數學傳播 43卷2期, pp. 49-54

抽籤的公平性

周伯欣

1. 引言

過往還在施行徵兵制的年代, 在兵役抽籤現場, 待抽籤的役男泰半不願意抽到「海軍陸戰隊」。抽籤時常會見到一個特殊景象: 每當抽籤主持人宣布又再度抽出一支海軍陸戰隊, 那台下還沒抽籤的役男們就會爆出聲聲歡呼, 因爲在他們心中, 抽籤箱中每當少了一支「海陸」, 那麼還沒抽籤的他們抽到海陸的機率又降低了一些。

這樣的想法正確嗎? 在網路世界中, 抽籤的公平性問題在 PTT 的軍旅版、八卦版以及數學板等都是個歷久不衰的討論熱題 ([1])。

事實上現場群衆歡呼的想法是錯的。因爲我們可以利用數學的機率理論證明, 不管是在抽籤順序中排前還是排後, **每個人中籤的機率都是相同的!** 其實現行高中數學教材已對抽籤問題較小的模型進行討論, 題目的形式大概都是:「設籤筒中有 5 支籤, 其中恰有 2 支有獎。今有 5 人依序抽籤(取後不放回), 求下列各事件發生的機率: (1) 第 1 人中獎; (2) 第 3 人中獎; (3) 第 5 人中獎。([2] 3-3 例題5、[3] 3-3 例題 5、[4] 3-3 例題 4、[5] 3-3 例題 4)」多數教科書在這道例題後都給出以下結論:「從例題 5 及其後的隨堂練習, 我們看到每個人中獎的機率都一樣。一般而言, 抽籤中獎的機率與抽籤的次序無關。([2], p.125)」然而, 所有課本都沒有討論或證明一般情況。建國中學的林信安老師在其講義中討論了一般情況的證明 ([6]), 不過林老師並非使用條件機率的公式或定理來導出一般情況的結果, 而是將抽籤過程整體視爲一種有序排列, 以排列的觀點來論證。

從前我讀高中時, 也是以排列的觀點來思考, 當時想得不夠深, 能得到答案就沾沾自喜, 但心中始終隱約有個疙瘩。如今身分轉換, 在補習班執教鞭, 每每講到這一段時, 總感覺自己講得不夠透徹, 當年的疙瘩愈發襲上心頭。沉思一陣子, 心中的疑問逐漸澄清:「如果這個結果要用排列的觀點來解釋, 那爲何這題目要放在條件機率的章節呢? 課本與參考書都是針對較小的人數與籤數論證, 可是又說『一般情況也成立』, 那爲何不給出論證呢?」遍查相關資料, 大多語焉不詳, 一直沒有見到令人信服的講法。今年暑假, 趁著學生們指考完後比較空閒, 花了幾天功夫, 又與朋友討論一番, 總算給出了以下的論證。

2. 抽籤是公平的

首先回顧條件機率的乘法原理的一般形式：

引理 1: 設 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ 爲樣本空間中的 n 個事件, 若 $P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) > 0$, 則

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) \cdots P(E_n \mid E_1 \cap E_2 \cap \cdots E_{n-1}).$$

現在進行以下假設：籤筒中共有 n 支籤 $(n \geq 1)$, 其中 k 支有獎 $(1 \leq k \leq n)$, 今有 p 個人依序來抽籤 $(1 \leq p \leq n)$, 抽後不放回, 命第 i 個人 $(1 \leq i \leq p)$ 中獎的事件爲 A_i。

再由逐步淘汰原理不難得

$$\begin{aligned}
P(A_i) = {} & P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_i) \\
& + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_i) \\
& + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_i) \\
& + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_i) \\
& + \cdots \\
& + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i) \\
& + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_i) \\
& + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_i) \\
& + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_i) \\
& + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_i) \\
& + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i) \\
& + \cdots \\
& + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i).
\end{aligned}$$

根據引理 1 有

$$\begin{aligned}
P(A_i) = {} & P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_i \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{i-1}) \\
& + P(A_1^c) \cdot P(A_2 \mid A_1^c) \cdot P(A_3 \mid A_1^c \cap A_2) \cdots P(A_i \mid A_1^c \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{i-1}) \\
& + P(A_1) \cdot P(A_2^c \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2^c) \cdots P(A_i \mid A_1 \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1}) \\
& + P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3^c \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_i \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_{i-1}) \\
& + \cdots \\
& + P(A_1^c) \cdot P(A_2^c \mid A_1^c) \cdot P(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c) \cdots P(A_i \mid A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1})
\end{aligned}$$

$$+P(A_1^c)\cdot P(A_2\mid A_1^c)\cdot P(A_3^c\mid A_1^c\cap A_2)\cdots P(A_i\mid A_1^c\cap A_2\cap A_3^c\cap\cdots\cap A_{i-1})$$
$$+\cdots$$
$$+P(A_1^c)\cdot P(A_2^c\mid A_1^c)\cdot P(A_3^c\mid A_1^c\cap A_2^c)\cdots P(A_i\mid A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_{i-1}^c).\quad (1)$$

在 (1) 式中要留意不同的 (i,k) 組合會使得上式中部分的集合爲空集合。例如當 $n=10$, $k=5$, $i=9$ 時, 有

$$P(A_1^c)\cdot P(A_2^c\mid A_1^c)\cdot P(A_3^c\mid A_1^c\cap A_2^c)\cdots P(A_9\mid A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_8^c)=0,$$

這是因爲如果前 8 個人完全都不中獎, 那麼算上現在確定中獎的第 9 人, 再加上可安排中獎的第 10 人, 這樣中獎的人也才 2 人而已, 與前提相違。換句話說, 由鴿籠原理 (Pigeonhole principle) 可知前 8 人之中至少有 3 人會中獎, 從而在事件 $A_1^c, A_2^c, A_3^c, \ldots, A_8^c$ 當中至少有 3 個事件爲空事件。所以在進行具體計算時, 要根據不同組合的 (i,k)來討論。

針對不同組合的 (i,k) 進行討論時, 我著眼於無獎籤的數量是否充足, 得出了以下 4 類情況。

2.1. $i\le k$ 時

2.1.1. 無獎籤充足的情況

k 支中獎籤中拿取 1 支給第 i 人後, 剩下 $k-1$ 支有獎籤。由 $i\le k$ 得 $i-1\le k-1$, 這意味著有獎籤的數量是充足的, 能夠讓前 $i-1$ 人全部都中獎。無獎籤此時有 $n-k$ 支。如果 $n-k\ge i-1$, 也就是對於前 $i-1$ 人而言, 無獎籤的數量也是充足的, 那麼前 $i-1$ 人的中獎與不中獎人數的分佈情況如下表 1 所示：

表 1: $i\le k$, 且無獎籤充足時的中獎/不中獎人數分佈情況

中獎人數	不中獎人數
$i-1$	0
$i-2$	1
$i-3$	2
$\vdots$	$\vdots$
2	$i-3$
1	$i-2$
0	$i-1$

從而由 (1) 可得出

$$\begin{aligned}
P(A_i) &= \frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}\cdots\frac{k-(i-2)}{n-(i-2)}\cdot\frac{k-(i-1)}{n-(i-1)}\\
&\quad+\left[\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n-1}\cdots\frac{k-(i-3)}{n-(i-2)}\cdot\frac{k-(i-2)}{n-(i-1)}\right]\cdot\binom{i-1}{1}\\
&\quad+\left[\frac{n-k}{n}\cdot\frac{n-k-1}{n-1}\cdot\frac{k}{n-2}\cdots\frac{k-(i-4)}{n-(i-2)}\cdot\frac{k-(i-3)}{n-(i-1)}\right]\cdot\binom{i-1}{2}\\
&\quad+\cdots+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{n-k-1}{n-1}\cdots\frac{n-k-(i-2)}{n-(i-2)}\cdot\frac{k}{n-(i-1)}\\
&=\frac{(n-i)!}{n!}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}\frac{(n-k)!}{[(n-k)-j]!}\frac{k!}{[k-(i-j)]!}\\
&=\frac{(n-i)!}{n!}(i-1)!k\sum_{j=0}^{i-1}\binom{(n-1)-(k-1)}{j}\binom{k-1}{(i-1)-j}\\
&=\frac{(n-i)!}{n!}(i-1)!k\binom{n-1}{i-1}=\frac{k}{n};
\end{aligned}$$

這裡的計算用到了組合恆等式 $\displaystyle\binom{n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{n-m}{j}\binom{m}{k-j}$。

2.1.2. 無獎籤不足的情況

如果 $n-k<i-1$, 也就是對於前 $i-1$ 人而言, 無獎籤的數量是不足的, 那麼前 $i-1$ 人的中獎與不中獎人數的分佈情況如下表 2 所示：

表 2: $i\le k$, 且無獎籤不足時的中獎/不中獎人數分佈情況

中獎人數	不中獎人數
$i-1$	0
$i-2$	1
$\vdots$	$\vdots$
$i-k-n-1$	$n-k$

仿照 2.1.1 的討論, 此時必須修改和式的上限爲 $n-k$,

$$P(A_i)=\frac{(n-i)!}{n!}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{i-1}{j}\frac{(n-k)!}{[(n-k)-j]!}\frac{k!}{[k-(i-j)]!}.$$

同 2.1.1 的計算一樣可得 $P(A_i)=\dfrac{k}{n}$。

2.2. $i > k$ 時

2.2.1. 無獎籤充足的情況

首先分析有獎籤數量是否充足。由 $i > k$ 得 $k - 1 < i - 1$, 這意味著對於前 $i - 1$ 人而言有獎籤的數量是不足的。接著來分析無獎籤的數量。現在假設無獎籤是充足的, 也就是有 $n - k \geq i - 1$, 那麼前 $i - 1$ 人的中獎與不中獎人數的分佈情況如下表 3 所示：

表 3: $i > k$, 且無獎籤充足時的中獎/不中獎人數分佈情況

中獎人數	不中獎人數
$k - 1$	$i - k$
$k - 2$	$i - k + 1$
$\vdots$	$\vdots$
1	$i - 2$
0	$i - 1$

仿照前文討論, 修改和式的上、下限, 幾乎完全相同的計算, 得

$$P(A_i) = \frac{(n-i)!}{n!} \sum_{j=i-k}^{i-1} \binom{i-1}{j} \frac{(n-k)!}{[(n-k)-j]!} \cdot \frac{k!}{[k-(i-j)]!} = \frac{k}{n}.$$

2.2.2. 無獎籤不足的情況

對於無獎籤不足的情況, 此時 $n - k < i - 1$, 那麼前 $i - 1$ 人的中獎與不中獎人數的分布情況如下表 4 所示：

表 4: $i > k$, 且無獎籤不足時的中獎/不中獎人數分佈情況

中獎人數	不中獎人數
$k - 1$	$i - k$
$\vdots$	$\vdots$
$i - n + k$	$n - k - 1$
$i - 1 - n + k$	$n - k$

仿照前文討論, 修改和式的上下限, 幾乎完全相同的計算, 得

$$P(A_i) = \frac{(n-i)!}{n!} \sum_{j=i-k}^{n-k} \binom{i-1}{j} \frac{(n-k)!}{[(n-k)-j]!} \cdot \frac{k!}{[k-(i-j)]!} = \frac{k}{n}.$$

3. 結論

綜合以上討論, 我們利用了條件機率的觀點得到了

定理 1: 若籤筒中共有 n 支籤 $(n \geq 1)$, 其中 k 支有獎 $(1 \leq k \leq n)$, 今有 i 個人依序來抽籤, 則每一人中獎的機率都相同, 皆爲 $\dfrac{k}{n}$。

致謝

本文寫作過程中, 感謝任教於金門高中的好友許淵智老師共同討論, 也感謝師大數學系許志農教授撥冗幫筆者查看計算手稿。最後感謝筆者的學生周采妮、張紋綺以及李依淳協助斧正文稿錯字與文句。

參考資料

1. PTT 軍旅版, [閒聊] 抽籤機率
   `https://www.ptt.cc/bbs/SMSlife/M.1403229694.A.CC2.html`
2. 李虎雄等。高中數學 2。康熹文化, 2012年。
3. 林福來等。高中數學 2。南一書局, 2012年。
4. 游森棚主編。高中數學 2。翰林出版, 2017年三版。
5. 許志農主編。高中數學 2。龍騰文化。
6. 林信安。高中數學上課講義。第 2 冊, 3-3 條件機率與貝氏定理
   `http://math1.ck.tp.edu.tw/`

—本文作者任教於台北鵬展文理補習班, 主持網路數學部落格[宇宙數學教室]—