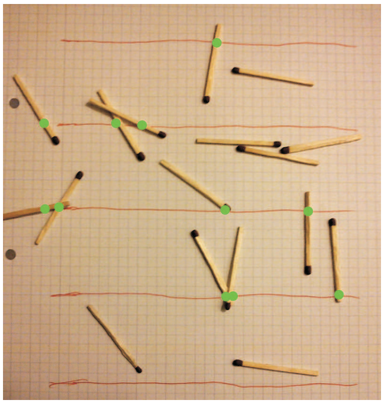
數學傳播　43卷2期, pp. 55-62

Buffon 投針問題

黃　越

Buffon 投針問題是概率論中一個著名的問題:

平面上畫滿間距爲 a 的平行直線, 向該平面隨機拋擲[1]一枚長度爲 l $(l<a)$ 的針, 求該針與直線相交的概率。



可以用微積分的方法來解這一問題。以 E 表示針與直線相交的事件, 先來看如何描述 Ω 和 E。易知, 針的位置可以由它的中點到最近的直線的距離 ρ, 以及它與直線的夾角 θ 決定, 所以

$$\Omega=\left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ \rho\le\frac{a}{2}, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

而針與直線相交, 當且僅當 $\rho\le\dfrac{l}{2}\sin\theta$, 所以

$$E=\left\{(\rho,\theta)\ \middle|\ (\rho,\theta)\in\Omega, \rho\le\frac{l}{2}\sin\theta\right\}.$$

隨機投擲就意味著樣本點 (ρ,θ) 在 Ω 中均匀分佈, 所以適用於幾何概型。於是

$$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{L}(E)}{\mathbf{L}(\Omega)}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{l}{2}\sin\theta\ \mathrm{d}\theta}{\frac{\pi a}{4}}=\frac{\frac{l}{2}}{\frac{\pi a}{4}}=\frac{2l}{\pi a}.$$

[1]隨機投擲是指針的中點在平面上是任意分佈的, 並且針與平行直線間的夾角也是任意的。

1860年, E. Barbier 發現其實 Buffon 問題並不一定是需要用到積分才能獲得解決的。拋擲一根針 (可長可短), 則產生交點數X的數學期望爲

$$\mathbf{E}X=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k,$$

其中 p_k 表示這根針下落後恰好有 k 個交點的概率 (針恰好落在某條直線上的事件發生的概率爲 0, 故可忽略不計)。當針長 l 小於平行直線間的距離 a 時, 針頂多就只能和平行直線有一個交點了。我們知道, 隨機變數X的數學期望 $\mathbf{E}X$ 本質上就是一種 Lebesgue 積分, 而 Lebesgue 積分是具有線性性的, 因而無論兩個事件 X 和 Y 是否相互獨立, 總有

$$\mathbf{E}(X+Y)=\mathbf{E}X+\mathbf{E}Y.$$

將一根長爲 l $(l<a)$ 的針分爲長爲 x 的「前端」與長爲 y 的「後端」, 由此也就知道這根針與平行直線交點數的數學期望就等於其「前端」與平行直線交點數的數學期望和其「後端」與平行直線交點數的數學期望之和, 即長爲 l $(l<a)$ 的針與平行直線相交的概率等於其「前端」與平行直線相交的概率和其「後端」與平行直線相交的概率之和。顯然長度爲 0 的針與平行直線相交的概率爲 0。在數學分析裏面, 我們知道一個 $\mathbb{R}$ 上的連續函數 f 如果滿足: $f(0)=0$, 且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $(\forall x,y\in\mathbb{R})$, 那麼

$$f(x)=f(1)x.$$

由此, 我們也知道長爲 l $(l<a)$ 的針與平行直線相交的概率等於長爲 1 的針與平行直線相交的概率 (記爲常數 k) 再乘上長度 l。接下來就是要去求這個 k 了。對於一般的多邊形而言, 它可以看做是若干條線段所構成的, 其產生的交點數就是每一邊線段所產生的交點數之和。而如果這些線段的長度都小於 a, 由剛才的分析知總的交點數就等於各邊交點數之和, 也就等於各邊與平行直線相交的概率之和。如果周長爲 l 的多邊形滿足上述的性質, 那麼就得到它與平行直線相交的交點數的期望爲 kl。Barbier 解決 Buffon 投針問題的關鍵就是考察了一根直徑爲 a, 即周長爲 πa 的圓形針, 這根針無論如何總會和平行直線有兩個交點。

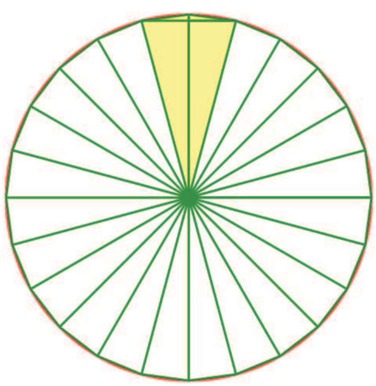


圖 1: 用內接多邊形 P_n 和外切多邊形 P^n 去逼近圓

這個圓可由內接多邊形 P_n 和外切多邊形 P^n 去逼近, 並且每條與 P^n 相交的直線一定也會與圓相交, 而每條與圓相交的直線也一定會與 P_n 相交, 因此我們知道圓的交點數的期望是介於內接多邊形 P_n 和外切多邊形 P^n 交點數的數學期望之間。現在 P_n 和 P^n 都是多邊形, 故二者交點數的期望都是 k 倍的長度, 於是得到

$$k \times P_n \text{ 的周長 } \leq 2 \leq k \times P^n \text{ 的周長},$$

在不等式的兩邊同時令 $n \to \infty$, 就得到

$$k \cdot a\pi \leq 2 \leq k \cdot a\pi,$$

從而

$$k = \frac{2}{\pi a}.$$

當針長爲 l $(l < a)$ 時, 代入後就得到其與平行直線相交的概率爲 $\dfrac{2l}{\pi a}$。在這裏也可以將長爲 l $(l < a)$ 的針視爲長爲 l $(l < a)$ 而寬趨於 0 的一個矩形, 這時候矩形的周長就是 $2l$ 了。當然, 這是有助於讓我們更直觀地瞭解 Buffon 投針問題的, 不過還不能說這是嚴格的證明。事實上, 可以將 Buffon 投針問題推廣到一般凸的[2]圖形上去:

> 平面上畫滿間距爲 a 的平行直線, 向該平面隨機拋擲一個凸圖形, 區域的周長爲 c, 且區域的直徑[3] $d < a$, 則凸圖形和平行直線相交的概率爲
>
> $$\mathbf{P}(E) = \frac{c}{\pi a}.$$

容易驗證的是, Buffon 投針問題實際上就是上面結論的一種特殊情形 (矩形是凸多邊形, 而當矩形的寬趨於零時, 矩形就退化成兩條重合的直線了)。證明這個問題的想法是簡單的, 先從直線段做起, 再到三角形, 然後是多邊形, 最後用逼近的方法去推廣到一般的凸圖形。直線段我們已經由積分給出了嚴格的證明, 下面開始從三角形證明起。

例 1: 平面上有一族間距爲 a 的平行直線, 向平面上隨機拋擲一個三邊長爲 l_1, l_2 和 l_3 的三角形, 其中 $l_1, l_2, l_3 < a$, 求這個三角形與平行直線相交的概率。[4]

---

[2]數學上, 說一個區域是凸的, 也就是說區域上面任意兩點連線都在區域內。

[3]凸圖形 G 的直徑指的是

$$\sup\left\{|AB| \;\middle|\; \forall A, B \in G\right\}.$$

[4]隨機投擲是指三角形當中, 選定一條邊, 這條邊的中點到平行直線的最短距離 ρ 以及與平行直線的夾角 θ, 樣本點 (ρ, θ) 是均勻分佈的。

解: 分別三邊與直線相交的三個事件分別記爲 E_1, E_2 和 E_3。於是三角形與直線相交的事件 $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, 故

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3)\\ &= \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \mathbf{P}(E_3) - \mathbf{P}(E_1E_2) - \mathbf{P}(E_1E_3) - \mathbf{P}(E_2E_3) + \mathbf{P}(E_1E_2E_3).\end{aligned}$$

由概率的可列可加性知

$$\mathbf{P}(E_1E_2) + \mathbf{P}(E_1E_3) = \mathbf{P}[E_1(E_2 \cup E_3)],$$

又 $E_1 \subset (E_2 \cup E_3)$, 於是

$$\mathbf{P}(E_1E_2) + \mathbf{P}(E_1E_3) = \mathbf{P}(E_1).$$

同理, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E_1E_2) + \mathbf{P}(E_2E_3) &= \mathbf{P}(E_2),\\ \mathbf{P}(E_1E_3) + \mathbf{P}(E_2E_3) &= \mathbf{P}(E_3),\end{aligned}$$

顯然$\mathbf{P}(E_1E_2E_3) = 0$, 於是

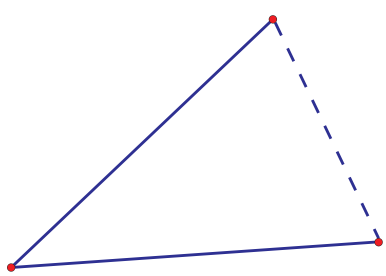
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3)\\ &= \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \mathbf{P}(E_3) - \mathbf{P}(E_1E_2) - \mathbf{P}(E_1E_3) - \mathbf{P}(E_2E_3) + \mathbf{P}(E_1E_2E_3)\\ &= \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \mathbf{P}(E_3) - \frac{1}{2}\big(\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \mathbf{P}(E_3)\big) + 0\\ &= \frac{1}{2}\big(\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \mathbf{P}(E_3)\big).\end{aligned}$$

又由 Buffon 投針問題知 $\mathbf{P}(E_1) = \frac{2l_1}{\pi a}, \mathbf{P}(E_2) = \frac{2l_2}{\pi a}, \mathbf{P}(E_3) = \frac{2l_3}{\pi a}$。代入後就得到

$$\mathbf{P}(E) = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{\pi a}.$$

推論: 平面上有一族間距爲 a 的平行直線, 向平面上隨機拋擲一個缺邊的三角形, 兩條邊長爲 l_1, l_2, 夾角爲 α, 其中 $l_1 + l_2 < a$, 則這個缺邊的三角形與直線相交的概率爲

$$\mathbf{P}(E) = \frac{l_1 + l_2 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos\alpha}}{\pi a}.$$



要證明推論只需要將缺的那條邊補上, 由餘弦定理得到所缺的那條邊的邊長爲 $\sqrt{l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\alpha}$, 記事件 E_1 爲補上缺的那條邊以後的三角形與平行直線相交, 顯然不可能出現平行直線只穿過所缺的那條邊的情形, 容易證明 $E_1=E$, 再由例 1 知

$$\mathbf{P}(E)=\mathbf{P}(E_1)=\frac{l_1+l_2+\sqrt{l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\alpha}}{\pi a},$$

特別地

- 當 $\alpha=0$ 時, $\mathbf{P}(E)=\max\{l_1,l_2\}$。
- 當 $\alpha=\pi$ 時, $\mathbf{P}(E)=l_1+l_2$。

這兩種情形就是缺邊的三角形退化成一根針時候的情況。

例 2: 平面上有一族間距爲 a 的平行直線, 向平面上隨機抛擲一個四邊長爲 l_1,l_2,l_3 和 l_4 的凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 其中四邊形的四個頂點間最大距離小於 a, 求這個四邊形與平行直線相交的概率。[5]

解: 將凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 剖分成兩個三角形 $\triangle A_1A_2A_4$ 與 $\triangle A_2A_3A_4$。記 $A_2A_4=l_5$, 事件 E_1,E_2 分別爲 $\triangle A_1A_2A_4$ 與 $\triangle A_2A_3A_4$ 與平行直線相交, 於是 $E=E_1\cup E_2$, 從而

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E)&=\mathbf{P}(E_1\cup E_2)\\&=\mathbf{P}(E_1)+\mathbf{P}(E_2)-\mathbf{P}(E_1E_2).\end{aligned}$$

由例1可知

$$\mathbf{P}(E_1)+\mathbf{P}(E_2)=\frac{l_1+l_2+l_3+l_4+2l_5}{\pi a},$$

而$E_1E_2=A_2A_4$和平行直線相交, 由 Buffon 投針問題知

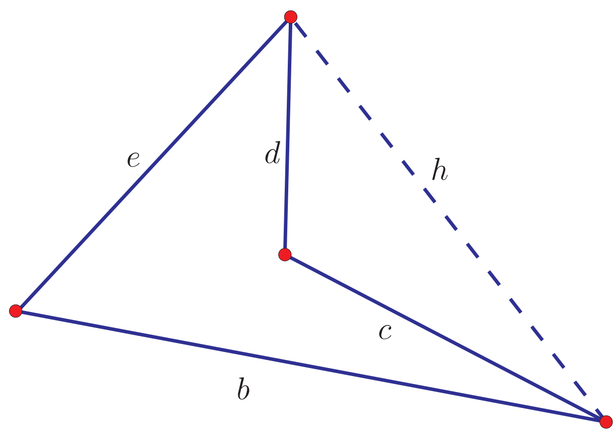
$$\mathbf{P}(E_1E_2)=\frac{2l_5}{\pi a},$$

代入後就得到

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E)&=\mathbf{P}(E_1)+\mathbf{P}(E_2)-\mathbf{P}(E_1E_2)\\&=\frac{l_1+l_2+l_3+l_4+2l_5}{\pi a}-\frac{2l_5}{\pi a}\\&=\frac{l_1+l_2+l_3+l_4}{\pi a}.\end{aligned}$$

[5]隨機投擲是指凸四邊形當中, 任意選定一條邊, 這條邊的中點到平行直線的最短距離 ρ 以及與平行直線的夾角 θ, 樣本點(ρ,θ)是均勻分佈的。

前面我們討論的是凸四邊形的情形, 可是如果四邊形是凹的情形, 結論又會怎樣呢?



如圖, 假設這個凹四邊形的四條邊邊長分別爲 b, c, d, e, 我們可以連接凹四邊形的「凹點」相鄰的兩點, 並設其長爲 f。顯然, 同樣不可能出現平行直線穿過新連接的線卻又不穿過這兩條「凹線」的情況。因此, 若記事件 E_1 爲連接後所得到的三角形與平行直線相交, 容易證明 $E_1 = E$, 故

$$\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(E_1) = \frac{b+e+h}{\pi a}.$$

例3: 平面上有一族間距爲 a 的平行直線, 向平面上隨機拋擲一個周長爲 l 的凸 n 邊形, 其中 n 邊形的 n 個頂點間最大距離小於 a, 求這個 n 邊形與平行直線相交的概率。[6]

解: 這個 n 邊形與平行直線相交的概率爲

$$\mathbf{P}(E) = \frac{l}{\pi a}.$$

用數學歸納法, 假設對凸 $n-1$ 邊形結論成立。考慮凸 n 邊形, 可將其分爲凸 $n-1$ 邊形和一個三角形, 再仿上例可證。

例4: 平面上有一族間距爲 a 的平行直線, 向平面上隨機拋擲一個周長爲l的凸形, 其中直徑$d < a$, 求這個凸形與平行直線相交的概率。[7]

解: 在數學分析裏我們知道, 凸形是分段光滑的, 因而對於有限平面凸形邊界曲線總是可以對它做曲線積分的. 做凸形的內接多邊形 P_n, 如果凸形做 n 的分割, 得到 n 個分點, 順次連接得

[6]隨機投擲是凸 n 邊形當中, 任意選定一條邊, 這條邊的中點到平行直線的最短距離 ρ 以及與平行直線的夾角 θ, 樣本點 (ρ, θ) 是均勻分佈的。

[7]隨機投擲是指凸形當中, 任意選定凸形邊上的兩點, 這兩點相連得到的線段中點到平行直線的最短距離 ρ 以及與平行直線的夾角 θ, 樣本點 (ρ, θ) 是均勻分佈的。

到凸 n 邊形。取 P_n 周長的上確界作爲凸形的周長[8]。令事件 E_n 爲凸 n 邊形與平行直線相交, $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是上升的事件列, 即 $E_n \subset E_{n+1}$, 由上面的例3以及概率的下連續性知

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(E_n) = \frac{l}{\pi a}.$$

下面就用一個例子來檢驗例 4 的正確性:

平面上畫有一族間距爲 a 的平行直線, 向平面上隨機拋擲一個直徑爲 l 的半圓形塑膠片, 其中 $l < a$。試求塑膠片與直線相交的概率。

將原有的半圓形塑膠片成爲「甲片」, 另取一個同樣的半圓形塑膠片, 稱爲「乙片」。設想塑膠片沒有厚度, 將它們拼成一個直徑爲 l 的圓。現在向平面拋擲這個圓形塑膠片。分別以 A 和 B 表示「甲片」和「乙片」與直線相交的事件。於是, $A \cup B$ 表示圓形塑膠片與直線相交的事件, 而 AB 表示「甲片」和「乙片」都與直線相交的事件, 注意到半圓是凸圖形, 所以 AB 等價於兩個「半圓」的公共直徑 (相當於一根長度爲 l 的針) 與直線相交的事件。易知 $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$, 由 Buffon 投針問題知 $\mathbf{P}(AB) = \frac{2l}{\pi a}$, 下面來求 $\mathbf{P}(A \cup B)$。設 d 表示圓心到直線的最近距離, 易知有

$$\Omega = \left\{d \middle| 0 \le d \le \frac{a}{2}\right\},\ A \cup B = \left\{d \middle| 0 \le d \le \frac{l}{2}\right\},$$

所以

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{\mathbf{L}(A \cup B)}{\mathbf{L}\Omega} = \frac{l}{a} = \frac{\pi l}{\pi a}.$$

由概率的加法公式知

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = 2\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB),$$

所以求得

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(AB)}{2} = \frac{\frac{1}{2}\pi l + l}{\pi a}.$$

分子 $\dfrac{1}{2}\pi l + l$ 恰好就是半圓形塑膠片的周長!

剛才我們所討論的都是平面凸圖形, 如果換爲平面凹圖形, 有沒有相應的結論呢? 其實我們在例 1 和例 2 已經有了一些討論了, 例 1 中缺邊的三角形和例 2 中凹四邊形就是兩個凹圖形。那麼我們當時是怎麼處理的呢? 是將它「補」起來,「補成」一個凸圖形, 這樣的凸圖形叫做由缺邊的三角形 (凹四邊形) 生成的最小凸形。我們有結論

[8] 數學上定義的弧長如下: 設 $P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ 爲 $[a,b]$ 上的一個分割, $A_i = (x(t_i), y(t_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$ 爲曲線 Γ 上相應點, 令

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2},$$

$\Gamma = \sup_P L(P)$ 稱爲 Γ 的弧長。

> 平面上畫有一族間距爲 a的平行直線, 向平面上隨機拋擲一個圖形 (可凹可凸), 其中圖形的直徑 $d < a$, 則這個圖形與平行直線相交的概率等於由其生成的最小凸形與平行直線相交的概率。[9]

這是因爲如果平行直線穿過這個圖形, 也就一定穿過由其生成的最小凸形; 反過來, 如果平行直線穿過由其生成的最小凸形, 也就一定會穿過它 (若不然就和最小凸形的定義相矛盾了)。如果記事件 E 爲平行直線穿過圖形, 事件 E_1 爲平行直線穿過由其生成的最小圖形, 由上面的分析就有 $E = E_1$, 從而

$$\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(E_1).$$

致謝: 感謝中國科學技術大學蘇淳教授對我的幫助。

參考文獻

1. 蘇淳。概率論 (第二版)[M]。科學出版社, 34-35, 51, 57, 2009年。
2. 馮榮權等譯。數學天書中的證明 (第四版)[M]。高等教育出版社, 177-180, 2011年。
3. 張築生。數學分析新講 (第一冊)[M]。北京大學出版社, 251-252, 1988年。

—本文作者投稿時就讀於中國華東師範大學數學科學學院—

[9]隨機投擲是指圖形當中, 任意選定圖形邊的兩點, 這兩點相連得到的線段中點到平行直線的最短距離 ρ 以及與平行直線的夾角 θ, 樣本點 (ρ, θ) 是均勻分佈的。