數學傳播　43卷3期, pp. 29-31

淺談範疇化與拓樸

邱聖夫

— 本文於 2019 年 8 月 1 日刊載於中研院訊漫步科研專欄, 作者及院訊同意本刊轉載 —

範疇化 (categorification) 是近世數學裡面很重要的方法論。範疇化就好像名偵探柯南的黑衣人一樣, 在許多領域諸如數學物理, 拓樸學, 表現理論, 甚至組合學, 都能見到它黑幕中的身影匿伏在難題之側, 伺機下手。我們今天想要聊聊與拓樸學有關的範疇化例子。

那什麼是範疇化呢? 大體而言, 當你手上有一個牽涉到數學結構 A 的問題, 在 A 裡面不容易理解, 然而有天你發現到這個 A 的背後存在一個更深刻的數學結構 $\underline{\mathrm{A}}$, 用加底線來表示, 具備如下特性： 首先結構 A 可以很直觀地看成結構 $\underline{\mathrm{A}}$ 的化簡, 也就是存在 $\underline{\mathrm{A}}$ 到 A 的對應關係保持兩者結構, 且結構 A 裡面的問題能被提升成結構 $\underline{\mathrm{A}}$ 裡面的問題 (請別問我爲什麼加了底線叫做提升, 我只能說中文很難)。再者, 雖然看上去結構 $\underline{\mathrm{A}}$ 要考慮的事情比較多, 等於說需要檢驗的邏輯陳述比較多, 但是從我們人類的眼神觀來, 結構 $\underline{\mathrm{A}}$ 的機制竟然是比較自然, 也讓我們有機會引入更多的工具來釐清所屬問題。

用科學史上的經典案例來類比的話, 範疇化就像是海森堡與玻恩研究氫原子光譜能階模型的時候, 發現到將不同階的光譜發射吸收頻率適當排列成方陣後, 其數量關係可以用線性代數矩陣的乘法來表示, 建立了後世稱作矩陣力學的量子力學基礎。這裡的 A 就好比實際可以觀測到的古典物理量, 而 $\underline{\mathrm{A}}$ 是算子符號構成的量子物理量, $\underline{\mathrm{A}}$ 到 A 的對應關係則是矩陣在量子態上的投影長度, 而這個對應關係將矩陣間的運算化簡爲古典物理量遵循的定律所需的運算。雖然從古典力學到量子力學這個反推過程, 其數學模型並非數學嚴格意義上的範疇化, 但精神已經非常近似了。

回到數學本身。數學最基本的結構對象就是正整數構成的數字, 數字的加法與乘法就是他的結構。回想一下最初我們是怎麼使用數字的: 用他來數數 (count)。那麼「被數數」的對象就可作爲數字的範疇化, 這些對象的術語就叫做集合 (set)。那麼我們就產生了對應關係： 給定一個集合, 他的元素個數就是數字, 這裡對應於加法與乘法的結構就是集合的聯集與乘積。但看到

這裡你一定會想, 集合本身是帶有冗餘的結構, 例如集合 $\{X,Y,Z\}$ 與集合 $\{x,y,z\}$ 看不出來有什麼分別, 但他們都對應到 3 這個數字, 又例如集合 $\{X,Y,Z\}$ 跟 $\{Y,Z,X\}$ 都代表同一個集合, 只是元素寫出順序不同而已。爲了解決, 我們可以更進一步把範疇化 $\{X,Y,Z\}$ 升級成以 X,Y,Z 爲基底的向量空間 $V=\text{span}[X,Y,Z]$, 如此一來不光是 X,Y,Z 的順序無關緊要, 你甚至可以把 X,Y,Z 隨意 (但不任意) 地換成另一組基底 $X-Y$, $Y-Z$, $Z+X$, 所張出的向量空間 V 都不變。這裡的對應關係就是把向量空間對應到它的維度 (dimension), 例如剛講的 V 對應到 3, 而線性代數告訴我們, 這個對應關係並不受基底選取影響, 只取決於向量空間本身。

以下我們就以不動點定理爲例說明將數數字範疇化爲向量空間的維度的妙用。考慮 f 爲從緊緻 (即封閉有界) 空間 M 到自己的連續映射, 不動點指的是滿足 $f(x)=x$ 的這些點 x。不動點定理斷言在某些情況下, M 自身的拓樸性質足以彰顯不動點的存在性。例如當 M 爲單位圓盤時, f 爲旋轉, 那麼原點即爲 f 的不動點。但如果取 f 爲等比例縮水到半徑 $\frac{1}{2}$ 後再平移 $1/3$, 就不容易用眼睛看出這樣的 f 是否具備不動點。經典的萊夫謝茨 (Lefschetz) 不動點定理做了如下的考慮, 既然 f 是從 M 到 M 的映射, 那麼 f 也誘導出 $H_j(M)$ 到 $H_j(M)$ 的線性映射, 這裡 $H_j(M)$ 是 M 的 j 維同調群, j 從 0 到 m (M 的維度), 是只和 M 的拓樸有關的向量空間。f 的不動點可以看成是 $M\times M$ 這個空間中對角線與 f 的圖形的交會處, 若以向量空間來說, 不動點的「範疇化」可以用 f 在 $H_j(M)$ 的跡 (trace) T_j 來表示。如果取 $H_j(M)$ 的一組基底, 將 f 表示成矩陣的話, 那麼 T_j 就是對角線上的元素之和且與基底的選取無關。令萊夫謝茨數 $L=T_0-T_1+T_2-T_3\cdots+\cdots-T_m$ 爲諸跡交錯和, 萊夫謝茨不動點定理斷言, 若 L 不等於零, 則 f 必存在不動點。這裡 L 扮演的角色相當於所有不動點的加權總和。當 M 爲圓盤時, 有 $H_1(M)=H_2(M)=0$, $H_0(M)$ 爲一維向量空間且 f 誘導出非零的數量乘積, 於是 $L=T_0-0+0=T_0$ 爲非零數, 這時候的萊夫謝茨不動點定理叫做布勞威爾 (Brouwer) 不動點定理, 他斷言圓盤上的任意連續自映射 f 必須存在不動點。

如果說拓樸學是研究形狀在幾何連續變換下的性質, 那麼辛拓樸 (symplectic topology) 就是研究物理相空間中的形狀在正則變換 (canonical transform) 下的性質, 這裡的正則變換指的是保持給定力學定律 (例如給定的哈密頓力學系統) 的幾何變換。正則變換一般來說是會改變量測距離的方式, 使得無法有效使用曲率等幾何工具來衡量他的鬆散程度, 但正則變換又具備至少保體積的特質, 比一般拓樸學研究的同胚變換 (homeomorphism) 還要堅韌, 可以說是介於幾何學跟拓樸學之間既剛且柔的研究對象。在這領域中, 筆者的貢獻是提供了一個範疇化的方案, 讓那些「有體積」的形狀也能被範疇化 (在此之前的研究主流是將一類特定的拉格朗日子流形範疇化, 但拉格朗日子流形是沒有體積的)。簡言之, 我們能將形狀對應到某個背景層導出範疇 (可以想成向量空間的抽象升級) 的子範疇 (想成子空間), 並且當這個形狀經過正則變換後, 我們能夠描述新的形狀對應到的子範疇如何隨之變化 (想成向量空間的基底變換)。「導出」

的意思是, 我們考慮的物件是如同一條鍊子般成串的向量空間層 $M_0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots$, 這種鍊子的總淨維度是交錯和 $H(M_0) - H(M_1) + H(M_2) - \cdots$, 但我們不去拆數字取總維度, 而是盡可能以整條鍊子爲單位進行運算與函數映射。更重要的是, 我們能夠建立以子範疇爲目標的投影函子 (想成投影矩陣), 這個投影含子的代數性質蘊含了能被稱之爲形狀之特徵的不變量 (symplectic invariant)。這些不變量可比條碼, 從條碼能讀出該形狀的相關資訊。事實上, 這些不變量也確實可以用拓樸資料分析學 (topological data analysis) 的條碼 (barcode) 的形式寫下。例如當 $R > r$ 時, 取形狀爲相空間中的球體 (半徑 R) 與橢球體 (半徑爲 r 與無窮大) 時, 經由計算這些條碼, 我們可以知道該球體不可能被正則運算塞進某些尺寸的橢球體, 這就提供了辛拓樸領域里程碑的格羅莫夫抗擠壓定理 (Gromov's non-squeezing theorem) 的一個範疇化證明。

—本文作者爲中央研究院數學研究所研究學者—