

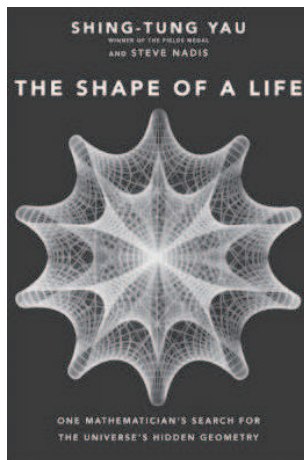
# 在數學及物理中的幾何人生

演講者：丘成桐院士

時間：民國 108 年 7 月 12 日

地點：天文數學館國際會議廳

我將談談我與科學作家 Steve Nadis 合寫、甫由耶魯大學出版社發行的新書。這本書是我的自傳，闡述我如何開拓數學研究的歷程，並討論在這個神奇的學科之中，我最感興趣的領域。



1949年中共將取得大陸政權之前，我出生於中國東南瀕海的汕頭市。不久因戰事迫近，我們舉家遷到香港，我父親認為這是暫時性的舉措，等候中國的政情恢復原狀。



汕頭

我們在元朗西邊的小農村定居。我的父親把微薄的積蓄都投入農場經營，認為這樣才可能供養我們的大家庭。但我的父親是大學教授，未曾務農；農場倒閉後，家裡便一貧如洗。



我的父親在九龍及香港市區接了幾個低薪教職，工作地點離家很遠，而且要花大量時間往返奔波；這意味著我們幾乎看不到他。我的母親日夜辛勞，努力讓家裡的八個孩子衣食溫飽，這是不容易的，微薄的資源讓她左支右絀。



我五歲入學，當時要進公立學校需先參加考試，包括我人生第一回數學測驗，其中有一個題目要求學生寫下 1 到 50 的所有數字。中國傳統書寫由右至左，就如我目睹父親所為，因此我認為數字也是以同樣的方式書寫。結果我寫的大部分數字都錯了：例如，當我打算寫 13 時，卻寫成 31。

這些錯誤造成嚴重的後果：我沒上好的公立學校，被送到一所鄉村小學。該校是給程度較差的學生就讀，不用說，大多數學生都無法從低下階層翻身。

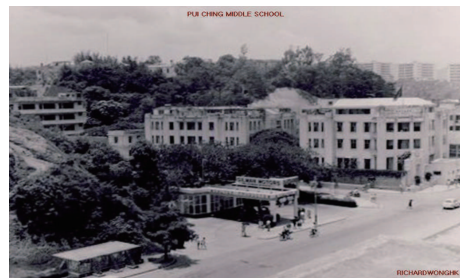
最初幾年，我的成績並不好。三年級快結束時，我姐姐巧遇我和一位朋友，她詢問我們功課的情況。我的朋友告訴她我表現得很好。

「多好？」我姐姐問道。

「他是班上第 36 名！」我的朋友吹噓道，其實他自己在 40 多人中名列 40。



天臺小學



培正中學

四年級和五年級時我表現得稍好一些，但六年級時又遇到困難。六年級的學生必須參加大型入學考試。我考得不是太好，但僥倖進了培正中學；這所學校有許多傑出的畢業生，包括 1998 年諾貝爾物理學獎得主崔琦 (Daniel Chee Tsui)。當時培正沒有優秀的物理老師，但是數學老師十分出色，給我上了第一回真正的數學入門課。

沒想到，我父親於 1963 年去世，當時我 14 歲。這是家裡難以承受的損失，家人的悲慟無法估量。家裡本已岌岌可危的財務狀況，因而更加不堪。我需要盡快開始賺錢，於是去當數學家教，輔導與我年齡相近的學生。

雖然我的動機是想幫忙持家，但我從這項工作獲得的遠遠超出我的預期。讓小孩子理解數學的過程，有助於釐清我自己對數學的看法。我發現教數學讓我很很有成就感，而這一發現促我前行，助我沿著既定的路線前進。



培正畢業後，我就讀家附近香港中文大學的崇基學院。課餘我還教太極拳來賺錢，那是一門我並不擅長的武術。

我在崇基認識了 Stephen Salaff，他是我遇見的第一位真正熟悉現代數學的教授。他教授一門「美式風格」的微分方程課程，鼓勵學生隨時發言和參與，這並不是我或其他學生習慣的方式。

與 Salaff 的互動，增長了我對數學的興趣。他安排我在大三結束後離開中文大學，在沒拿到學士學位的情況下，開始在加州大學柏克萊分校念研究所。



1969年9月,我人生首次搭飛機,從香港飛往舊金山國際機場。約一天後我到達柏克萊,口袋裡的錢不到 100 美元,一心只渴望竭盡所能吸納數學知識。

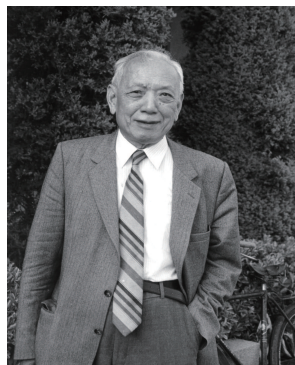


Campbell-Hall (柏克萊)

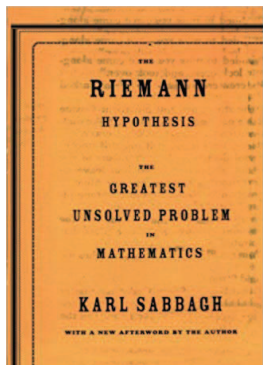


Evans Hall (柏克萊)

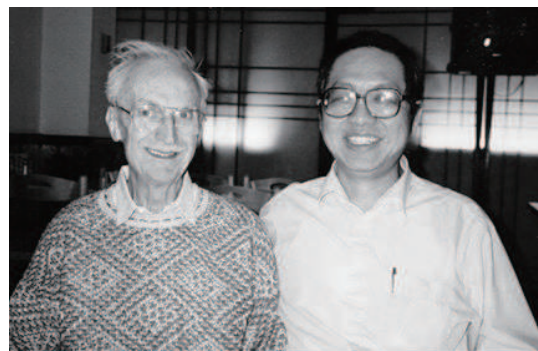
我在柏克萊的指導教授是幾何學家陳省身先生,中國出身的數學家中,他被認為是史上最著名的大師。選擇博士論文的題目時,陳先生建議我研究黎曼猜想 (Riemann hypothesis),但我心目中另有其它問題。在柏克萊兩年後,我於 1971 年 6 月獲得博士學位。陳先生鼓勵我接受普林斯頓高等研究院 (IAS) 的獎學金。我採納他的建議,那年夏天前往普林斯頓。



陳省身 教授



普林斯頓



Eugenio Calabi 教授

在高等研究院時,我探索了一個在柏克萊時就感興趣的問題,亦即 Calabi 猜想。1954 年, Eugenio Calabi 從幾何的角度嚴格地提出這個問題。他想知道,所謂的 Kähler 空間的體積,如何與同一空間內的路徑長度或距離相關。但我看出這個問題與愛因斯坦廣義相對論的關聯。

就我所見,與 Calabi 的問題等價的問題是:重力及非零曲率是否仍存在於真空(一個沒有物質的空間)?這個問題讓我勞碌多年。

1972 年至 1973 年，我在 Stony Brook 任教，除了研究之外，也要開始教課，由於沒有經驗，許多學生抱怨我的口音，覺得很難聽懂。我受邀自 1973 年至 1974 年訪問史丹佛大學，這給我很大的方便，因為我正計劃 1973 年夏天參加在史丹佛舉行的一個微分幾何重要會議。



我和 Stony Brook 的一名研究生開我那輛老福斯旅行車，沿途觀光，體會美國究竟有多大多美，至少在我們去過的一些地方，比如黃石國家公園。



得以參加史丹佛大學的會議，讓我備感興奮，部分原因是我可藉機見到幾何領域的知名人士，並可望與他們交談。

會議期間有消息說我可能找到了 Calabi 猜想的反例，意即我可以證明這個猜想是錯的。某日晚餐後，我被要求就這個問題做個非正式的報告。演講進展順利，大多數人似乎確信我證明 Calabi 錯了，Calabi 本人好像也支持我的論點。陳先生告訴我，我的演講是整場會議最精采的部分。因此我離開會場時不免洋洋自得。

但是好景不常，良好的感覺並沒有持續多久。幾個月後，我收到 Calabi 的短信，說他反思之後，發現我的演講在某些方面令人費解。他問我可否把論證寫在紙上，好讓他更透徹地理解。

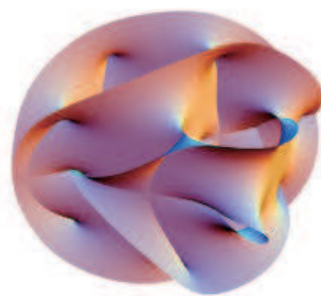
這是一個合理的要求，於是我開始專注進行，但工作並不順遂。我一再試圖證明他的猜想有反例，但每次嘗試，我的論證都在最後一刻崩解。

我廢寢忘食工作了兩個星期，幾乎無休無止，但始終無法證明我的主張。我心力交瘁，最後不得不承認自己錯了。我下了結論：Calabi 猜想並沒有錯，它必然是正確的。我決心證明事實確是如此。

三年後 (1976年) , 我終於證明了 Calabi 猜想, 當時我甫獲加州大學洛杉磯分校一年教職, 也才剛結婚一兩週。由於我之前犯過錯, 這次想要全然確定自己是對的。我竭盡所能多次檢查證明, 反覆核實, 並盡力構想出多種不同的方式來查核。我的論證經受得住每一次的檢驗。

1976年12月的聖誕日, 我與 Calabi 及紐約大學的數學家 Louis Nirenberg 會面。Nirenberg 和 Calabi 逐步檢驗證明。在他們當時看來, 證明是完好的; 如今 40 多年後, 證明依然有效。

1977年我發出一份關於證明的簡短公告, 並於翌年發表完整證明。很快就有幾所大學想聘用我, 我也終究因這項工作榮獲一些數學獎項。



然而, 我仍不完全滿意。Calabi 猜想與廣義相對論的聯繫是我已知的, 除此之外, 我總覺得這項數學結果對物理極為重要, 這種感覺讓我很困擾。我不知道這個連結可能會以何種形式呈現, 儘管我覺得它確實存在、將在某處找到。耗時八年後, 物理學家在弦論上發現了聯繫上 Calabi/Yau 定理的管道; 這是我夢寐以求的結果, 確實是值得等待。

在此期間, 我進行了一趟影響深遠的旅行.....

1979年, 中國開始對外開放, 知名數學家華羅庚邀請我, 5月下旬在北京中國科學院數學研究所進行一系列演講。

對我來說, 這趟旅程意義重大, 因為自三十年前在襁褓中離鄉後, 我未曾到過中國。這次返鄉之旅並不孤單, 有大量旅外人士同行, 同在長期缺席後返回故土。

降落北京時, 我非常興奮。我在機側彎下腰, 然後觸地。對我來說, 這個時刻如千鈞雷霆, 因為儘管真正的回憶付之闕如, 中國始終深遠地影響我的生活。

除了在科學院演講, 閒暇時我還在北京觀光, 參觀了頤和園。

這趟旅程裡我還走訪中國蕉嶺的祖厝, 但是行程似乎很難安排, 我後來才發現原因: 官員拖延我的訪問, 直到他們在田壠上埔了一條幾十公里的黃沙路, 讓給我們的車子行走。





我及時回到美國，自 1979 年 9 月起，在高等研究院舉辦「特別年」(special year)。活動聚焦於「幾何分析」，這是我與同事和朋友一起開發的新領域，使用非線性微分方程來解決幾何問題。Calabi 猜想的證明屬該領域的第一個重大成就，之外另有許多重大斬獲。

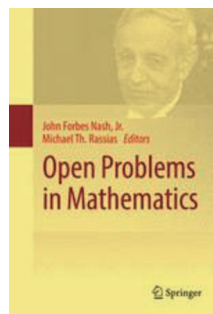
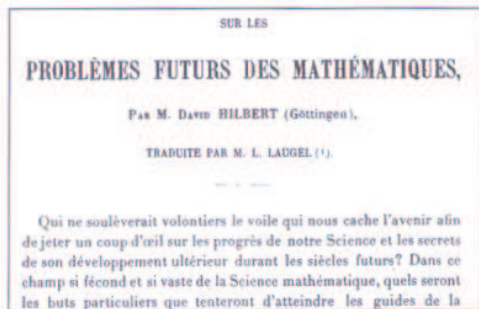


### IAS

當年，一些重要的幾何分析學者齊聚高等研究院，包括 Calabi、鄭紹遠 (S. Y. Cheng)、李偉光 (Peter Li)、Richard Schoen、Leon Simon 及 Karen Uhlenbeck。我很滿意當年完成的所有工作，其中大部分都曾在每週三次的研討會上提出。除了數學之外，會期中還有一些熱烈的排球和乒乓球比賽，以及一些大型派對；據我所知，其中最精彩的活動發生在身為「老闆」的我不在時。

我認為提出 120 個幾何分析的「未解決 (open) 問題」來結束特殊年是恰當的。陳先生告訴我，這是為該領域的學者做出貢獻的最佳方式之一。正如美國發明家 Charles Kettering 所言：「問題一旦妥為陳述，已經解決了一半」。

所有這些問題後來都廣泛流傳，為從事幾何分析的學者所共知。約 30 個問題至少已部分解決，其它問題一直是眾人思考的素材。



1984 年，我轉到加州大學聖地亞哥分校任教，主因是我的妻子在聖地亞哥附近工作，但我也與一群志同道合的優秀的同事合作，做出很重要的工作。兩位傑出的數學家暨合作者 Schoen (我昔日的研究生) 及 Richard Hamilton 同意轉職來聖地亞哥。我們預期這裡會是開發幾何分析新途徑的絕佳環境，也會是 Hamilton 找到衝浪新門路的好地方 (這是他除了數學之外的一項主要愛好)。



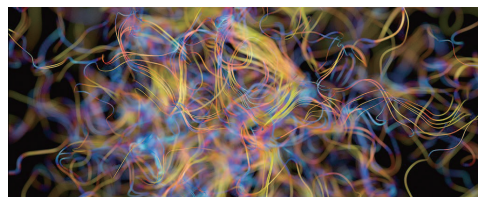
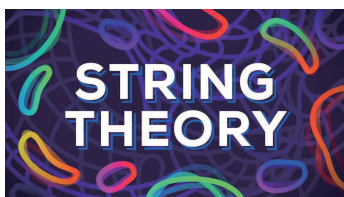
Richard Schoen 教授



Richard Hamilton 教授

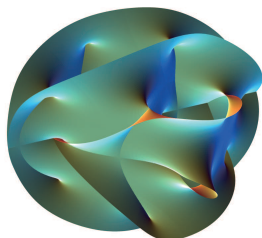


很快就出現出人意表的好消息，而我其實曾模糊地預期到一些。物理學家當時正對弦論感到興奮，設想了一個十維宇宙，試圖將所有大自然中的作用力和粒子統一於單一框架。





一群理論物理學家，諸如 Philip Candelas、Gary Horowitz、Andrew Strominger 和 Edward Witten，試圖找出四維時空之外「隱藏的」六維可能呈現的形狀。



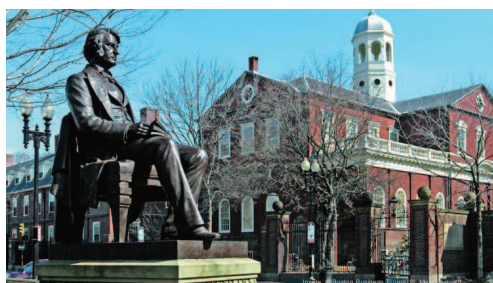
他們認為答案可能是某類空間，而且其數學存在性已見諸我對 Calabi 猜想的證明。他們描述了這些空間需要具備的性質，我告訴他們：Calabi 證明中的空間——亦即他們所謂的「Calabi-Yau 流形」——確實具備他們想要的性質。



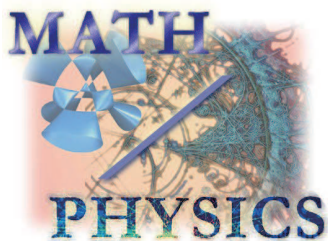
Calabi-Yau 流形很快就躋身弦論核心，被當作幾何基礎，據稱從這些基礎會湧現出宇宙所恪遵的物理定律。這些流形在數學及物理中的重要性速獲提昇。

1987年，我再次搬遷，轉赴哈佛大學，之後一直留在哈佛大學。

我很快發覺自己被一大群來自中國的學生及研究人員所包圍，其規模之大引發了美國中央情報局 (CIA) 的關注。我被要求定期報告所有這些人的動態。但我提供的細節，盡是 Calabi-Yau 流形、Ricci 流、Yang-Mills 理論等等，極其無聊，因此提交幾年的這些報告後，中央情報局不再找我了。



我念研究所時，初認識愛因斯坦的廣義相對論，此後始終對物理感興趣。我常喜歡在數學和物理的交界處做研究，認為此處令人興奮。我跟上物理學發展的一種方法，是聘任恰好是物理學家的博士後研究人員。



Brian Greene 教授

1980 年代後期，物理學家 Brian Greene 成為我的博士後。他與哈佛大學物理系研究生 Ronen Plesser 合作，完成了一些有趣的工作。他們協助揭露一個令了興奮的理論，名為「鏡對稱 (mirror symmetry)」。30 年後，這個概念仍然引起數學家 and 物理學家的興趣。

鏡對稱是對偶性 (duality) 的一例：兩個截然不同的 Calabi-Yau 形體可以產生相同的物理性質。它之所以重要，是因為某些物理問題或許在一個 Calabi-Yau 流形上幾乎不可解，但在其「鏡件」(mirror partner) 流形上卻很容易解決。

在數學也是如此。鏡對稱已引導出許多的突破，特別是在枚舉幾何 (enumerative geometry) 的領域，計算出給定的幾何空間或曲面上曲線或某類物件的數量。

1990 年代初期，就已證實鏡對稱極其有用。1996 年，Strominger、Eric Zaslow 和我合寫了一篇論文，提出所謂的 SYZ (Strominger-Yau-Zaslow) 猜想，對這種現象做出幾何解釋，揭示如何構造鏡流形。SYZ 仍是個猜想，除特殊情況外未經證明，但它一直是活躍的研究領域。

我一直與中國有密切聯繫，儘管我僅在襪襪中待在那裡數月，30 歲時才又造訪。我與亞洲強化聯繫的方法，是去努力改善當地的數學研究。迄今，我已在兩岸三地建立了六個數學研究所，並且試圖在各個中心建立風氣以促發研究。

第一個這樣的中心是香港中文大學數學科學研究所，成立於 1993 年。當時我必須大量籌款，十分棘手，但整個過程進行得相當順利。

然而，籌設北京中國科學院的新數學中心時，事情就沒那麼如意了。這個新中心已由

晨興基金會取得資金，並於 1996 年 6 月舉行奠基儀式。某位北京大學有影響力的數學家在儀式中演說，竟然誓言要將該中心搬遷到他的大學，其後續效應令人徹骨心寒。

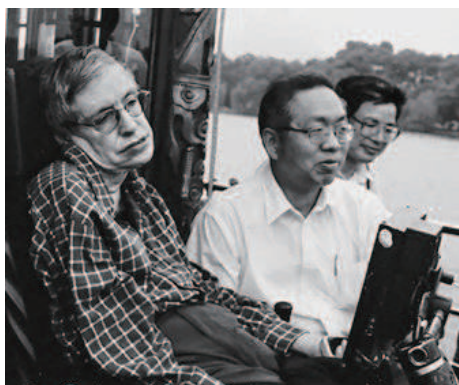
一場爭鬥繼之而至，中國科學院最終勝出而主事。晨興數學中心於 1998 年竣工，不久之後開始運作。

類似的地位或地盤之爭之後又再爆發，肇因是我在 1998 年提議國際數學家大會 (ICM) 在北京召開。一開始事情十分順利。我和昔日的指導教授陳先生一起去見中國國家主席江澤民，討論召開國際數學大會的計劃。談話結束時，我們獲江主席批准。

會議定於 2002 年在北京舉行。但主事的委員會在選擇中國數學家擔任大會講者時，顯然



多出於政治考量或任人唯親，而非基於學術成就，而後者是我一向認定的行事準則。最後，我見學術盛事竟如此腐壞，只好決定不出席。



與 Stephen Hawking 教授

我反倒把精力集中在我籌劃的國際弦論會議。該會議在北京舉行，時間是 2002 年 8 月國際數學家大會召開前一周。諸多知名人士參加了這個會議，包括 Stephen Hawking、Witten、Strominger 及諾貝爾獎得主 David Gross。

這個為期三天的會議令我十分欣慰，因為它匯聚了數學及物理、東方及西方的學者，而這兩者正是我投注大量精力的重要起因。我也很高興地看到，來自世界各地的兩百多名研究人員，在我的祖國召開如此高規格的會議，吸引了當地和國際媒體的關注。

會議期間，我抽空與 Hawking 及他的昔日門生共遊中國杭州的西湖。

同月，即 2002 年 8 月，我在杭州浙江大學創立的數學中心開張。此外，我創立了北京清華大學的丘成桐數學中心、海南省三亞的相關中心，以及目前位於國立台灣大學的數學中心。

當然，我投注的心力不全在東方。2014 年，我率先在哈佛創設了數學科學與應用中心 (CMSA)。

雖然我主要以純數學方面的工作而知名，但我相信在許多不同領域 — 包括生物學、化學、經濟學、工程學，以及物理學 — 應用數學日益重要，因此值得關注與支持。



我在哈佛和中國的諸多職務，致使我必須頻繁遊走美國及亞洲。我如此來回奔波，以至於很難說哪裡是我真正的家，或者我是否有兩個家；我從未全然歸屬於何地。

這種感覺讓我位處奇特之地，不能在傳統地圖上定位，而是居於兩種文化及兩個國家之間 — 它們在歷史、地理和哲學上截然不同，也因烹飪美食的顯著差異而彼此隔閡。

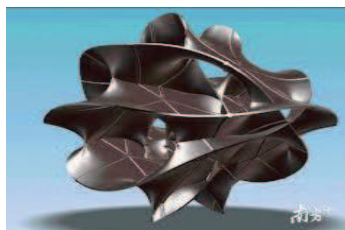
但我還有第三個家，我待在那裡的時間更長久得多，那裡就是數學。對我來說，數學提供了一本普世通用的護照，允許我在世界各地自由行動，也讓我用它強大的工具去理解世界。

數學具有一些看似神奇的性質：它可以彌合距離、語言和文化的差距，能夠引領那些善於駕馭數學威力的人，瞬間到達同一交流空間或同一思想平台。



數學的另一神奇之處，在於它不需要太多資金來進行重大研究。許多問題的解決，需要的

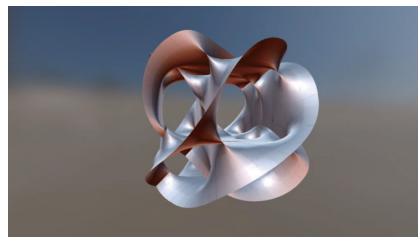
只是一張紙、一支筆，以及專注的能力。有時你甚至不需要紙筆，在腦中就可以進行最重要的工作。



2018 年，從我的祖籍地中國蕉嶺，有官員來與我接洽。他們正在石窟河岸興建公園，想要放置一座我的雕像。我轉而建議他們安放一座 Calabi-Yau 流形的雕塑，由我的朋友 Andy Hanson 及另一位共事的藝術家設計。

我思忖，一個好奇的孩子可能會被這座雕塑吸引，甚至可能會好奇地閱讀基座的銘文，其內描述了 Calabi 猜想的證明，以及它如何影響我們對數學、物理，甚至宇宙的想法。

一個年輕人如果被這件藝術品吸引，進而投身數學研究，也許將卓然有成，因為在我的領域，賦予一個人一點天賦、衝勁和運氣，是可以有一番作為的。



—演講者丘成桐為哈佛大學講座教授—