數學傳播 43卷2期, pp. 80-83

回響: 托勒密定理的證明補充

連威翔

一、前言

在數學傳播 164 期「五合一定理」一文中 (請參考 [1]), 作者蔡聰明教授在最後結語處給出關於五個定理或定律間的邏輯網路:

表1

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{三角形的餘弦定律} & \Rightarrow & \text{圓內接四邊形的餘弦定律} \\ & & \Uparrow & & \Downarrow \\ \text{畢氏逆定理} & \Leftrightarrow & \text{畢氏定理} & \Leftarrow & \text{托勒密定理} \end{array}$$

上表中, 各箭頭所指方向的證明推導, 在 [1] 文內相應的各小節中都可以找到。

在 [1] 文中, 如同表 1 所示, 作者先以「三角形的餘弦定律」證明「圓內接四邊形的餘弦定律」, 再透過該定律證明「托勒密定理」。然而, 是否能直接以「三角形的餘弦定律」證明「托勒密定理」呢? 答案是肯定的, 在第二節中, 筆者將介紹一個直接的證明。

除此之外, 筆者也找出另外一種透過解析幾何、並使用三角函數差角公式的證明方法, 希望能供有興趣的讀者參考。

二、筆者的證明

第一種證明: 請先參考下圖, 隨後則是筆者要介紹的證明:

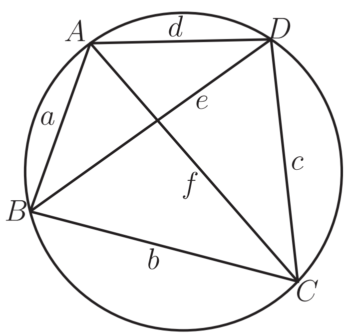

圖1

托勒密定理: 上圖中, 已知圓內接四邊形 $ABCD$ 的四邊長爲 a,b,c,d, 對角線長爲 e,f, 則有 $ef=ac+bd$。

證明1: 因爲 $\angle ABC=\pi-\angle ADC$, 對 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$ 使用三角形的餘弦定律, 可知

$$\begin{aligned}
&\cos\angle ABC=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC\\
&\quad\Rightarrow \frac{a^2+b^2-f^2}{2ab}=-\frac{c^2+d^2-f^2}{2cd}\\
&\quad\Rightarrow cd(a^2+b^2-f^2)=ab(f^2-c^2-d^2)\\
&\quad\Rightarrow (ab+cd)f^2=ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)\\
&\quad\Rightarrow f^2=\frac{ac(bc+ad)+bd(ad+bc)}{ab+cd}=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.
\end{aligned}\tag{1}$$

對 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$ 使用餘弦定律, 同理可知

$$e^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}.\tag{2}$$

將 (1), (2) 相乘可得 $e^2f^2=(ac+bd)^2$, 因此 $ef=ac+bd$。

透過以上證明過程, 我們就成功以三角形的餘弦定律直接推得托勒密定理。

其實在 [1] 文中, 作者完成表 1 內各箭頭所指方向的證明推導後, 也另外以托勒密定理推得三角形的餘弦定律。因此, 配合上面已完成的證明 1, 我們知道托勒密定理與三角形的餘弦定律可以彼此互推。

看完上面的證明, 我們準備來看底下另一種透過解析幾何的證明。

第二種證明: 先回到圖 1, 再次介紹托勒密定理如下:

托勒密定理: 如圖 1, 已知四邊形 $ABCD$ 內接於一圓, 試證明:

$$\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{BC}\times\overline{DA}.\tag{3}$$

證明2: 請先參考下圖:

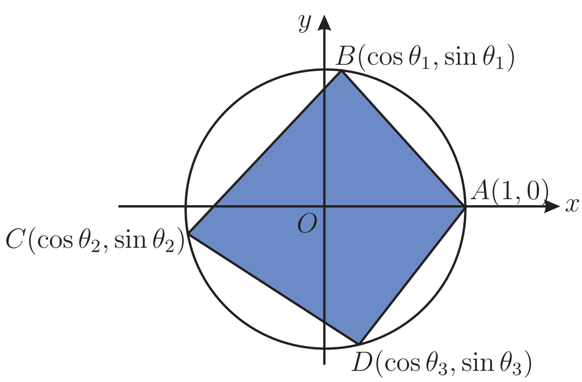

圖 2

上圖中, 我們將四邊形 $ABCD$ 的外接圓半徑視爲一單位長, 並建立坐標系, 將圓心置於原點, 再將頂點 A 置於 $(1,0)$。接著, 假設以直線 OA 爲始邊、以直線 OB, OC, OD 爲終邊的廣義角分別爲 θ_1, θ_2, θ_3, 其中 $0<\theta_1<\theta_2<\theta_3<2\pi$, 則我們有

$$B(\cos\theta_1,\sin\theta_1),\ C(\cos\theta_2,\sin\theta_2),\ D(\cos\theta_3,\sin\theta_3).$$

計算 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 的長度時, 利用半角公式可知

$$\begin{aligned}
\overline{AB}&=\sqrt{(\cos\theta_1-1)^2+\sin^2\theta_1}=\sqrt{2-2\cos\theta_1}=\sqrt{2-2\Big(1-2\sin^2\frac{\theta_1}{2}\Big)}\\
&=2\sqrt{\sin^2\frac{\theta_1}{2}}=2\left|\sin\frac{\theta_1}{2}\right|,\\
\overline{BC}&=\sqrt{(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_1-\sin\theta_2)^2}=\sqrt{2-2\cos(\theta_2-\theta_1)}\\
&=\sqrt{2-2\Big(1-2\sin^2\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\Big)}=2\sqrt{\sin^2\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}=2\left|\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right|.
\end{aligned}$$

因爲 $0<\dfrac{\theta_1}{2}<\pi$ 且 $0<\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}<\dfrac{\theta_2}{2}<\pi$, 可知 $\dfrac{\theta_1}{2}$ 與 $\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}$ 兩角度的正弦值爲正, 因此

$$\overline{AB}=2\sin\frac{\theta_1}{2},\ \overline{BC}=2\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}. \tag{4}$$

同理將有

$$\overline{AC}=2\sin\frac{\theta_2}{2},\ \overline{DA}=2\sin\frac{\theta_3}{2},\ \overline{BD}=2\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2},\ \overline{CD}=2\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2}. \tag{5}$$

利用 (4), (5) 的結果, 知 (3) 的左式可表爲

$$\overline{AC}\times\overline{BD}=4\sin\frac{\theta_2}{2}\times\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}. \tag{6}$$

至於 (3) 的右式則爲

$$\begin{aligned}
\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{BC}\times\overline{DA}&=4\sin\frac{\theta_1}{2}\times\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2}+4\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\times\sin\frac{\theta_3}{2}\\
&=4\sin\frac{\theta_1}{2}\times\Big(\sin\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}-\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}\Big)\\
&\quad+4\sin\frac{\theta_3}{2}\times\Big(\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}-\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\Big)\\
&=4\sin\frac{\theta_2}{2}\times\Big(\sin\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}-\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}\Big)\\
&=4\sin\frac{\theta_2}{2}\times\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

比較 (6), (7) 兩式, 可知圖 2 有 $\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{BC}\times\overline{DA}$, 定理得證。

三、結語

筆者推測, [1] 的作者應該知道第二節中證明 1 的手法, 但是因爲想介紹「圓內接四邊形的餘弦定律」給大家, 所以才刻意在 [1] 文中以它作橋樑, 連結三角形的餘弦定律與托勒密定理 (如同表 1 所示)。

至於第二節中的證明 2, 其實是筆者在戶外慢跑的過程中所想到的 (多虧了夏夜的涼風), 這個證明其實多少受到底下差角公式的解析證明所啟發:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

會有動機想再找一個證明, 是因爲筆者認爲證明 1 應該有不少人也會推導, 所以才會想再找一個較不常見的證法做爲對照。不過, 沒想到寫完證明 2 之後, 才發現其篇幅比證明 1 多了不少。

無論如何, 第二節中的兩個證明都不難, 有高中數學程度的讀者應該都可以理解。希望本文的兩個證明, 可作爲讀者學習托勒密定理的參考, 也可將本文視爲對 [1] 文的補充。最後, 如果閱讀本文時能帶給大家一些樂趣, 那就更棒了。

參考資料

1. 蔡聰明。五合一定理。數學傳播季刊, 41(4), 60-68, 2017。Available from : http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d414/41406.pdf.

—本文作者投稿時任職四方牧場—