數學傳播 43卷2期, pp. 97-100

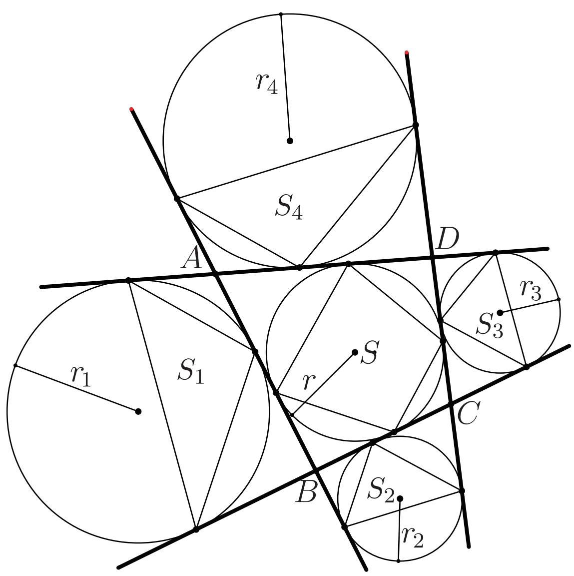
圓外切四邊形涉及旁切圓的一個性質

胡 穎

圓外切四邊形有許多優美的性質, 本文給出的是與它內切圓和四個旁切圓相關的一個性質。

如圖一所示, 圓外切四邊形 $ABCD$, 與四邊形的一邊及它的兩條相鄰邊的延長線都相切的圓稱爲四邊形的一個旁切圓, 共有四個旁切圓。旁切圓的三個切點構成的三角形稱爲這個旁切圓的切點三角形。四邊形的內切圓與各邊的切點構成的四邊形稱爲切點四邊形。設四個旁切圓半徑依次是 r_1, r_2, r_3, r_4, 相對應的四個切點三角形面積依次爲 S_1, S_2, S_3, S_4, 內切圓半徑爲 r, 切點四邊形面積爲 S, 則有如下性質:

$$\frac{S_1}{r_1}+\frac{S_3}{r_3}=\frac{S_2}{r_2}+\frac{S_4}{r_4}=\frac{S}{r}.$$

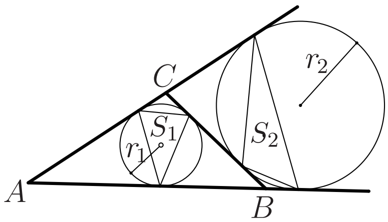


圖一

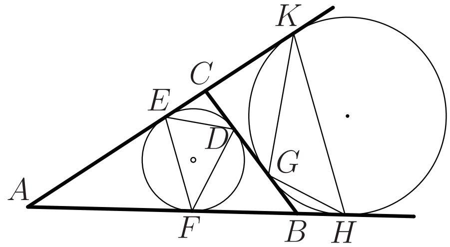
爲了證明上面這個性質, 首先證明一個引理。

引理: 設三角形的內切圓和旁切圓半徑分別爲 r_1 和 r_2, 相對應的切點三角形面積分別爲 S_1 和

S_2, 則有 $\dfrac{S_1}{r_1}=\dfrac{S_2}{r_2}$ (圖二)。



圖二



圖三

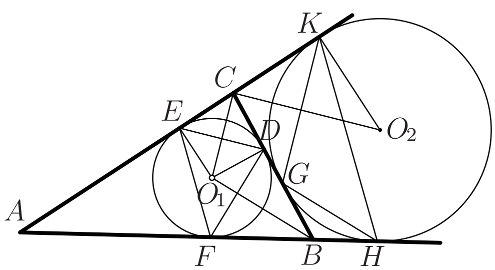
為了證明上面的引理, 先給出並證明下面幾個結論。

結論一: 如圖三, 兩個切點三角形分別是 $\triangle DEF$ 和 $\triangle GHK$, 則有 $\angle EDF+\angle HGK=180^\circ$。當然也有 $\sin\angle EDF=\sin\angle HGK$。

證: $\angle EDF=180^\circ-\angle EDC-\angle FDB=180^\circ-\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle ACB)-\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)=\dfrac{1}{2}\angle ACB+\dfrac{1}{2}\angle ABC$, 同樣可得, $\angle HGK=\dfrac{1}{2}\angle KCB+\dfrac{1}{2}\angle HBC$, 這樣就得到: $\angle EDF+\angle HGK=\dfrac{1}{2}\angle ACB+\dfrac{1}{2}\angle ABC+\dfrac{1}{2}\angle KCB+\dfrac{1}{2}\angle HBC=180^\circ$。

結論二: 如圖四, 三角形內切圓和旁切圓圓心為 O_1 和 O_2, 連 O_1D, O_1E, O_1C, O_2C, O_2K 則有

$$\frac{DE}{GK}=\frac{O_1C}{O_2C},\quad \frac{DF}{GH}=\frac{O_1B}{O_2B}.$$



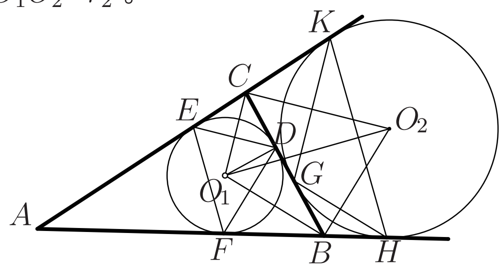
圖四

證: 不難看出, O_1, D, C, E 四點共圓, 則 $\angle KCG=\angle EO_1D$, 又有 $CK=CG$, $O_1E=O_1D$, 從而 $\triangle KCG\sim\triangle EO_1D$, 由此得 $\dfrac{DE}{GK}=\dfrac{O_1E}{CK}$, 又由 $O_1C\perp O_2C$, 可得 $\angle EO_1C=\angle KCO_2$, 從而 $Rt\triangle EO_1C\sim Rt\triangle KCO_2$, 由此得 $\dfrac{O_1E}{CK}=\dfrac{O_1C}{O_2C}$, 即有 $\dfrac{DE}{GK}=\dfrac{O_1C}{O_2C}$, 同

理可證 $\dfrac{DF}{GH}=\dfrac{O_1B}{O_2B}$ 。

結論三: $O_1B\cdot O_1C=O_1O_2\cdot r_1$, $O_2B\cdot O_2C=O_1O_2\cdot r_2$ 。

證: 如圖五, 不難看出 O_1, B, O_2, C 四點共圓, 則 $\angle O_1O_2C=\angle O_1BD$, 由此得: $O_1B\cdot O_1C=O_1B\cdot O_1O_2\cdot\sin\angle O_1O_2C=O_1O_2\cdot O_1B\cdot\sin\angle O_1BD=O_1O_2\cdot O_1D=O_1O_2\cdot r_1$, 同理可證 $O_2B\cdot O_2C=O_1O_2\cdot r_2$ 。



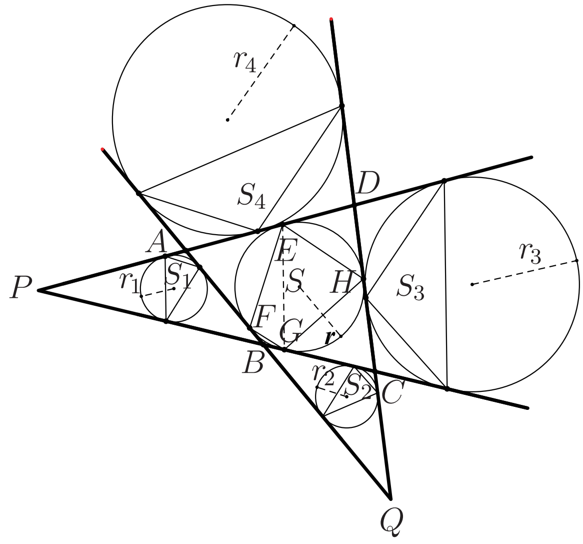
圖五

現在證明引理。綜合以上三個結論, 由圖二及圖三, 即有

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\dfrac{1}{2}DE\cdot DF\cdot\sin\angle EDF}{\dfrac{1}{2}GK\cdot GH\cdot\sin\angle HGK}=\frac{DE}{GK}\cdot\frac{DF}{GH}=\frac{O_1C}{O_2C}\cdot\frac{O_1B}{O_2B}=\frac{O_1C\cdot O_1B}{O_2C\cdot O_2B}$$
$$=\frac{O_1O_2\cdot r_1}{O_1O_2\cdot r_2}=\frac{r_1}{r_2}.$$

有了上面的引理, 證明本文的性質就容易了。我們分兩種情形來說明。

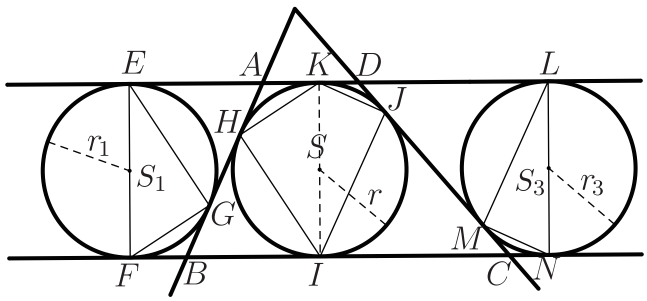
情形一: 圓外切四邊形的兩組對邊分別交於一點;



圖六

如圖六, 圓外切四邊形的兩組對邊分別交於 P 和 Q 點, 四邊形 $ABCD$ 內切圓的切點四邊形爲 $EFGH$, 連接 EG, 對於 $\triangle PAB$, 由引理得: $\dfrac{S_1}{r_1}=\frac{S_{\triangle EFG}}{r}$, 對於 $\triangle PCD$, 由引理得: $\dfrac{S_{\triangle EGH}}{r}=\dfrac{S_3}{r_3}$, 由此得: $\dfrac{S_1}{r_1}+\dfrac{S_3}{r_3}=\dfrac{S_{\triangle EFG}}{r}+\dfrac{S_{\triangle EGH}}{r}=\dfrac{S_{\triangle EFG}+S_{\triangle EGH}}{r}=\dfrac{S}{r}$。同理可證, $\dfrac{S_2}{r_2}+\dfrac{S_4}{r_4}=\dfrac{S}{r}$, 即 $\dfrac{S_1}{r_1}+\dfrac{S_3}{r_3}=\dfrac{S_2}{r_2}+\dfrac{S_4}{r_4}=\dfrac{S}{r}$。

情形二: 圓外切四邊形的兩組對邊有一組對邊平行或兩組對邊分別平行。



圖七

如圖七, 圓外切四邊形 $ABCD$ 的對邊 $AD//BC$, 切點四邊形爲 $KHIJ$, 面積爲 S, 內切圓半徑爲 r。與 AB 相切的旁切圓半徑爲 r_1, 切點三角形爲 EFG, 面積爲 S_1。與 CD 相切的旁切圓半徑爲 r_3, 切點三角形爲 LMN, 面積爲 S_3。顯然 $r_1=r_3=r$。連接 KI, 容易證明 $\triangle EFG\simeq\triangle IKH$(本文略去這個證明), 從而 $S_1=S_{\triangle IKH}$, 同樣得 $S_3=S_{\triangle IKJ}$。這樣就有: $\dfrac{S_1}{r_1}+\dfrac{S_3}{r_3}=\dfrac{S_1+S_3}{r}=\dfrac{S_{\triangle IKH}+S_{\triangle IKJ}}{r}=\dfrac{S}{r}$。如果 $AB//CD$, 則同理可證 $\dfrac{S_2}{r_2}+\dfrac{S_4}{r_4}=\dfrac{S}{r}$, 如果 AB 與 CD 延長線相交於一點, 則由引理可得 $\dfrac{S_2}{r_2}+\dfrac{S_4}{r_4}=\dfrac{S}{r}$。總之我們證明了 $\dfrac{S_1}{r_1}+\dfrac{S_3}{r_3}=\dfrac{S_2}{r_2}+\dfrac{S_4}{r_4}=\dfrac{S}{r}$。

參考文獻

1. 王家傳。圓外切四邊形對邊和定理及其應用。中小學數學(初中版), 2009 年 10 期。
2. 趙海雲。圓外切四邊形的性質及應用。河北教研 , 1999 年 4 期。
3. 王之任。一個圖形中的三個類似結論。中學數學教學, 2000 年 3 期。
4. 鄭金海。用《幾何畫板》探究一道競賽題。中學生數學, 2002 年 23 期。

—本文作者任教中國江蘇省運河高等師範學校—