的方法求解的問題進行探索的結果。只有當「無窮小量」的概念轉換成「比任何可能的數都要小」的觀念時, 才產生變數的概念, 從而解決極限的問題。當這種變數脫離原有「數量大小」的性質, 極限不再侷限在對某一個數值的趨近, 那麼它就提昇到函數的地位, 它本身就是逼近, 便是過程與運算, 所以極限不是一種「狀態」而是一種關係 (relation)。

[**註解**]:

1. 在牛頓的時代, 函數 (function) 一詞僅被理解爲很好的東西, 有時是指多項式, 有時候指有理函數, 但在任何情況下, 它們都在自己的定義域中是解析, 且可以展開爲 Taylor 級數。
2. 分析 (analysis) 或數學分析是一個相當難定義的概念, 牛頓將分析理解爲藉助於無窮級數來研究方程式, 換言之, 牛頓的基本發現歸結爲:一切都應當展開成無窮級數。他曾說:「有限項能做的, 無限多項也能做, 這種無限多項的做法稱爲分析。」牛頓用分析這個術語表示研究 (即藉助無窮級數來研究曲線, 研究運動, 亦即研究我們今天所謂的函數或映射)。分析 (analysis) 的原文 (拉丁文) 與解剖學有關, 意思是將一個整體拆解爲各個細部之組合。
3. Function(函數) 一詞的中文或日文翻譯: 函數, 函: 的意思是信函或盒子, 數: 則是實數

   $$函 + 數 = 函數$$

   信函或盒子相當於機器, 所以函數意思是輸入數(input); 經由信函或盒子 (機器) 作用後的產品 (output) 就是函數。
4. 對於非數學家而言 Function 主要的意思是: 機能, 作用; 有一年參加劉太平老師在 Stanford 大學舉辦的研討會, 會中看到 Prof. Marshall Slemod (U. of Wisconsin Madison 分校) 的 T-恤上有一段文字

   『*Old mathematicians never die, they just lose some of their functions.*』

   Prof. Marshall Slemod 跟我講這是女兒寫給他的, 這真是非常有趣的雙關語。

3. 函數的基本觀念

『這本書《無窮分析引論》可能是最具影響力的現代教科書。正是這一著作使函數概念成爲了數學的基礎。它普及了對數的指數定義以及三角函數的比率定義。它明確了代數函數和超越函數之間的差異以及初等函數和高等函數之間的差異。它開發了極座標的使用和曲線的參數表示的使用。現在很多我們習以爲常的記法都來自於它。一句話,《無窮分析引論》爲初等分析所做的一切就如同歐幾里德的幾何原本爲幾何所做的一切一樣。』

— Carl Boyer (數學史學家) —

Euler 是第一個突出函數概念的數學家, 並且對所有的初等函數及其微分與積分做了系統研究與分類。他在這本書中把數學分析定義爲:「對函數及其性質的研究」。他首先區分了常量與變量並於 1749 年定義函數爲:

『若某些量與其它量有關, 後者有變化時前者也跟著變化, 則前量稱爲後量的函數。無論以任何方式決定此關連都可以。所以, 若 x 爲一變量, 所有由它所決定的或以任何方式與之關連的都叫做它的函數。』

這裡前量就是 y 後量爲 x, 表示爲現代的語言爲 $y = f(x)$。這樣定義函數的方式已足夠, 但是更深層的發展一個比較廣義且抽象的定義實屬必要。

定義 3.1.(**函數**): 若函數 f 是由集合 A 映入集合 B 的映射, 則存在非空有元素對 $(x, y) \in f$, 其中 $x \in X \subset A$、$y \in Y \subset B$, 且對於每一個 $x \in X$, 恰存在一個 $y \in Y$ 與之對應。

在這裡我們清楚看到函數從 Euler 到 Cauchy 的演變:

1. Euler: $x \mapsto y = f(x)$ (關係: relation) ,
2. Cauchy:$(x, y) \in f$ (序對: order pair) .

以牛頓運動第二定律 $F = ma$ 而言就是函數, 它告訴我們: 一個不變的力作用到一個質量不變的物體上, 將產生一個不變的加速度。按定義 3.1 我們可以直接這麼說：一對一映射是函數, 多對一映射是函數, 一對多映射不是函數。或許還是請笛卡兒來幫忙比較容易。我們看四個方程式:

1. $y = x$ (◯)
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (×)
3. $y = x^2$ (◯)
4. $x = y^2$ (×)

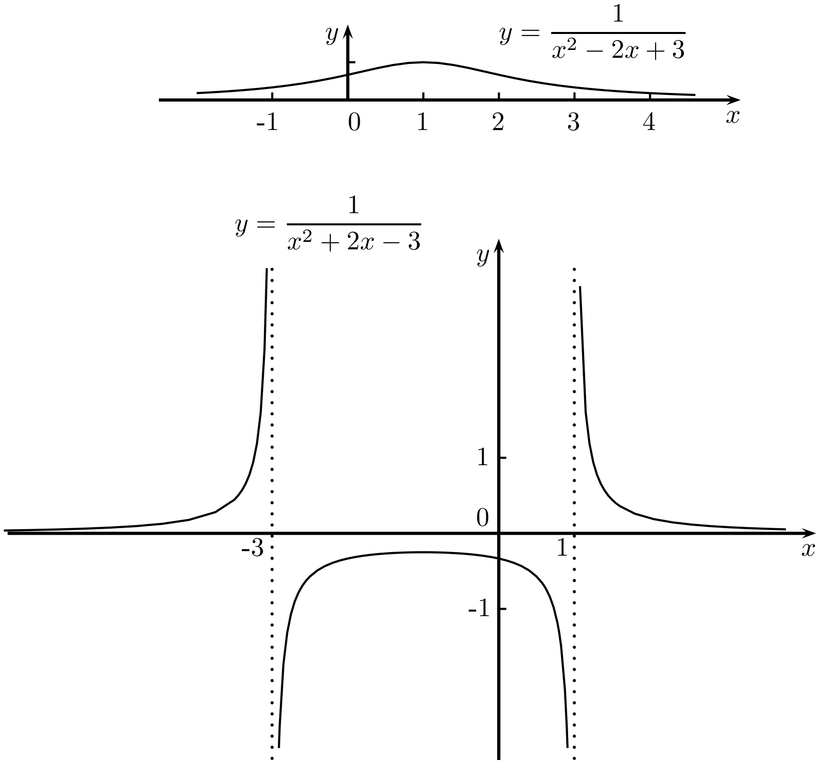

圖 1: $y=\dfrac{1}{x^2-2x+3}$, $y=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$ 之圖形

對橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 而言, 當你固定 x_1 值在圖形上會得到兩個不同的 y 值：y_1 與 y_2, 因此不是函數; 直觀而言, 如果垂直切下會得到兩個(含) 以上的交點就不是函數; 或者從方程式來看, 若 y 出現的不是一次, 就鐵定不是函數, 例如: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x=y^2$。藉此概念容易判斷多項式函數、有理函數都是函數

$$y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\,,$$

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}\,,$$

其中 a_i, $b_j\in\mathbb{R}$, $i=0,1,2,\ldots,n$, $j=0,1,2,\ldots,m$。因為 y 都是一次方, 或者由函數之定義, 固定一個 x 的值, 得到是一個固定的 y 值。腳踏兩條船是不可能成為函數的! 如果你想要成為大眾情人, 由函數的角度來看, 你必須落在值域而不是定義域。

我們看兩個函數

$$y=\frac{1}{x^2-2x+3}\,,\qquad y=\frac{1}{x^2+2x-3}\,.$$

由這兩個函數的外表即表現式來看並沒有太大之差異, 但由圖形 (圖1) 馬上就看出兩者之不同

處。

學習數學心中始終要有例子 (example) 來幫助你思考, 否則會身陷大海, 不知何去何從! 研究函數有幾個基本原則, 假設已知函數 $y = f(x)$ 之圖形, 則有

(1) 垂直伸縮: $y = \lambda f(x)$, $\lambda > 0$,

(2) 水平伸縮: $y = f(\lambda x)$, $\lambda > 0$,

(3) 垂直 (上下) 平移: $y = f(x) \pm c$,

(4) 水平 (左右) 平移: $x \longrightarrow x \pm c$,

(5) x-軸反射: $y = -f(x)$, $y \longmapsto -y$,

(6) y-軸反射: $y = f(-x)$, $x \longmapsto -x$,

(7) 取絕對值: $y = |f(x)|$,

(8) 反演 (inversion): $y = f(\frac{1}{x})$.

反演直觀而言就是將有限區間 $0 < x < 1$ 變換爲無限區間 $1 < x < \infty$

$$0 \to \frac{1}{0} = \infty, \qquad \infty \to \frac{1}{\infty} = 0, \qquad 1 \to \frac{1}{1} = 1.$$

這好比莎士比亞的名句:

『即使身陷胡桃核内, 我仍將自己視爲擁有無限空間的君王。』

— 莎士比亞 (William Shakespeare, 1546∼1616) —

這個變換主要的特色是當 $x = 1$ 時 $x = \frac{1}{x}$, 因此是以直線$x = 1$爲對稱軸 (視爲一面鏡子) 將 $0 \le x \le 1$ 的圖形拉到 $1 \le x \le \infty$ 這個區域, 而將 $1 \le x \le \infty$ 的圖形壓縮到 $0 \le x \le 1$。大部分的函數可藉由這八個基本法則而得其圖形。

例題 3.1: 試討論函數

$$y = \sin\frac{1}{x}, \qquad y = x\sin\frac{1}{x}, \qquad y = x^2\sin\frac{1}{x}, \qquad x \in (0, \infty)$$

解: 因爲 $y = \sin\frac{1}{x}$ 是奇函數我們只考慮 $x \in (0, \infty)$ 的區域, 並與 $y = \sin x$ 相比較

$$\sin x = \sin\frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$$

顯然 $x = 1$ 是兩個函數重疊之處也就是定點 (fixed point)。根據反演變換我們將 $y = \sin x$ 中 $0 < x \le 1$ 這段正弦圖形平緩地拉到 $1 \le x < \infty$, 而 $1 < x < \infty$ 這區間的無窮多個正弦波則全部擠壓到 $0 < x \le 1$ 這區間並以振幅爲 1 在介於 $y = \pm 1$ 這兩條線之間快速

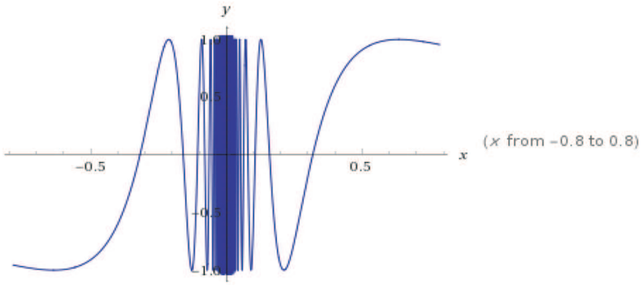

圖 2: $y=\sin\frac{1}{x}$

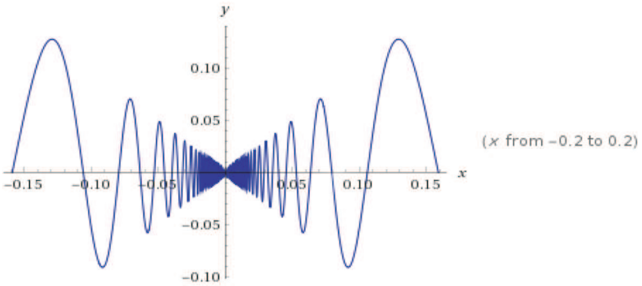

圖 3: $y=x\sin\frac{1}{x}$

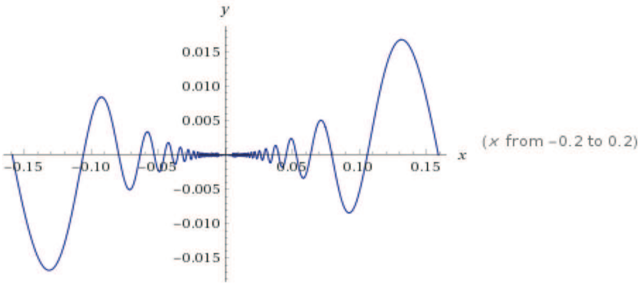

圖 4: $y=x^2\sin\frac{1}{x}$

震盪。至於 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 與 $y=x^2\sin\frac{1}{x}$ 我們只需認識到 $y=x,x^2$ 代表振幅 (其實是包絡線 (envelope)), 所以這兩個函數本質上與 $y=\sin\frac{1}{x}$ 類似, 在 $0<x\le 1$ 這區間以在介於 $y=\pm x,\pm x^2$ 這兩條線 (拋物線) 之間快速震盪。 $\square$

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—