數學傳播 43卷2期, pp. 24-26

漫步科研 —康托朱利亞集之退化

陳怡全

— 本文於 2019 年 4 月 15 日刊載於中研院訊漫步科研專欄, 作者及院訊同意本刊轉載 —

在動力系統的研究中, 複動力系統是一個相當引人入勝的領域。其中繽紛燦爛、光彩奪目的曼德布洛特集和朱利亞集, 以及其複雜的碎形結構所意涵的拓樸性質、測度性質、動力機制, 以及熱力學統計性質, 更是研究的核心課題。

曼德布洛特集合的重要拓樸性質之一, 乃是它是緊緻且單連通的。當初由於電腦的精度不夠, 曼德布洛特剛開始時認爲該集合是不連通的, 這個性質後來才由 Douady 和 Hubbard 證出。如果我們用 $\mathcal{M}$ 來代表曼德布洛特集, 並且考慮一個映射 $f_c : z \mapsto z^2 + c$, 其中變數 z 和參數 c 都是複數。然後考慮 z 在 f_c 的迭代之下, 即 $z \mapsto f_c(z) \mapsto f_c^2(z) \mapsto f_c^3(z) \mapsto \cdots$ 的行爲, 那 $\mathcal{M}$ 其實是一個很簡單可以定義出來的集合: 它就是那些使得原點 0 在 f_c 的迭代之下, 不會跑到無限遠的那些參數 c 所成的集合! 曼德布洛特集對於朱利亞集的一個拓樸性質扮演重要的角色, 即如果參數 c 是位於 $\mathcal{M}$ 之上, 則 f_c 的朱利亞集是連通的, 不然朱利亞集就不是連通的 (不僅僅是不連通的, 而且還是完全不連通的 (totally disconnected), 事實上, 可以證明是同胚於一個康托集)。

那 f_c 映射的朱利亞集是什麼呢? 有何特別之處? 我們稱 f_c 的「填滿的朱利亞集」(filled Julia set) 爲那些在 f_c 的迭代之下, 不會跑到無限遠的複數平面上的點所形成的集合, 而朱利亞集乃是那集合的邊界。(以下用 J_c 來表示 f_c 的朱利亞集。) 特別之處, 在於其它的點的動力行爲最後都會變得很簡單! 因爲給定一個參數 c, 當 z 足夠大時, $z \mapsto z^2 + c$ 跟 $z \mapsto z^2$ 差不多, 所以跑到無限遠的動力行爲就是簡單的“變平方”的行爲。填滿的朱利亞集與朱利亞集都是緊緻的集合, 在填滿的朱利亞集的內部的點於 f_c (更精確地說是於某個 f_c^n) 的迭代之下都會收斂到 f_c 的週期點, 或者是拓樸共軛於一個無理數 θ 的旋轉 $z \mapsto ze^{2\pi i\theta}$, 因此也是相當平淡的。而如果 $z \in J_c$, 則 $z \mapsto f_c(z) \mapsto f_c^2(z) \mapsto \cdots$ 的行爲很複雜, 或是說混沌 (chaotic)。

一個特別簡單的 f_c 映射是 f_0, 也就是一個在複數平面上的點 z 變成另一點 z^2 的映射。很容易可以看出, 如果 z 的絕對值 $|z|$ 小於 1, 那當 n 趨近於無限大時, 最終 $f_0^n(z)$ 就收斂到 0; 反之, 若 $|z|$ 大於 1, $f_0^n(z)$ 就發散, 所以 J_0 就等於單位圓! 但是當 c 不是 0 時, J_c 長什麼樣子就不是那麼顯而易見。因爲此時 J_c 是個碎形 (除了 $J_{-2} = [-2, 2]$ 是個線段之外), 通常

需要靠著電腦繪圖來呈現它的面貌。

或許讀者會有疑問, 爲何要研究 $f_c(z) = z^2 + c$ 這樣的映射? 其實理由很單純, 因爲線性映射如 $z \mapsto bz + d$ (其中 b 與 d 也爲複數) 的動力行爲很容易了解, 而 f_c 應該是非線性映射中「看起來」最簡單的了。事實上, 可以證明所有的二次映射 $z \mapsto az^2 + bz + d$ 都是拓樸共軛於 f_c 映射的。(因爲篇幅關係, 在此我們不詳究何謂拓樸共軛, 但它的意義是：給定參數 a、b、d, 二次映射 $z \mapsto az^2 + bz + d$ 的動力行爲, 可以透過某個特殊 c 的 f_c 的動力行爲來了解。) 另一方面, 顯而易見的是, 二次映射是高次映射如 $z \mapsto kz^3 + az^2 + bz + d$ 的三次映射在 k 等於 0 時的特殊情形, 所以研究非線性映射的第一步是研究 f_c 就變得很自然。

研究 f_c 的一個自然的問題, 就是當參數 c 從曼德布洛特集 $\mathcal{M}$ 的外面移動到 $\mathcal{M}$ 上時, 不連通的朱利亞集 J_c 是如何變得連通的? 這個問題到現在只有部分的答案, 因爲要看 c 是移動到 $\mathcal{M}$ 的哪一點, 而且還要看是如何移動到那點的。

舉例說, 如果 c 是沿著正的實數軸從 2 逼近 1/4 (實數軸跟曼德布洛特集的交集是線段 $[-2, 1/4]$), 那 J_c 是如何變化成 $J_{1/4}$ 至今仍不是完全淸楚。我們知道 J_c 到 $J_{1/4}$ 的變化在郝斯多夫拓樸中[1] 是下半連續的, 但並非連續的。其中的困難是一種名叫「拋物內爆」(parabolic implosion) 的現象。如果 c 是在 $\mathcal{M}$ 上使得 J_c 上的某一點 z 是拋物週期點 (即 $f_c^m(z) = z$, $Df_c^m(z) = e^{2\pi ip/q}$, 其中 m 爲該點週期並且 p/q 爲最簡分數), 那個 c 點稱爲拋物參數點。只要是拋物參數點都會發生拋物內爆, 而拋物參數點在曼德布洛特集的邊界上是稠密的。

令 $\hat{c}$ 爲 $\mathcal{M}$ 邊界上的一點, 而 c 爲 $\mathcal{M}$ 之外的點。要描述 f_c 在 J_c 的動力行爲是如何改變到 $f_{\hat{c}}$ 在 $J_{\hat{c}}$ 上的, 最好的方法就是找到一條平滑曲線讓 c 沿著那條曲線到達 $\hat{c}$。由於 $\mathcal{M}$ 是個非常複雜的集合, 要找到一條如此的曲線並非簡單的事。所幸利用數學上的定理可以證明存在一個雙全純函數使得任一條在複數平面上從無限遠以角度 θ $(0 \leq \theta < 1)$ 接近單位圓的射線 $\{re^{2\pi i\theta} | \; 1 < r < \infty\}$, 就對應一條稱爲「參數射線」(parameter ray) 的從無限遠接近曼德布洛特集的平滑曲線 $\Gamma(r, \theta)$, 並且如果 θ 是個有理數, 則當 r 逼近於 1 時, $\Gamma(r, \theta)$ 會收斂到 $\mathcal{M}$ 上的一點。很有趣的是, $\Gamma(1, \theta)$ 是個拋物參數點如果 θ 可以寫成分母爲奇數的最簡分數, 若分母爲偶數則不然。

再來我們描述一下康托朱利亞集的動力行爲。可以找到兩條從原點連到無限遠並且與康托朱利亞集不相交的平滑曲線, 將平面分割成兩個部分。若將某一部分叫做區域 0, 另一部分叫做區域 1, 那如果一給定的 z 屬於 J_c, 則 z 不是屬於區域 0 就是區域 1。$f_c(z)$ 也是一樣, 不是屬於區域 0 就是區域 1。如此一來, 根據 z, $f_c(z)$, $f_c^2(z)$ 等等是屬於哪個區域, 就決定了一個由符號 0 與 1 所成的序列, 稱之爲「旅程序列」(itinerary sequence)。例如如果 z 屬於區域 0, $f_c(z)$ 也屬於區域 0 並且是個週期爲二的點, 但 $f_c^2(z)$ 屬於區域 1, 則 z 在 f_c 的迭代之下就決定了一個無限序列 $\{0\overline{01}\}$ (其中 $\overline{01}$ 表示 $0101\cdots$ 無限循環)。複動力系統的一

[1] 對於兩個緊緻集合, 我們可用郝斯多夫距離來度量其距離, 所產生的拓樸稱爲郝斯多夫拓樸。

個美麗定理說, 對於任何一個由 0 與 1 組成的無限序列, 就存在一個在康托朱利亞集上的 z 點, 其根據上述所形成的旅程序列就是該序列, 並且那個 z 點是唯一的。該定理也意味著二次映射 f_c 侷限在康托朱利亞集 J_c 上是拓樸共軛於一由兩個符號所形成的符號動力系統。此符號動力系統的拓樸空間 Σ 乃爲由 0 與 1 這兩個符號形成的所有無限序列所組成, 而其上的動力行爲, 就是簡單地將符號"往左移"。例如序列 $\{00011\overline{101}\}$ 在符號動力的作用下, 就變成 $\{0011101\overline{10}\}$。不難理解, 在符號動力系統中"往左移"的動作, 就對應於在二次映射中"迭代"這個動作。因爲是將一個具有某一旅程序列 $\mathbf{e}=\{e_0,e_1,e_2,\ldots\}$ 的 z 點映射到一個具有另一旅程序列 $\mathbf{e}'=\{e_0',e_1',e_2',\ldots\}$ 的 $f_c(z)$ 點, 而且因爲 $e_0'=e_1$, $e_1'=e_2$ 等等, 可以看出 $\mathbf{e}'$ 是 $\mathbf{e}$ "往左移"所得。

當 c 逼近於 $\hat{c}$ 時, J_c 上有兩個點會逐漸往原點靠近, 可以證明這兩個點最後會收斂到原點 (意味著 $0\in J_{\hat{c}}$)。原點既不屬於區域 0, 也不屬於區域 1, 而其它在 J_c 上的點仍舊是屬於這兩個區域的。原點經過 $f_{\hat{c}}$ 的作用之後變成 $\hat{c}$, $\hat{c}$ 的旅程序列 $\hat{\mathbf{e}}$ 在連通的朱利亞集上扮演著決定性的角色, 因此有個特別的名字, 叫做「揉搓序列」(kneading sequence)。

在 Σ 上, 我們可以定義一個等價關係 $\sim$: $\mathbf{a}=\{a_0,a_1,\ldots\}\sim\mathbf{s}=\{s_0,s_1,\ldots\}$ 如果存在一個整數 $N\geq 0$ 使得對於所有的 $n\neq N$ 我們有 $a_n=s_n$ 以及使得被"往左移" $N+1$ 次的 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{s}$ 皆等於揉搓序列 $\hat{\mathbf{e}}$。筆者與東京工業大學的川平友規教授最近獲得了當參數 c 沿著有理數角度 θ 的參數射線 $\Gamma(r,\theta)$ 逼近非拋物參數 $\hat{c}$ 時, 朱利亞集 J_c 的漸近行爲, 該漸近行爲意味著 J_c 於郝斯多夫拓樸中是連續變化成 $J_{\hat{c}}$, 並且 $J_{\hat{c}}$ 是同胚於 $\Sigma/\sim$ (Σ 除以等價關係 $\sim$ 的商集)。事實上, 我們的證明對以無理數角度的參數射線逼近所謂半雙曲 (semi-hyperbolic) 參數點都是對的。半雙曲參數點所成的集合不僅在 $\mathcal{M}$ 的邊界上是稠密的, 並且它的郝斯多夫碎形維度爲 2。

讀者或許會有個疑問, 那麼沿著任意角度 θ 的 $\Gamma(r,\theta)$ 逼近 $\mathcal{M}$ 時會如何呢? 這牽涉到複動力系統研究最核心的問題, 即是否 $\mathcal{M}$ 是局部連通的 (locally connected)? 如果是, 則 $\lim\limits_{r\to 1}\Gamma(r,\theta)$ 存在。此外, 一個非常有趣的問題就是, 是否曼德布洛特集的邊界的面積不爲 0 ?

—本文作者任職中央研究院數學研究所—