

有朋自遠方來——專訪

Leon Simon 教授



策 劃：劉太平

訪 問：劉太平

時 間：民國 107 年 5 月 4 日

地 點：中央研究院數學研究所

整 理：編輯室

Leon Simon 教授 1945 年 7 月 6 日出生於澳洲阿德雷得 (Adelaide)。他在阿德雷得大學獲學士學位 (1967) 及博士學位 (1971), 1968 至 1971 年任職該校, 其後曾授聘於 Flinders 大學、澳洲國立大學、墨爾本大學、密里蘇達大學及 ETH, 自 1973 年起任教史丹佛大學。Simon 教授榮膺多項殊榮, 為澳洲科學院院士, 並獲頒美國數學會 Bôcher Prize 和 Leroy P. Steele Prize, 表彰其在數學分析的貢獻。Leon Simon 教授用志不分, 在幾何測度論最小曲面等領域, 深入探討。在此篇中, 他分享多年數學生活、研究和教學的樂趣。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 你十幾歲時何以對數學產生興趣?

Leon Simon (以下簡稱「S」): 其實年紀稍長後, 我才真的進入狀況。高中時, 我忙著運動和社交活動, 對數學並沒有太大興趣, 所以課業表現乏善可陳, 高中成績剛好過阿德雷得大學¹ (University of Adelaide) 錄取門檻。大一時我才開始對數學產生興趣。甚至在這第一年, 我想我的成績在約一百人的班上大概只算中等。

¹位於南澳大利亞州首府阿德雷得的著名高等學府, 為澳洲八大名校之一。

劉：但當時你主修的是數學？

S：不是。大一時期，修一整年的數學和其他三門科學課程，依慣例是物理、化學和生物。

劉：喔，是一般的科學課程。

S：沒錯，是一般的科學課程。一開始沒有特定的專門課程。我想我的數學成績約為中等。當時沒想過要專攻數學，對我來說完全無此可能。但在修課期間，我意識到，儘管高中時數學讀來吃力，表現也差強人意，但大一的課老師教得好，我似乎突然能夠輕易理解。在高中升大學之際，我的腦子似乎起了某些變化；至少我是這樣覺得。

劉：這是種新的體驗嗎？

S：是新的體驗。突然間，我可以理解大半的授課內容。雖然不能說毫不費力，但基本上不很吃力。我能解決那些被留做作業的問題。我想，這樣很好，我在班上應該是中等。但讓我驚喜的是，學年結束時，我的成績排在前百分之五或十。我們那時只在年底舉辦一次考試，並沒有經常性的評估。

劉：喔！是英式...

S：是的，英式系統。阿德雷得大學位於南澳大利亞州首都阿德雷得，自十九世紀殖民時期，承襲英國的影響。總而言之，只有年底的一次性考試。可想而知，這成績有多令我高興。這也讓我自忖：也許之前我低估了自己的數學能力。於是，大二時我持不同的態度，決定不只是把它做得夠好，而是要試著做到很好。這想法似乎見效，不知怎地，我對這學科，越來越感興趣，也越來越有熱情，不斷進步。到了第三年，遇到日後的博士論文指導教授 Jim Michael²；他當時是一位講師，講授大三的兩門課——實分析與複分析；那是我的好機緣，也是我決定從事數學的轉捩點。

劉：Jim Michael 當時為什麼選擇待在那裡？

S：我想是個人家庭的緣故。畢竟他來自阿德雷得附近的鄉村農場。當然，他留在阿德雷得是我的天大幸運。他是位十分謙虛的人，毫不浮誇，相反地，嗯...。我可以說他是...。那種很慢熟悉新想法的人。有時，你會覺得必須很費勁才能傳達想法給他。不過，一旦某個想法進入他的腦子，他就會用到得心應手，勝過其他人。這有點像 Constance Reid³對 Hilbert⁴的描述，她聲稱 Hilbert 也是這樣的人。這個案例可能有些誇大；據她說，好幾次 Hilbert 在哥廷根 (Göttingen) 聽演講時，在座的其他人都比他先了解內容，還試著向他解釋。舉 Hilbert 的例子或許有些誇張，但 Jim Michael 就有點像這樣。

²James Henry Michael (1920~2001)，澳洲數學家，早期工作多探討如何以平滑物逼近不平滑物，1970 年代之後，轉而研究橢圓偏微分方程及有障礙 (obstacle) 的變分問題。

³Constance Bowman Reid (1918~2010)，美國作家，1970 年出版名著《Hilbert》，撰述數學家 Hilbert 生平。

⁴David Hilbert (1862~1943)，德國數學家，大量理論的奠基者，如：不變量理論、公理化幾何、Hilbert 空間。

劉: 了解。這所大學的環境清幽, 很適合他。

S: 真的很適合他。他深受學生和同事們敬重。我們都知道他有多傑出; 雖然數學界外的人可能不很明白。在澳洲數學界, 即使在家鄉之外, 他也因身為傑出分析學者而享有盛名。

劉: 談到澳洲的數學, 一般的印象是它源自英國, 對吧?

S: 沒錯。1960 年代, 大學快速拓展。當時政府制訂政策, 增加學位課程的就學名額, 因此向各地招募人才, 特別是有英國研究所學位的英國人和澳洲人。這期間受聘的人, 有些只做出一般水準的研究成績。直到 1970 年代後, 終身職的學術工作才變得更加難找。

劉: 那 19 世紀呢?

S: 19 世紀沒有學術。就南澳而言, 殖民時期始於 19 世紀中葉, 20 世紀初才有大學創建, 亦即阿德雷得大學, 因此它是相對較新的大學, 而墨爾本和雪梨的大學較為古老。

劉: 但這些較為古老的大學, 仍不早於 19 世紀末。

S: 沒錯。1770 年, 庫克船長⁵ (Captain Cook) 抵達澳洲並插上英國國旗, 但相當久之後才開始殖民行動。順帶一提, 當時澳洲被當作罪犯的流放地, 所以我們都是罪犯的後裔, 但我不是, 因為我生於南澳, 而南澳不是流放地。

劉: 這樣說來, 到了 20 世紀下半葉, 學者才真正在澳洲受到注目。

S: 我想是這樣的。當時有些很好的研究成果。澳洲總是如此。傑出成果及優秀學者如鳳毛麟角; 他們出類拔萃, 樹立卓越的標竿。儘管平均研究水平相較之下低了許多, 但因為傑出的學者夠優秀, 眾人得以知道好的工作該是如何。

劉: 何已致此? 是因為環境夠舒適, 讓人過於鬆散?

S: 原因很多。你或許在想: 人夠鬆散, 就會自滿, 於是平庸之作都被視為好東西, 是吧? 但這些出類拔萃之士並非如此。公眾賞識他們, 對他們毫無敵意。既然他們確實傑出, 大家就任由他們鶴立雞群, 不加打壓, 至少一般情況下是如此。有人說澳洲有高大罌粟花綜合症⁶ (Tall Poppy Syndrome), 任何出眾的人都會被砍頭 (比喻)。但我認為有時全然不是如此。始終有些卓越之士確實受到眾人敬重。我想 Jim Michael 就是個例子。

劉: 在理想的世界, 人們做自己能力或直覺允許的事。像 Jim Michael 這樣的人, 回到家中思考問題, 而後再回辦公室時, 至少有一些如你一般的人認可他, 他就心滿意足了。

S: 我也這麼認為。但他也喜愛教學, 喜歡傳授數學上的見解, 即使他 ...。怎麼說呢 ...。個性

⁵Captain James Cook (1728~1779), 庫克船長, 為英國皇家海軍軍官暨航海探險家, 帶領船員成為首批登陸澳洲東岸和夏威夷群島的歐洲人。

⁶澳洲和紐西蘭的流行用語, 出自古希臘哲學家亞里斯多德的著作《政治學》, 意指將優秀或最具勢力的人剷除。澳洲和紐西蘭的移民, 普遍持「平等主義」, 任何成功的人都易引來社群的集體批評。

有點畏縮且害羞，除非上台講課。猶記他曾邀請一群人到家中，那是你能想像到的最尷尬緊繃時刻。他安置眾人在房間入座後，嘗試開啓各種話題，接著談話無以為繼，很不自在。他有點拙於社交。就個人層面而言，他令人讚嘆，只是有點不善社交。但他在課堂講課時，就全然不同了。他授課時凜然有威，讓你當下確定這個人很具深度，會傳授別處無法獲得的洞見。我想他並未刻意要給人留下印象，只是以自認爲有效的方式傳授教材內容。

劉：或許澳洲是個新社會，所以在社交禮儀上，可以接受這類的人？

S：或許吧。不過他的確是個有趣的案例，我想我沒見過可相比擬的人。

劉：了解，所以他是個獨特的人。

S：我想，在那方面他堪稱獨特，但每個人都知道這一點。他過世後，我們幾個人聚首，爲澳洲科學院⁷ (Australian Academy of Science) 撰寫有關他的生平及研究的訃聞。我注意到有好幾位提到 Jim Michael 個性有點羞怯 (diffident)，用的詞就是「羞怯」。他與人互動時很羞怯，但一旦站上講台，言語具足威信。很榮幸目睹這些。我不是這樣的人，但我認爲他令人欽佩，因爲他能做到這一點。他讓人耳目一新，因爲你可以看出：他未曾真的去嘗試給人留下好印象。不知怎地，他不要這類手腕。如果你懂我的意思；我們大都不想承認自己是愚蠢的白痴，有時會隱藏自己的無知，是吧？但他不這麼做，他直言不諱，不只在這方面，其他方面亦然。幸運的是，大家都知道他聰明機智，所以我不認爲他因此而有太大的損失。但有次我和 Peter Lax⁸ 聊到 Jim Michael，他對我說：「沒錯，Jim 是個很精彩的人，但他應該多耍些手腕。」我希望自己正確引用了 Peter 的話，我想我是的。

劉：這些描述聽來毫不違和。既然我們在談 Jim Michael，能講一下他確切的成就？

S：好的。我或許沒做好萬全準備來講解，但...

劉：沒關係，只要講個大概。

S：好的，我概略講。我頭一篇細讀的論文就是他寫的。他沒有要我念，是我自己決定要念它的。那篇簡短的論文提出複分析裡柯西積分定理的證明。他得到首個全然一般性的證明，對曲線的平滑度不做任何假設，也不限定曲線的度數 (degree) 是否無界 (曲線的度數是其環繞某點的次數，在某些地方可能爲無界)。我記得文章某處有個極其巧妙的論證，利用拓樸度數 (topological degree) 得到一些估計；整篇論文植基於此。猶記得，這個想法如此巧妙，讓我深受感動。這是課堂上學到的古典數學想法之外，我頭一遭見到的實質的數學見解。它是我在研究論文裡讀到的頭一個實質的想法，對我而言至關緊要。它讓我體會到，要寫一篇好

⁷1954年由一群澳洲學者創立，效仿皇家學會依據皇家章程運作。

⁸Peter David Lax (1926~)，匈牙利裔美籍數學家，任教於紐約大學 Courant 學院，1987 年及 2015 年獲頒 Wolf 獎及 Abel 獎。他對可積系統、雙曲守恆律、流體動力學、震波及孤立子等領域有重大貢獻。參見本刊 2002 年第 26 卷第 4 期「有朋自遠方來」專訪。

論文，不能只因爲你知道如何著手，就寫下一些廢話。你著手的工作需要有你實質的想法，你要以真知灼見來解題。對我而言，這是個絕妙的經驗。第一篇論文，很幸運地我選了它。順帶提一下，我細讀的第二篇論文是 Bob Finn⁹ 寫的。同樣的，裡頭也有好些高妙的想法。那篇論文關乎二維的梯度估計，對二維極小曲面類型的方程推導梯度估計。

劉：你有告訴 Jim Michael 這些？

S：我不記得曾告訴他。不過，如果我對他說那篇論文有多精彩，他可能會很尷尬。但我想他知道我的感受，我對那篇短文至感欽佩。

劉：你和他大致上如何互動？

S：我是他的博士生時，當然得和他建立自在且愉快的關係，每天上午茶和下午茶時間我們都會聊一下。但在早期，我還是個大學生時，都到他的辦公室找他，有時很緊張。講完要談的東西時，往往覺得侷促不安。是時候你該緩慢移動到門邊了，但他不知道該如何結束，而我那當頭也有些害羞，對吧？所以我有著走出房門的困難。

劉：我記得 Courant¹⁰ 的傳記中提到，Courant 擅長這種事。一旦他想要結束談話，就會起身說道：「喔！你想待在這，不是嗎？」隨後他自己卻逐漸走向門邊。

S：你看，這就和 Jim Michael 截然不同。Jim Michael 認爲這樣做是不誠懇的，所以從來不會這麼說。

劉：但 Courant 擔綱的角色不同。

S：是的，當然，但他們個性絕對大相逕庭，Jim Michael 不會考慮以這種方式處理那種情況。不過我想他也覺得不對勁，知道談話需要結束，只是不知如何是好。當時我還在大學階段，處境尷尬；我的意思是，在那階段，他高高在上，而我地位低下。還記得在那段時期，有次我們討論一些事情，他說：「嗯，我想你現在比我更了解它。」這讓我震驚，我竟然可能知道的比他多。我忘了論題是什麼，可能是關於拓樸學或拓樸度數之類的應用，但他是這方面公認的專家，所以當他這麼說，我深感訝異。不經意地，這也幫助我領會到自己可能企及的境地。

劉：所以誠懇或可...

S：或可大有助益。此後，我也效法他，設法如此與學生互動；即使在我的主要研究領域，也不讓他們感覺到我自認凡事精通、勝過他們。

劉：正因 Jim Michael 非常誠懇，他的話可信且有效。

⁹Robert Finn (1922~)，出生於美國，任教於史丹佛大學，對極小曲面方程、毛細曲面及 Navier-Stokes 方程貢獻卓著。參見本刊 2003 年第 27 卷第 2 期「有朋自遠方來」專訪。

¹⁰Richard Courant (1888~1972)，德裔美籍數學家，對 finite element 法有基礎性的貢獻，也在古典 Plateau 問題獲致重要結果。他創建的紐約大學數學系，日後更名為 Courant 學院。

S: 沒錯, 正是如此。你總相信他是直言不諱, 不會扭曲事實。我也無法想像他發表的論文到頭來出錯; 我的意思是, 我之所以無法想像, 是因他是那般仔細謹慎地檢查。他的產量不多, 可能每一兩年才一篇, 我想我們可以去 *Mathematical Reviews* 查。雖然我不確定他發表過多少文章, 但我可以想像產量可能不會太多。

劉: 回頭聊聊你的高中歲月。從你先前所言, 可否推斷高中教育其實並不怎麼適合你?

S: 不, 適合的。我想我正好無法套用那個教育體系的方程式。我對學科不是真的感興趣。在高中最後一年, 我有位隸屬某個宗教組織的老師, 是位修道士, 為人正派。那個宗教組織出了些問題 — 澳洲皇家委員會¹¹ (Royal Commission) 最近證實, 該組織中, 有相當比例的人合搞出駭人聽聞的虐待學生模式。但我提及的這位老師, 確實是個好人。他以獨特的方式看待數學並從事教學。典型的一堂課大約一小時, 通常他不講課, 而是請某位學生將講義寫在黑板; 他有課程主要內容的標準講義。我們抄下講義後, 當晚就得解決指定的問題。上半年這麼過去。雖然他很少教學, 但他會確認我們有做作業, 無可豁免。

劉: 他制定了一個標準。

S: 他制定了一個標準, 並確保我們晚上埋頭苦幹。對我來說, 這至關緊要, 因為我的腦袋當時不知何故不很靈光。我想我需要持續的努力及更多的結構, 每天再接再厲。當然那時我未意識到這點, 但我認為那段時日及那些持續性的努力, 攸關我日後數學能力的發展。

劉: 如我們所知, Euler¹² 會見 Johann Bernoulli¹³ 後, 總會有家庭作業。他做一些閱讀和作業後, 再回去找 Bernoulli 討論。我聽起來就像這樣。幾何學家陳省身曾告訴我: 他當年每兩星期和 Élie Cartan¹⁴ 會面一次, 而 Cartan 總會給他一些問題。容我引用他的話; 他說: 「一切簡單的問題, 我都能解決。」接著補充一句: 「別給學生太難的問題。」

S: 他跟 Cartan 學的, 對吧? 他從 Cartan 身上學到這一點: 與其給難題, 不如給簡單些的。

劉: 沒錯。

S: 確實有點道理。只給困難的題目, 我不相信會有用。長時間枉費心力, 即使那些有突出數學潛力的人, 信心和熱情也將消磨殆盡。我認為多數問題應該是直截了當的, 間或有些較困難的問題, 會讓他們覺得更具挑戰性, 而一旦成功解題, 也會更覺振奮。

劉: 你畢業後到過很多地方。

¹¹ 君主立憲國家中, 為調查某案件而成立的臨時公共問訊機構, 權力甚至能高於法官。

¹² Leonhard Euler (1707~1783), 瑞士數學家, 生前平均每年發表八百頁的學術論文。1766年之後他幾乎雙眼失明, 仍平均每周完成一篇數學論文。

¹³ Johann Bernoulli (1667~1748), 瑞士數學家, 曾說服 Euler 的父親讓 Euler 捨神學而研讀數學, 且曾提出並解答變分學的最速降線 (Brachistochrone) 問題。

¹⁴ Élie Joseph Cartan (1869~1951), 法國數學家, 發展微分流形上的分析理論, 對李群及微分幾何有巨大深遠的影響。

S: 嗯,我先到史丹佛大學。喔!不對,拿到博士後,我先到阿德雷得州的另一所大學 — Flinders 大學¹⁵ — 待了一年。在那年代,一旦拿到教職,除非你毫無作為,或是真的無可救藥,可以十分確定那將會是終身職,對吧?所以我幾乎認定這將是終身職,預期自己會一輩子待在那裡。但某日我收到一封寄自史丹佛大學的信;(當然,當時尚無電子郵件和網路,所以那是耗時約一週才寄達的航空郵件);發信人是史丹佛大學的 David Gilbarg¹⁶教授,他詢問我:是否有意願申請史丹佛大學聘期三年的助理教授?

劉:那真是令人欽佩!

S:我大吃一驚。後來才發現,我的論文口試委員 Neil Trudinger¹⁷將我的論文副本寄給 Gilbarg;我猜他講了:「這個人看來很優秀」之類的話。

劉:其實我要說的是, Gilbarg 能夠看出你的才華,令人欽佩。

S: 嗯,不知道是不是他搞錯了,但他真的寫了這封信。一封對我而言完全出乎意料的信,我大為震驚。

劉:他在澳洲那個角落找到你。

S: 是的,如果沒發生這件事,我或許還在 Flinders 大學證明極小曲面方程的梯度估計之類的東西。因為我不會想到要申請國外的名校,壓根兒沒想到有此可能。

劉:我們跳到另一個話題,談談幾何測度論 (geometric measure theory)。它是公認的硬分析,艱深的行道。

S: 沒錯。

劉:它也造就了許多一流的數學家。

S: 喔!是的,相當多,特別是該理論的奠基者: Federer¹⁸、Almgren¹⁹、Fleming²⁰、

¹⁵1966 年設立於阿德雷得的中小型公立綜合大學。以 19 世紀初航海家 Matthew Flinders 之名命名。

¹⁶David Gilbarg (1918~2001), 出生於美國, 主要研究領域為流體力學及橢圓型偏微分方程理論。與 Neil Trudinger 合著的《*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*》被奉為該領域之經典。

¹⁷Neil Sidney Trudinger (1942~), 澳洲數學家, 對 Orlicz 空間、極小曲面方程、Yamabe 問題、最佳運輸問題有重大貢獻, 並與 David Gilbarg 合著《*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*》。參見本刊 2012 年第 36 卷第 2 期「有朋自遠方來」專訪。

¹⁸Herbert Federer (1920~2010), 奧地利裔美籍數學家, 1960 年與 Wendell Fleming 發表的論文 *Normal and integral currents*, 堪稱幾何測度論的濫觴。1969 年出版經典著作《*Geometric Measure Theory*》。

¹⁹Frederick Justin Almgren Jr. (1933~1997), 出生於美國, 推展 varifold 的概念, 研究有向 (oriented) Plateau 問題解的正則性。

²⁰Wendell Helms Fleming (1928~), 出生於美國, 任教於布朗大學應用數學系。1960 年與 Herbert Federer 發表論文 *Normal and integral currents*, 其後亦研究隨機分析、隨機微分方程, 在賽局論、隨機控制理論、人口基因學成就斐然。

Reifenberg²¹、De Giorgi²²。他們都是我的英雄。C.B. Morrey²³雖非完全在做幾何測度論，但他確實涉入頗深。如果你讀他的書，不只讀到偏微分方程，後面章節也會看到許多幾何分析。舉例來說，他探討了 Reifenberg 在 Plateau 問題²⁴的工作，還提到 $\bar{\partial}$ -Neumann 問題。那本書內容豐富。事實上他兼容並蓄，儘管大多數人和他本人都說他在做偏微分方程。

劉：你見過 Morrey?

S：是的，我見過他那麼一次。我到柏克萊演講時見到了他；他和藹可親，演講後帶我去用餐，真的，他真的是個很好的人，和藹可親，風度翩翩，而且非常明顯地想鼓勵我。那可不是請你去給個演講，然後說謝謝之後再會的狀況；不是這樣的。他帶我出去用餐；我記得他帶夫人來赴會，真好。

劉：你提到了這些人名，或許可以談一些他們的工作。

S：好的。1960年，Federer 和 Fleming 在 *Annals of Mathematics* 發表了一篇令人驚嘆的文章，名為 *Normal and Integral Currents*²⁵；不得不說，這個標題索然無味，甚或有點掃興。但他們證明的東西真是讓人驚歎，我不曾相信那些東西可以被實際考量，遑論相信它們是對的；我本以為那些東西不可能是對的。他們寫說，如果你取...。嗯，我來改述一下，好吧？舉他們證得的一個特例來說；在歐氏空間取某序列緊緻流形，譬如某不具邊界的二維曲面序列，若不限制其拓撲，這些曲面可能極其繁複，但若其面積有界，則它們坐落於固定的緊緻集內，不會跑到無窮遠。因其有向 (oriented)，你可以在這些曲面上對 2-forms 做積分。Federer 及 Fleming 的結果是說：在弱的意義下，該曲面序列會有一個子序列收斂到某極限曲面。這聽來無稽，我的意思是，你會覺得這不可能是對的；因為你或許會想到極細的截柱體 (truncated cylinders) 序列：截去柱面兩端，增加柱面數量，縮小其橫截面直徑，使該序列在歐氏空間的單位立方體中變得稠密；而據 Federer-Fleming 所述，唯一要遵守的限制是其總面積有界，對吧？但就這個例子而言，若在恰當的測度論意義下取極限，你會得到某多重三維 Lebesgue 測度，對吧？極限集合裡不存在曲面，它們被舒展開，填滿整個空間，所以你會認為 Federer-Fleming 理論不可能是對的。

箇中關鍵，在於他們是在 currents 的意義下取收斂，換言之，在積分 forms 的意義下取極限。亦即，在子序列中的各個流形上，積分任意 (定義於周遭空間) 的平滑 form，他們的結

²¹Ernst Robert Reifenberg (1928~1964)，出生於德國的英國籍數學家，1960年的論文率先以測度論觀點處理廣義的 Plateau 問題，涵蓋了無向 (nonoriented) 狀況。

²²Ennio De Giorgi (1928~1996)，義大利數學家，1990年獲頒 Wolf 獎。他於1950年代解出 Hilbert 第19問題，1960年代建構出極小曲面正則理論，1969年與 Bombieri 及 Giusti 提出極小曲面 Bernstein 問題在八維空間之反例，1970年代後致力推廣 Γ -收斂的理論。

²³Charles Bradfield Morrey Jr. (1907~1984)，出生於美國，重大貢獻包括黎曼流形的 Plateau 問題的解決，以及用 quasi-convexity 的概念詮釋變分問題。經典著作《Multiple integrals in the Calculus of Variations》出版於1966年。

²⁴研究邊界固定時極小曲面的存在性。

²⁵Herbert Federer and Wendell H. Fleming, Normal and integral currents, *Ann. of Math.* 72(2), 458-520, 1960.

果聲稱：存在極限曲面（非平滑，但在適當意義下，至少幾乎到處都有個切空間），使得每個固定的 form 在此子序列的積分，都收斂到這個 form 在極限曲面的積分。極限曲面通常不平滑，否則就好到不可置信。但它是所謂的可求長集 (rectifiable set)，是測度論版本的流形，其上幾乎到處都有近似的 (approximate) 切空間。它大致上像個曲面，如果你稍微偏斜著看，它會像是個曲面。與你直覺相悖的原因是，在我先前提到的細瘦的圓柱體，有些部分的積分會相抵銷；因為你是在一個定向曲面上積分 forms，細瘦圓柱每一側面上的積分值，漸近地都會與徑向對面上的積分值相抵銷。因此，在這情況，我們得到的極限為零。所以，在上述細瘦圓柱的例子中，你得到的極限是零。但在一般情況下，你會得到一些不尋常的極限曲面，它們是可求長曲面 (rectifiable surface)；可想而知，在一般狀況下能夠這麼做，是極端重要的。據我所知，他們發表那篇論文前，沒有人意識到那可能會是對的。

劉：了不起。

S：妙透的結果！

劉：接下來...

S：Reifenberg 在模 2(mod 2) 的情況證明了類似的結果，涵蓋無向 (nonoriented) 的狀況。

劉：這是很大的領域。你提到 De Giorgi、Morrery、Almgren，他們都致力研究。

S：是的，沒錯。他們都做出基礎性的重要貢獻，對這片大領域的各個次領域影響深遠。

劉：幾何測度論涵蓋幾何學、測度論、偏微分方程，所以算是幾何分析。

S：是的，對不同的人，它有不同的含意。幾何測度論有個次領域，偏重測度論的面向，研究碎形的維度及這類東西的結構。另一個方向是我喜歡的，真的在做幾何分析，用幾何測度論的技巧解決幾何問題。它涵蓋寬廣的議題，對不同的人意味著不同的東西。

劉：De Giorgi 也投身這領域...

S：De Giorgi 的工作無疑歸屬於幾何分析。他對高維的極小曲面很感興趣，那是他的主要研究興趣，至少在 1950 到 60 年代是如此。他之後從事了 G -收斂和 Γ -收斂等諸多研究，但當時主要的興趣是在極小曲面。基本上他解決了餘維為一 (co-dimensional one) 時的 Plateau 問題，引領眾人獲致需求的正則性理論。隨後他與 Bombieri²⁶和 Miranda²⁷證明了極小曲面方程的梯度估計²⁸；這就是我的論文題目 — 梯度估計，是在準線性 (quasilinear) 和準橢圓 (quasi-elliptic) 的情況做估計。我寫論文的時候，他們正好發表那篇文章，大概只早

²⁶Enrico Bombieri (1940~)，義大利數學家，任職於普林斯頓高等研究院，1974 年獲頒菲爾茲獎，研究解析數論及代數幾何。1969 年與 De Giorgi 及 Giusti 提出極小曲面 Bernstein 問題在八維空間之反例。

²⁷Mario Miranda (1937~)，義大利數學家，研究變分問題解的正則性。

²⁸Enrico Bombieri, Ennio di Giorgi, Mario Miranda, *Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Band 32, 1969, S. 255-267.

個一年左右。所以我很幸運，當這些人在進行他們的重要研究時，我恰好在那當頭對這問題有興趣。Federer 的書也差不多在同一年問世。我記得我去逛圖書館時，看到那本厚厚的書，名為《*Geometric Measure Theory*》²⁹。當時，我還不清楚其意涵，只覺得這本書看起來很有趣。

劉：你有讀過嗎？

S：對當時的我而言，那本書太難了，所以我並沒有整本讀完。但我確實借了書。開始細讀後，意識到它超乎想像，是本令人難以置信的書。

劉：很多我認識的人，書架上都有這本書。

S：都擺在書架上，但沒勇氣翻開讀，因為著實太困難。我好像窺見你書架上也有一本嗎？或許沒有...

劉：在史丹佛，不在這裡。

S：無論如何，這很常見，因為對大多數人來說，Federer 的寫作風格讓內文難以理解。但如果你真的有耐心和毅力去讀它，所有細節都在裡頭，只不過呈現的方式很怪異。讀那本書像在學另一種語言。Bob Hardt³⁰稱這種語言為「Federese」。

劉：他有自己獨特的寫作方式。

S：沒錯，他對自己試圖達成的目標，極少指出關鍵結果，也不說明下一個引理的目的，反而寫了一系列引理，為數可能十或十五。當你終於弄清楚它們在表達什麼時，發現有些其實是淺顯的一般常識，似乎不需要另外寫成引理，但其他的東西就至關緊要了，是真材實料，可是他沒能寫清楚，區分淺顯和艱深的素材，因此沒能幫你太多。如果有某位執行編輯仔細審查一下（他可能始終不同意這麼做），就會有很大的不同；而如果這個人有權細讀，而且可在各個階段添加評論和解釋，那麼讀起來會容易許多，不可以道里計。我可以這麼說：他惜墨如金，精簡過了頭。

劉：容我問一個問題：讓你真正感到快樂是什麼？哪項研究成果讓你真正欣喜？

S：不知道。最艱辛的搏鬥當屬切錐面 (tangent cone) 唯一性的論文³¹，起初看似無從入手。我辛苦了數月，可能實際上將近一年。日復一日，夜復一夜。那些日子，我大部分都在晚上工作，早上九點起床，十點左右到系上，每晚又再次著手探究。不知怎地，我有一種感覺，覺得自己或許可以做些什麼，但卻無法完全著力。我記得一個特別的夜晚，我了解到：基本上，

²⁹Federer, H., *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 153, Springer-Verlag, 1969.

³⁰Robert Miller Hardt (1945~), 出生於美國，任教於 Rice 大學，研究幾何測度論和偏微分方程。

³¹Simon, L., Asymptotics for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problems, *Ann. of Math.*, 118(1983), 525-571.

當你剝離開幾個簡易的情況後，會真正觸及核心情況，而在核心情況，東西變動得十分緩慢。在簡單的情況，東西快速變動，那是你可以處理的情況。而若東西變動得實在很慢，則是困難的情況。令我感到沮喪的是，我隨即了解到：在小的誤差項範圍內，這問題總遵循一個拋物線方程，而這似乎就提示了：我正在找的漸近極限可能是錯的。就好比「山羊從山腰下山」，沿著無限螺旋盤旋向外，足跡往一個圓漸進，沒有唯一的極限，就那麼一直打轉。夜深了，我太太問：「怎麼樣了？」，我回應：「我想，它可能錯了！」。

劉：經過好幾個月...

S：經過這些努力。數學就是這樣。當我精神墜入最低潮，隔天或數天後，我發現，啊哈！稍等！這裡還另有其他因素。所有反例都牽涉到物件的梯度流 (gradient flow)，但僅知它為平滑而已。而這問題涉及實解析函數，或許有一些...，於是我又努力了幾個月或幾個星期 (我不確定多久)。我知道它所需要的不等式，涉及那些在原點取值為零且梯度也為零的實解析函數。我需要的就是這種不等式。對於那些函數，你需要審視函數絕對值的微小次方的梯度長度，並檢查該長度在原點附近是否為有下界。我當時能做的只是猜想這或許屬實。我問了周遭許多人，雖然沒人能斷定這是否正確，倒也沒人提出反例。因此我讓幾位學生思考這個問題，終於在幾個星期後的某一天，某位學生帶著一篇論文來找我，裡面寫著我需要的不等式，分毫不差。那是 Lojasiewicz³²的文章，證明：對那些在原點取值及梯度都為零的實解析函數，存在某個介於 0 和 1 之間的常數 θ ；若取這些函數的絕對值的 θ 次方，其梯度長度在原點附近會有下界。固然我需要的是無限維度的版本，但我非常有自信下一步是例行公事。的確，它確實可行，這讓我非常開心！

劉：這是什麼時候的事？

S：我想是在 1982 年左右。那是付出努力後獲致的極度狂喜感，持續了一兩週。

劉：只有一兩週？

S：只有一兩週。月復一月徒勞無功之後，獲致一兩個星期的狂喜。我記得那個結果讓我欣喜若狂，整個人意氣風發。奮力拚搏之後，自知箇中妙處，真的很喜歡那個結果。真的！

劉：感覺上它很艱深。因為眾人總認這個領域越來越難。我想在你對它感興趣前，它就已是如此，是吧？或許 Jim Michael 曾說：這領域變得太難了。

S：對，至少我的情況是如此。剛起步時，我有這種感覺，因為我自認不懂幾何測度論，而 Federer 的書太艱難，讀不下去。我自忖：好吧，至少我可以做偏微分方程，我知道那些東西。這想法讓我繼續前進。我先著手一些問題，它們比之後要做的東西容易。重要的是，你發現自己熱衷的東西，覺得自己可以對它做些什麼，不會覺得：喔！這太難了，我無從下手。一

³²Stanisław Lojasiewicz (1926~2002)，波蘭數學家，研究實解析函數的零點集合分佈，成果被應用於偏微分方程及實代數幾何。

般來說，我認為這是成功數學家的特質。大半時間，他們都處於一種模式，在處理一些自己心裡感覺舒服、合理的事，好像他們可以對問題做些什麼。而當無法推進時，你必須承認：不！這不管用了，我必須做些別的。但總而言之，我認為重要的是，你要了解自己能做什麼、不能做什麼，熱情才能維持下去。

劉：我來說個瑞典傑出調和分析學家 Lennart Carleson³³的故事...

S: Carleson! 喔，他是位神奇的數學家。我的意思是，他可以經年研究棘手的問題，不只是幾個月如此。

劉：他講過與你方才所言類似的話；他說：一個真正優秀的數學家，對猜想是否屬實，必然有某種預感。還有個故事，是 80 年代他來台灣時對我說的；他說他曾在九年之間持續嘗試找到某個反例。

S: 沒錯，大家都認為那是錯的，頂尖人物各個如是想，Kolomogrov³⁴也是如此。他們都認為那是錯的，Carleson 自己也這麼想。我聽到的故事可能和你聽到的一樣；確實如此，他覺得那是錯的，努力了好長一段時間，試圖去建構反例，因而功力達到某個境界。

劉：九年...

S: 沒錯。好在那九年他不只做這件事，但那是他主要想要做的。很幸運地，他功力提升到某個境界後，有了驚人的洞察力，讓他能證明基本上反例並無存在的可能。對他而言，那是個大轉捩點，讓他之後了解到：天啊！我應該要試著證明它，而非反證它。

劉：據他說，這花了一年的時間。

S: 是的，相對較短的時間，但仍花上一年。

劉：仍花了一年。

S: 是的，這故事讓人驚嘆。他非常有深度。你是否有注意到，他十分謙虛。他真是獨一無二。

劉：我覺得很有意思的是，我帶他到故宮博物院時，想到他工作的深刻艱難。但當他去故宮時，喜歡的竟是一幅畫著簡單竹枝的畫。

S: 這其實符合我對 Lennart Carleson 的印象。沒錯，他會從中看到一些東西，它們讓他全然著迷或感受深刻。這件事不讓我訝異。

劉：我懂，那竹子...

³³Lennart Carleson (1928~)，瑞典數學家，在調和分析和動力系統領域，解決諸多懸宕多年的難題，做出開創性的深刻貢獻，1992 年獲 Wolf 獎，2006 年獲 Abel 獎。訪談中提及的工作，是他在 1950 及 60 年代證明 L^2 函數的傅氏級數幾乎到處逐點收斂 (Lusin's conjecture)。

³⁴Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903~1987)，俄國數學家，研究領域涵蓋機率論、算法信息論、拓樸學、直覺主義邏輯、紊流、古典力學和計算複雜性理論。

S: 我看著它, 看到一根竹子, 是吧, 沒什麼大不了! 但他看到更多東西。

劉: 是的, 是的。

S: 我想他的數學也是如此, 他看到更多東西。

劉: 是的。當時還有中國山水畫, 但他偏好這竹子!

S: 是的, 聽來沒錯。

劉: 好極了。你是否有些其他人的故事? 我想聽你分享。

S: 好的, 嗯, 數學家的品類繁多。他們有天差地別的自我意識。毫無疑問, 我們各有某種程度的自負, 是吧? 這無庸置疑。但如果你拿 Lennart Carleson 和一些較自負的數學家相比, 就真判若雲泥。

劉: 你之後想進行什麼工作?

S: 嗯, 我的研究慢了下來, 但仍勉力推進。我不希望它逐漸止息, 所以持續不懈; 這很重要, 繼續做, 持續嘗試。我正在做的東西看似會有成果; 這是罕見的狀況, 值得開心。

劉: 什麼工作?

S: 是要建構一些奇異點 (singularity) 的例子。30 多年前, Bob Hardt、Luis Caffarelli³⁵ 與我證明了一個結果³⁶, 對給定的極小子流形, 建構出一整族極小子流形 (minimal submanifolds); 在原給定的子流形的孤立奇異點, 這族子流形會漸進至此給定的子流形。那個結果或許不怎麼有趣, 但擾動 current 來得到其他漸近解, 是個重要的問題。你想要推廣此結果到更高維度的奇異點集合, 而不僅考慮一個孤立的奇異點。但這困難許多, 且完全不清楚什麼猜測屬實。在奇異點集是直線的情況, 我已經有一部分結果。我很喜歡這結果, 但它過於特殊, 不像之前 Bob、Luis 和我的結果具一般性, 所以還有許多東西要了解, 我正嘗試著做。

劉: 聽來令人興奮! 最後問一個問題: 大家都說你是很傑出的老師, 可以提供一些秘訣嗎?

S: 備課顯然極其重要, 我認為或許是最重要的, 比其他事都重要。但光是備課並不足夠, 有時還需要一些天分。我認為就這點而言, 人腦十分有趣; 有些人不管怎麼準備, 都無法教出像樣的課, 只因他們腦袋無法那麼運作。不知怎地, 他們無法把事情用簡單易懂的方式解釋, 因此無法引起聽眾關注, 也不能使他們參與其中。不過我認為, 還是有些規則, 是在你備課和授課時應該依循的。備課方面, 應該花些時間做哲學性的思考, 不只思考應該說什麼, 還要

³⁵Luis Angel Caffarelli (1948~), 阿根廷數學家, 2012 年獲 Wolf 獎, 對自由邊界問題及非線性偏微分方程有重大貢獻。參見本刊 2008 年第 32 卷第 3 期「有朋自遠方來」專訪。

³⁶Caffarelli, L., Hardt, R. and Simon, L. Minimal surfaces with isolated singularities, *Manuscripta Math*, 48 (1984), 1-18.

思考如何表達。例如準備在課堂簡單討論：主要概念怎麼出現？動機又如何產生？通常會有某個想法直接又實在，而如果你可以告訴他們那個想法到底是什麼，他們會非常感激你。但很多人往往只呈現教材上的東西。當然，如果你每週講授五堂大學部的課，可能有時不得不如此。可是，只要情況允許，你應該試著提出簡明扼要的見解，避免在複雜迂迴的解說中打轉，因為講課時，在多半的節點上，你只有十秒鐘吸引他們注意，是吧？之後他們會自言自語，問說：台上的人在說什麼？他想要表達什麼？我認為講課前先思考這些問題是很重要的，而且要試著把這些見解穿插於正式教材。這確實會對你的大學部課程有重大影響，研究所課程亦然。另外，在思考「說什麼」和「如何說」時，或許同樣重要的問題是「不說什麼」。有時太多的討論恐適得其反，增加製造困惑的機會。因此，我們應力求簡明清晰，不要做多餘的解說。

也別忘了：你是人，不是機器人，你的聽眾也是人，所以你要和他們互動，不能只和黑板說話。我見多了這情況：講者一心一意講課，最後只和黑板說話，好像背後空無一人；即如觀眾早都跑光，講者也可以渾然不覺。我總是盡量避免這種極端狀況，盡自己所能，儘量與觀眾有合理互動。也永遠切記：要努力組織課程和授課，使自己至少大半時間樂在其中；如果你無法樂在其中，你的觀眾肯定也難以享用。

劉：我們就以這個樂觀的話語結束。

S：好！

—本文訪問者劉太平任職中央研究院數學研究所—