數學傳播 43卷1期, pp. 80-88

互質畢氏數三元樹

賴昱維

摘要: 所有互質畢氏數稱爲歐幾里得家族, 貝格倫由迭代公式建立互質畢氏數三元樹。本研究以最簡眞分數數列的遞迴關係式證明貝格倫三元樹產生歐幾里得家族中所有的畢氏數。

關鍵詞: 畢氏數、最簡眞分數、遞迴關係式。

1. 緒論

古希臘數學家歐幾里得 (Euclid) 由幾何方法得到所有的互質畢氏數, 稱爲歐幾里得家族 (Euclid family) [1, 2, 4]; 貝格倫 (B. Berggrens) 在 1934 年由迭代公式建立了互質畢氏數三元樹 (a tree of primitive Pythagorean triples) [3, 4, 5]。因此, 我猜想「貝格倫三元樹產生歐幾里得家族中所有的畢氏數」, 本研究以最簡真分數數列的遞迴關係式證明這個猜想。

2. 預備知識

2.1. 歐幾里得家族

畢氏數 (Pythagorean triples) 是符合畢氏定理 ($a^2+b^2=c^2$) 的正整數解 (a,b,c)。當 a,b,c 的最大公因數等於 1 時, 稱爲互質畢氏數 (primitive Pythagorean triples), 所有的互質畢氏數稱爲歐幾里得家族 (Euclid family) [1, 2, 4], 如定理 1。

定理1: $a^2+b^2=c^2$, $a,b,c\in N$, $(a,b,c)=1$, 若且唯若存在 $u,v\in N$, $u>v$, $(u,v)=1$, u,v 爲一奇一偶, 使得 $\begin{cases} a=u^2-v^2 \\ b=2uv \\ c=u^2+v^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=2uv \\ b=u^2-v^2 \\ c=u^2+v^2 \end{cases}$。

2.2. 貝格倫三元樹的建立

貝格倫利用費氏盒 (a Fibonacci box), 一個 2×2 的矩陣 : $\begin{bmatrix} q & q' \\ p & p' \end{bmatrix}$, 在矩陣上排填

入正整數 q 和 q', 按照費氏規則 (Fibonacci rule) 得到下排正整數 p 和 p' : $q+q'=p$ 以及 $q+p=p'$, 所以 q',q,p,p' 是一組費氏數列 (Fibonacci sequence), 再利用線性變換 (linear transformations) 得到互質畢氏數迭代公式。在圖 1 中, 貝格倫以 (3, 4, 5) 當作 (a_1,b_1,c_1), 再由迭代公式

$$(1)\ \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix},\ (2) \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}\ \text{及}$$

$$(3)\ \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

交互迭代產生 (a_2,b_2,c_2) 爲 $(5,12,13)$, $(15,8,17)$, $(21,20,29)$。再以 (a_2,b_2,c_2) 產生 (a_3,b_3,c_3), 以此方式類推產生了 (a_4,b_4,c_4), (a_5,b_5,c_5), $\ldots$, (a_n,b_n,c_n), 由此建立了貝格倫三元樹 (Berggrens' tree) [3, 4, 5]。

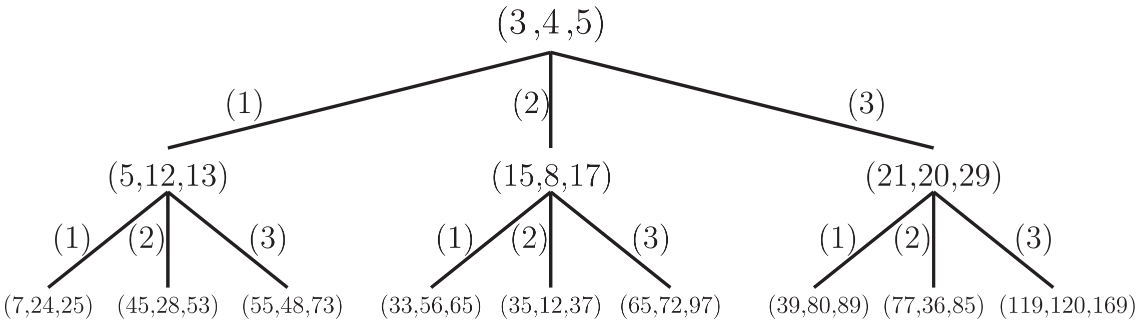

圖 1

2.3. 貝格倫三元樹的重新建立

在第 55 屆全國科展中, 我以遞迴關係式與歐幾里得家族生成公式重新建立貝格倫三元樹。說明如下:

1. 歐幾里得家族生成公式爲 $\begin{cases} a_n = u_n^2 - v_n^2 \\ b_n = 2u_nv_n \\ c_n = u_n^2 + v_n^2 \end{cases}$ $, n, u_n, v_n \in N, u_n > v_n,\ (u_n,v_n)=1$且$u_n, v_n$ 爲一奇一偶。在固定的條件下, 由歐幾里得家族可得到下列的三種互質畢氏數家族 [4, 5]。

(1) 令 $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}$, $n \in N$, 可得畢達哥拉斯家族 (Pythagoras family)。

(2) 令 $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n \\ 1 \end{bmatrix}$, $n \in N$, 可得柏拉圖家族 (Plato family)。

(3) 令 $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n+1} \\ P_n \end{bmatrix}$, $n \in N$, $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$, $P_0 = 0$, $P_1 = 1$, 可得費馬家族 (Fermat family)。

2. 我由畢達哥拉斯、柏拉圖與費馬家族得到遞迴關係式 (4)、(5) 及 (6) [4]。

(1) 因爲 $\dfrac{u_n}{v_n} + \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = \dfrac{n+1}{n} + \dfrac{n-1}{n} = 2$, 所以 $\dfrac{u_n}{v_n} = 2 - \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$, 即得遞迴關係式 (4) $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{2 - \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$。

(2) 因爲 $\dfrac{u_n}{v_n} - \dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}} = 2n - (2n-2) = 2$, 所以 $\dfrac{u_n}{v_n} = 2 + \dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}}$, 即得遞迴關係式 (5) $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}}$。

(3) 因爲 $\dfrac{u_n}{v_n} - \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = \dfrac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} - \dfrac{P_{n-1}}{P_n} = 2$, 所以 $\dfrac{u_n}{v_n} = 2 + \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$, 即得遞迴關係式 (6) $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{2 + \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$。

3. 我在圖 2 中由 $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{1}{2}$ 開始, 並以遞迴關係式 (4)、(5) 及 (6) 與歐幾里得家族生成公式分別取代貝格倫迭代公式 (1)、(2) 及 (3), 由此重新建立貝格倫三元樹 [4]。

3. 主要結果與證明

3.1. 最簡真分數的範圍

爲了重新建立貝格倫三元樹, 我在第 55 屆全國科展中由 $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{1}{2}$ 開始, 並以遞迴關係式 (4)、(5) 或 (6) 連續迭代產生不同的 $\dfrac{v_2}{u_2}, \dfrac{v_3}{u_3}, \ldots, \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}, \dfrac{v_n}{u_n}$。由圖 2 可發現由同一個遞迴關係式所產生的最簡真分數有固定範圍 (表1)。探討如下:

1. 因爲歐幾里得家族具有 $n, u_n, v_n \in N$ $u_n > v_n$, $(u_n, v_n) = 1$ 且 u_n, v_n 爲一奇一偶, 所以 $\dfrac{v_n}{u_n}$ 的範圍爲 $0 < \dfrac{v_n}{u_n} < 1$ 。

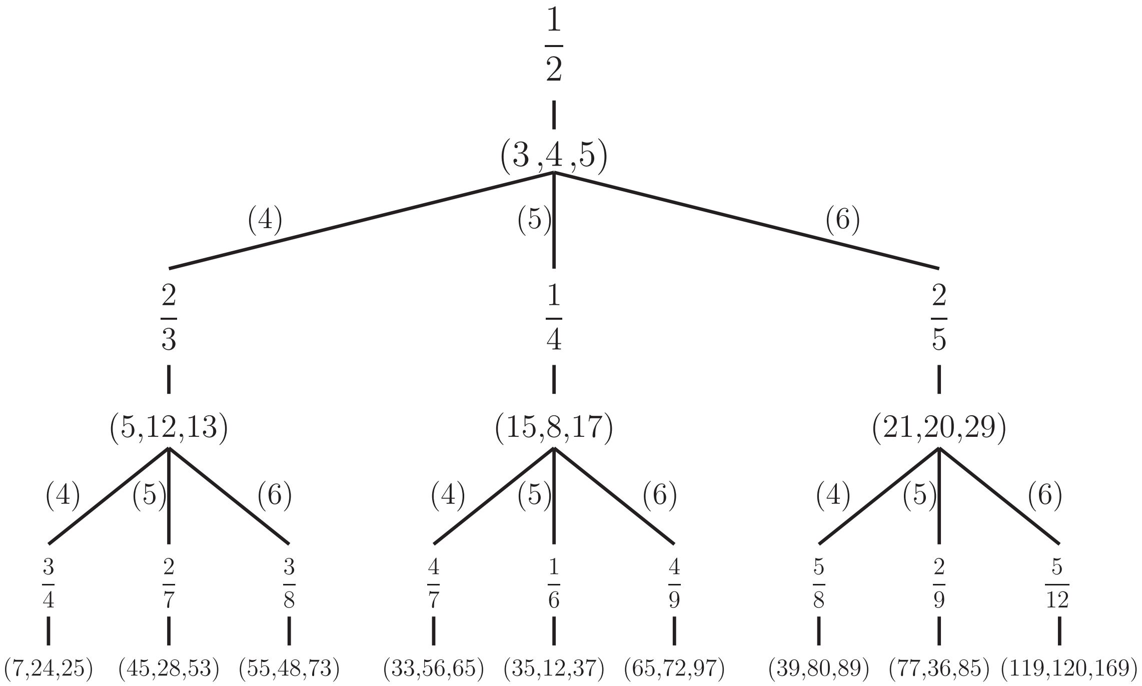

圖 2

2. 當 $u_t, v_t \in N$, $u_t > v_t$, u_t, v_t 互質且一奇一偶, 因此 $0 < \dfrac{v_t}{u_t} < 1$。然後以 $\dfrac{v_t}{u_t}$ 取代 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$ 分別代入遞迴關係式 (4)、(5) 或 (6) 產生 $\dfrac{v_n}{u_n}$, 再以 $\dfrac{v_s}{u_s}$ 取代 $\dfrac{v_n}{u_n}$, 則

(1) 由於 $\dfrac{1}{2-0} < \dfrac{1}{2-\dfrac{v_t}{u_t}} < \dfrac{1}{2-1}$, 即 $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2-\dfrac{v_t}{u_t}} < 1$, 因此以遞迴關係式 (4) 產生 $\dfrac{v_s}{u_s} = \dfrac{1}{2-\dfrac{v_t}{u_t}}$, 其範圍爲 $\dfrac{1}{2} < \dfrac{v_s}{u_s} < 1$。

(2) 由於 $\dfrac{1}{2+\infty} < \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{v_t}{u_t}}} < \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1}}$, 即 $0 < \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{v_t}{u_t}}} < \dfrac{1}{3}$, 因此以遞迴關係式 (5) 產生 $\dfrac{v_s}{u_s} = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{v_t}{u_t}}}$, 其範圍爲 $0 < \dfrac{v_s}{u_s} < \dfrac{1}{3}$。

(3) 由於 $\dfrac{1}{2+1} < \dfrac{1}{2+\dfrac{v_t}{u_t}} < \dfrac{1}{2+0}$, 即 $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2+\dfrac{v_t}{u_t}} < \dfrac{1}{2}$, 因此以遞迴關係式 (6) 產生 $\dfrac{v_s}{u_s} = \dfrac{1}{2+\dfrac{v_t}{u_t}}$, 其範圍爲 $\dfrac{1}{3} < \dfrac{v_s}{u_s} < \dfrac{1}{2}$。

表 1

歐幾里得家族			
遞迴關係式 (4)	遞迴關係式 (5)	遞迴關係式 (6)	
$\frac{1}{2}<\frac{v_n}{u_n}<1$	$0<\frac{v_n}{u_n}<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<\frac{v_n}{u_n}<\frac{1}{2}$	$\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{2}$
迭代公式 (1)	迭代公式 (2)	迭代公式 (3)	
貝格倫三元樹			

3.2. 貝格倫三元樹產生歐幾里得家族中所有的畢氏數

接下來, 我將證明「貝格倫三元樹產生歐幾里得家族中所有的畢氏數」的猜想如下:

1. 以歐幾里得家族中的任一最簡真分數當作 $\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$, 並代入遞迴關係式 (4)、(5) 或 (6), 所產生的 $\frac{v_n}{u_n}$ 仍爲歐幾里得家族中的最簡真分數, 且 $\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$ 與 $\frac{v_n}{u_n}$ 具有 $(u_{n-1}+v_{n-1})<(u_n+v_n)$ 的漸增性質, 所以當 $\frac{v_1}{u_1}=\frac{1}{2}$ 時, (u_1+v_1) 爲 (u_n+v_n) 的最小值。

(1) 當 $u_t, v_t\in N$, $u_t>v_t$, u_t, v_t 互質且一奇一偶, 即 $\frac{v_t}{u_t}$ 爲歐幾里得家族中的最簡真分數, 以 $\frac{v_t}{u_t}$ 取代 $\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$, 以 $\frac{v_s}{u_s}$ 取代 $\frac{v_n}{u_n}$, 由此分別代入遞迴關係式 (4)、(5) 或 (6), 則 $\frac{v_s}{u_s}$ 仍爲歐幾里得家族中的最簡真分數。

(i) 遞迴關係式 (4) 產生 $\frac{v_s}{u_s}=\frac{1}{2-\frac{v_t}{u_t}}=\frac{u_t}{2u_t-v_t}$, 再令 $v_s=u_t$, $u_s=2u_t-v_t$, 則 $u_s, v_s\in N$, $u_s>v_s$, u_s, v_s 互質且一奇一偶。因此, $\frac{v_s}{u_s}$ 爲歐幾里得家族中的最簡真分數。

(ii) 以遞迴關係式 (5) 產生 $\frac{v_s}{u_s}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{v_t}{u_t}}}=\frac{v_t}{u_t+2v_t}$, 再令 $v_s=v_t$, $u_s=u_t+2v_t$, 則 $u_s, v_s\in N$, $u_s>v_s$, u_s, v_s 互質且一奇一偶。因此, $\frac{v_s}{u_s}$ 爲歐幾里得家族中的最簡真分數。

(iii) 以遞迴關係式 (6) 產生 $\frac{v_s}{u_s}=\frac{1}{2+\frac{v_t}{u_t}}=\frac{u_t}{2u_t+v_t}$, 再令 $v_s=u_t$, $u_s=2u_t+v_t$,

則 $u_s, v_s \in N$, $u_s > v_s$, u_s, v_s 互質且一奇一偶。因此, $\dfrac{v_s}{u_s}$ 為歐幾里得家族中的最簡真分數。

(2) 當 $u_t, v_t \in N$, $u_t > v_t$, u_t, v_t 互質且一奇一偶, 以 $\dfrac{v_t}{u_t}$ 取代 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$, 以 $\dfrac{v_s}{u_s}$ 取代 $\dfrac{v_n}{u_n}$, 由此分別代入遞迴關係式 (4)、(5) 或 (6), 則 $(u_t + v_t) < (u_s + v_s)$。

(i) 以 $\dfrac{v_t}{u_t}$ 取代 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$, 以 $\dfrac{v_s}{u_s}$ 取代 $\dfrac{v_n}{u_n}$, 再代入遞迴關係式 (4) 可得 $u_t = v_s$ 與 $v_t = 2v_s - u_s$, 由表 1 得知 $\dfrac{1}{2} < \dfrac{v_s}{u_s} < 1$, 因此 $u_t + v_t = v_s + (2v_s - u_s) = (3v_s - u_s) < (u_s + v_s)$。

(ii) 以 $\dfrac{v_t}{u_t}$ 取代 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$, 以 $\dfrac{v_s}{u_s}$ 取代 $\dfrac{v_n}{u_n}$, 再代入遞迴關係式 (5) 可得 $u_t = u_s - 2v_s$ 與 $v_t = v_s$, 由表 1 得知 $0 < \dfrac{v_s}{u_s} < \dfrac{1}{3}$, 因此 $u_t + v_t = (u_s - 2v_s) + v_s = (u_s - v_s) < (u_s + v_s)$。

(iii) 以 $\dfrac{v_t}{u_t}$ 取代 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$, 以 $\dfrac{v_s}{u_s}$ 取代 $\dfrac{v_n}{u_n}$, 再代入遞迴關係式 (6) 可得 $u_t = v_s$ 與 $v_t = u_s - 2v_s$, 由表 1 得知 $\dfrac{1}{3} < \dfrac{v_s}{u_s} < \dfrac{1}{2}$, 因此 $u_t + v_t = v_s + (u_s - 2v_s) = (u_s - v_s) < (u_s + v_s)$。

(3) 所以由定理 1 可知：當 $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{1}{2}$ 時, $(u_1 + v_1)$ 為 $(u_n + v_n)$ 的最小值, 即不存在一最簡真分數可經由遞迴關係式 (4)、(5) 或 (6) 迭代產生 $\dfrac{1}{2}$。

(i) 令 $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{2}$, 則由遞迴關係式 (4) $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2 - \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ 可得 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = 0$, 不合。

(ii) 令 $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{2}$, 則由遞迴關係式 (5) $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}}$ 可得 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = \infty$, 不合。

(iii) 令 $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{2}$, 則由遞迴關係式 (6) $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2 + \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ 可得 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = 0$, 不合。

2. 除了 $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{1}{2}$ 之外, 歐幾里得家族中的任一最簡真分數皆可當作 $\dfrac{v_n}{u_n}$, 並根據 $\dfrac{v_n}{u_n}$ 的範圍選擇適當的遞迴關係式 (4)、(5) 或 (6), 加以回推所產生的 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$ 仍為歐幾里得家族中的最簡真分數, 而且 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$ 再經過同樣方法加以回推若干次後, 最後皆得到 $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{1}{2}$。

(1) 當 $\dfrac{v_s}{u_s}$ 為歐幾里得家族中的最簡真分數, 即 $u_s, v_s \in N$, $u_s > v_s$, u_s, v_s 互質且一奇一偶, 然後以 $\dfrac{v_s}{u_s}$ 取代 $\dfrac{v_n}{u_n}$, 並根據不同範圍的 $\dfrac{v_s}{u_s}$, 選擇適當的遞迴關係式 (4)、(5) 或 (6),

由此回推產生 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$, 再以 $\dfrac{v_t}{u_t}$ 取代 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$, 則 $\dfrac{v_t}{u_t}$ 爲歐幾里得家族中的最簡真分數。

(i) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{v_s}{u_s}<1$ 時, 選取遞迴關係式 (4), 回推產生 $\dfrac{v_t}{u_t}=2-\dfrac{1}{\frac{v_s}{u_s}}=\dfrac{2v_s-u_s}{v_s}$, 再令 $u_t=v_s$, $v_t=2v_s-u_s$, 因爲 $\dfrac{u_s}{2}<v_s<u_s$, 所以 $u_t,v_t\in N$, $u_t>v_t$, u_t,v_t 互質且一奇一偶。因此, $\dfrac{v_t}{u_t}$ 爲歐幾里得家族中的最簡真分數。

(ii) $0<\dfrac{v_s}{u_s}<\dfrac{1}{3}$ 時, 選取遞迴關係式 (5), 回推產生 $\dfrac{v_t}{u_t}=\dfrac{1}{\frac{1}{\frac{v_s}{u_s}}-2}=\dfrac{v_s}{u_s-2v_s}$, 再令 $u_t=u_s-2v_s$, $v_t=v_s$, 因爲 $v_s<\dfrac{u_s}{3}$, 所以 $u_t,v_t\in N$, $u_t>v_t$, u_t,v_t 互質且一奇一偶。因此, $\dfrac{v_t}{u_t}$ 爲歐幾里得家族中的最簡真分數。

(iii) $\dfrac{1}{3}<\dfrac{v_s}{u_s}<\dfrac{1}{2}$ 時, 選取遞迴關係式 (6), 回推產生 $\dfrac{v_t}{u_t}=\dfrac{1}{\frac{v_s}{u_s}}-2=\dfrac{u_s-2v_s}{v_s}$, 再令 $u_t=v_s$, $v_t=u_s-2v_s$, 因爲 $\dfrac{u_s}{3}<v_s<\dfrac{u_s}{2}$, 所以 $u_t,v_t\in N$, $u_t>v_t$, u_t,v_t 互質且一奇一偶。因此, $\dfrac{v_t}{u_t}$ 爲歐幾里得家族中的最簡真分數。

(2) 除了 $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{1}{2}$ 之外, 歐幾里得家族的任一個 $\dfrac{v_n}{u_n}$ 依照三種不同的範圍選擇適當的遞迴關係式: 當 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{v_n}{u_n}<1$ 時, $\dfrac{v_n}{u_n}$ 由遞迴關係式 (4) 回推產生 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$; 當 $0<\dfrac{v_n}{u_n}<\dfrac{1}{3}$ 時, $\dfrac{v_n}{u_n}$ 由遞迴關係式 (5) 回推產生 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$; 當 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{v_n}{u_n}<\dfrac{1}{2}$ 時, $\dfrac{v_n}{u_n}$ 由遞迴關係式 (6) 回推產生 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$。接下來 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$ 經過同樣方法加以回推若干次後, 最後皆得到 $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{1}{2}$, 如表 2。

(i) 取 $\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{11}{18}$, 選擇遞迴關係式的順序爲 (4)→(6)→(4)→(4)。

因爲 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{11}{18}<1$, 所以由遞迴關係式 (4) 回推產生 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}=\dfrac{4}{11}$。

因爲 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{4}{11}<\dfrac{1}{2}$, 所以由遞迴關係式 (6) 回推產生 $\dfrac{v_{n-2}}{u_{n-2}}=\dfrac{3}{4}$。

因爲 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{4}<1$, 所以由遞迴關係式 (4) 回推產生 $\dfrac{v_{n-3}}{u_{n-3}}=\dfrac{2}{3}$。

因爲 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}<1$, 所以由遞迴關係式 (4) 回推產生 $\dfrac{v_{n-4}}{u_{n-4}}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{v_1}{u_1}$。

(ii) 取 $\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{2}{23}$, 選擇遞迴關係式的順序爲 (5)→(5)→(5)→(5)→(5)→(4)。

因爲 $0<\dfrac{2}{23}<\dfrac{1}{3}$, 所以由遞迴關係式 (5) 回推產生 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}=\dfrac{2}{19}$。

因爲 $0<\dfrac{2}{19}<\dfrac{1}{3}$, 所以由遞迴關係式 (5) 回推產生 $\dfrac{v_{n-2}}{u_{n-2}}=\dfrac{2}{15}$。

因爲 $0<\dfrac{2}{15}<\dfrac{1}{3}$, 所以由遞迴關係式 (5) 回推產生 $\dfrac{v_{n-3}}{u_{n-3}}=\dfrac{2}{11}$。

因爲 $0<\dfrac{2}{11}<\dfrac{1}{3}$, 所以由遞迴關係式 (5) 回推產生 $\dfrac{v_{n-4}}{u_{n-4}}=\dfrac{2}{7}$。

因爲 $0<\dfrac{2}{7}<\dfrac{1}{3}$, 所以由遞迴關係式 (5) 回推產生 $\dfrac{v_{n-5}}{u_{n-5}}=\dfrac{2}{3}$。

因爲 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}<1$, 所以由遞迴關係式 (4) 回推產生 $\dfrac{v_{n-6}}{u_{n-6}}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{v_1}{u_1}$。

(iii) 取 $\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{10}{27}$, 選擇遞迴關係式的順序爲 (6)→(4)→(4)→(5)。

因爲 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{10}{27}<\dfrac{1}{2}$, 所以由遞迴關係式 (6) 回推產生 $\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}=\dfrac{7}{10}$。

因爲 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{7}{10}<1$, 所以由遞迴關係式 (4) 回推產生 $\dfrac{v_{n-2}}{u_{n-2}}=\dfrac{4}{7}$。

因爲 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{4}{7}<1$, 所以由遞迴關係式 (4) 回推產生 $\dfrac{v_{n-3}}{u_{n-3}}=\dfrac{1}{4}$。

因爲 $0<\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3}$, 所以由遞迴關係式 (5) 回推產生 $\dfrac{v_{n-4}}{u_{n-4}}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{v_1}{u_1}$。

表 2

遞迴關係式的回推順序	$\frac{v_n}{u_n}$	$\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$	$\frac{v_{n-2}}{u_{n-2}}$	$\frac{v_{n-3}}{u_{n-3}}$	$\frac{v_{n-4}}{u_{n-4}}$	$\frac{v_{n-5}}{u_{n-5}}$	$\frac{v_{n-6}}{u_{n-6}}$
(4)→(6)→(4)→(4)	$\frac{11}{18}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$		
(5)→(5)→(5)→(5)→(5)→(4)	$\frac{2}{23}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
(6)→(4)→(4)→(5)	$\frac{10}{27}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		

4. 結論

由於畢氏數蘊藏著許多美妙的數學規律性, 常讓我樂此不疲。在本研究中, 我由最簡真分數數列的遞迴關係式發現了歐幾里得家族與貝格倫三元樹有著異曲同工之妙。在未來的日子中, 我想要繼續悠遊在畢氏數的世界中, 衷心期待能夠發現更多畢氏數的瑰寶。

致謝： 由衷感謝彰化師範大學數學系施皓耀、周忠強與黃森山教授, 因爲在教授們的鼓勵與指導下, 這一篇文章才能完成。此外, 更感謝編審老師對文章的指正。

參考資料

1. 容士毅 (譯)。數學是什麼? 台北縣：左岸文化, 2010。
2. 蔡聰明。數學拾貝。台北市：三民, 2010。
3. 賴昱維。勾股數迭代公式之研究與發展。數學傳播, 38(3), 65-74, 2014。
4. 賴昱維。分進合擊 分解勾股數。中華民國第 55 屆中小學展覽會國中組數學科, 2015。
5. Price, H. Lee, *The Pythagorean Tree: A New Species*, arXiv:0809.4324 [math.HO], 2008 from: `http://arxiv.org/pdf/0809.4324.pdf`

—本文作者投稿時就讀臺中一中數理資優班二年級—