數學傳播　43卷2期, pp. 94-96

兩個有趣的幾何不等式鏈

趙忠華

本文作者經過研究, 發現三角形中有如下不等式鏈:

定理1: 設 $a,b,c,m_a,m_b,m_c,l_a,l_b,l_c$ 分別表示 $\triangle ABC$ 對應的三條邊長, 中線長, 角平分線長, 則

$$\sum\frac{m_a^2}{l_b^2+l_c^2}\ge\sum\frac{m_a^2}{m_b^2+m_c^2}\ge\frac{3}{2},\qquad \sum\frac{l_a^2}{b^2+c^2}\le\sum\frac{m_a^2}{b^2+c^2}\le\frac{9}{8}.$$

我們先證以下引理。

引理1: $\triangle ABC$ 中, 相應於頂點 A,B,C 的中線長爲 m_a,m_b,m_c 內角平分線長 l_a,l_b,l_c 則 $l_a\le m_a$, $l_b\le m_b$, $l_c\le m_c$。

證明:

$$\because\ m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\ge\frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2-a^2}=\sqrt{p(p-a)}\ge\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}=l_a,$$

$\therefore m_a\ge l_a$, 同理 $m_b\ge l_b$, $m_c\ge l_c$。(其中 p 是三角形的半周長)

引理2: 設 a,b,c 爲正實數, 則

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

證明: 由柯西不等式有:

$$[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\Big(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\Big)\ge 9.$$

於是

$$2(a+b+c))\Big(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\Big)\ge 9,$$

即

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{9}{2},$$

得

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

由引理 1、2, 我們立即可得:

$$\sum\frac{m_a^2}{l_b^2+l_c^2}\geq\sum\frac{m_a^2}{m_b^2+m_c^2}\geq\frac{3}{2}.$$

而

$$\sum\frac{l_a^2}{b^2+c^2}\leq\sum\frac{m_a^2}{b^2+c^2}=\sum\frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2}{b^2+c^2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\sum\frac{a^2}{b^2+c^2},$$

由引理2可得

$$\sum\frac{a^2}{b^2+c^2}\geq\frac{3}{2},$$

所以

$$\sum\frac{l_a^2}{b^2+c^2}\leq\sum\frac{m_a^2}{b^2+c^2}\leq\frac{9}{8}.$$

行文至此, 似乎很滿意了, 無意中翻看雜誌, 發現《數學通報》2016 年第 1 期數學問題解答欄目 2279 題 (江蘇省常熟市中學 查正開) 證明了一個結論 : 設 a,b,c 爲正實數, 則

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2}.$$

他是這樣證明的:

證明: 因爲

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}-\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2}\\
&=\frac{2\sum a^3-\sum a^2(b+c)}{2\prod(a+b)}-\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2}\\
&=\sum\left[\frac{1}{2(a+b)(a+c)}-\frac{1}{\left(\sum a\right)^2}\right](b-c)^2\\
&=\sum\frac{(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2}{2(a+b)(a+c)(\sum a)^2}.
\end{aligned}$$

所以只要證明 $\sum(b+c)(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2\geq 0$, 由對稱性不妨設 $a\geq b\geq c$, 則

$$\begin{aligned}
&\sum(b+c)(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2\\
&\geq(b+c)(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2+(a+c)(a^2-b^2+c^2)(a-c)^2\\
&\geq(b+c)(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2+(b+c)(a^2-b^2+c^2)(b-c)^2\\
&=2(b+c)c^2(b-c)^2\geq 0.
\end{aligned}$$

故不等式成立。

於是

$$\sum\frac{m_a^2}{l_b^2+l_c^2}\geq\sum\frac{m_a^2}{m_b^2+m_c^2}\geq\frac{3}{2}+\frac{(m_a^2-m_b^2)^2+(m_b^2-m_c^2)^2+(m_c^2-m_a^2)^2}{(m_a^2+m_b^2+m_c^2)^2},$$
$$\sum\frac{l_a^2}{b^2+c^2}\leq\sum\frac{m_a^2}{b^2+c^2}=\sum\frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2}{b^2+c^2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\sum\frac{a^2}{b^2+c^2},$$

從而

$$\sum\frac{l_a^2}{b^2+c^2}\leq\sum\frac{m_a^2}{b^2+c^2}\leq\frac{9}{8}-\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{4(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

於是得:

定理 2: 設 $a,b,c,m_a,m_b,m_c,l_a,l_b,l_c$ 分別表示 $\triangle ABC$ 對應的三條邊長, 中線長, 角平分線長, 則

$$\sum\frac{m_a^2}{l_b^2+l_c^2}\geq\sum\frac{m_a^2}{m_b^2+m_c^2}\geq\frac{3}{2}+\frac{(m_a^2-m_b^2)^2+(m_b^2-m_c^2)^2+(m_c^2-m_a^2)^2}{(m_a^2+m_b^2+m_c^2)^2},$$
$$\sum\frac{l_a^2}{b^2+c^2}\leq\sum\frac{m_a^2}{b^2+c^2}\leq\frac{9}{8}-\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{4(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

是剛才的不等式的推廣, 兩個定理都非常漂亮, 而且證明也不是很難。

—本文作者任教中國安徽省旌德中學—