數學傳播 43卷1期, pp. 74-79

# 「一道面積比公式的另證」的回響: 用三角形的 A.S.A.面積公式

陳建燁

## 一、前言

在數學傳播 42 卷 1 期「一道面積比公式的另證」(參考資料 [1]) 一文中, 作者另行處理了參考資料 [2] (題目原始出處) 中的一道例題:

「設 $H$ 為銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=1:2:3$, 求 $\triangle ABC$ 三邊長的比例值, 即 $a:b:c=?$」(為描述方便, 在以下的文章中, 將此例題稱為「垂心面積比 123 問題」)

拜讀文 [1] 和文 [2] 兩篇大作, 就筆者的理解, 其共通之處, 大致上是先根據同底比高的原理, 將面積比轉化為邊長比, 再運用畢氏定理, 解出邊長之間的比例關係。差異在於, 文 [2] 先建立了一般性的公式:

「設 $H$ 為銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 則 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH$
$=(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4):(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4)$ 」
(為描述方便, 在以下的文章中, 將此公式稱為「垂心面積比的邊長公式」)

再將「垂心面積比 123 問題」, 作為一個主要的應用。而文 [1] 是從具體問題出發, 解完之後再一般化, 重新得到垂心面積比公式。兩篇文章看似路徑不盡相同, 各有巧妙高明之處, 但在筆者眼中, 似有共通的本質與脈絡。

在接下來的文章中, 筆者將先建立「三角形面積的 A.S.A. 公式」, 即 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{\cot B+\cot C}$。接著運用此公式, 再解一次原來的例題, 解完之後, 將之一般化, 得到「垂心面積比的邊長逆向公式」:

「設 $H$ 為銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle BCH:\triangle CAH:\triangle ABH=p:q:r$, 則 $a:b:c=\sqrt{p(q+r)}:\sqrt{q(r+p)}:\sqrt{r(p+q)}$」,

此公式可從面積比直接逆推出邊長比, 是原問題的一般情形之下的答案。

## 二、本文

### (一) 三角形的 A.S.A. 面積公式：$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{\cot B+\cot C}$

首先, 先建立「三角形的高的 cot 公式」:

在 $\triangle ABC$ 中, 令 $A$ 在邊 $BC$ 上的高爲 $h_a$, 則 $h_a=\dfrac{a}{\cot B+\cot C}$。

**證明**：令 $A$ 在邊 $BC$ 上的垂足爲 $D$, 則 $h_a=\overline{AD}$。

不失一般性, 可設 $\angle B\geq\angle C$, 再就 $\angle B$ 分別爲銳角、直角與鈍角的三種情形進行討論：

(1) $\angle B$ 爲銳角：
此時 $a=\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=h_a\cdot\cot B+h_a\cdot\cot C$, 可得 $h_a=\dfrac{a}{\cot B+\cot C}$。(圖 (一))

(2) $\angle B$ 爲直角：
此時 $D=B$, $\cot B=\cot 90^\circ=0$, 且 $a=\overline{BC}=\overline{DC}=h_a\cdot\cot C$, 可得

$$h_a=\frac{a}{\cot C}=\frac{a}{\cot B+\cot C}\text{。}\qquad(\text{圖(二)})$$

(3) $\angle B$ 爲鈍角：
此時 $a=\overline{BC}=\overline{CD}-\overline{BD}=h_a\cdot\cot C-h_a\cdot\cot\angle ABD=h_a\cdot\cot C-h_a\cdot(-\cot\angle ABC)$
$=h_a\cdot\cot C+h_a\cdot\cot\angle ABC=h_a\cdot\cot C+h_a\cdot\cot B$, 可得

$$h_a=\frac{a}{\cot B+\cot C}\text{。}\qquad(\text{圖(三)})$$

接著, 即得 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{\cot B+\cot C}$。

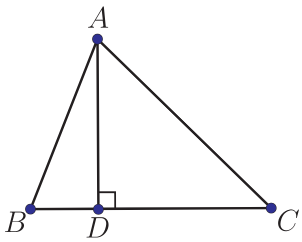


圖 (一)

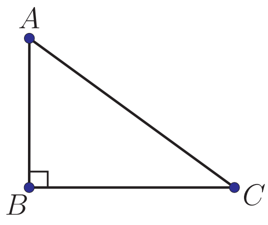


圖 (二)

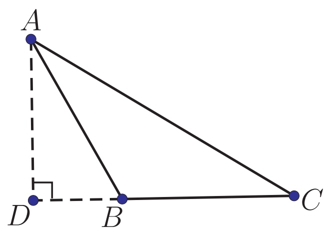


圖 (三)

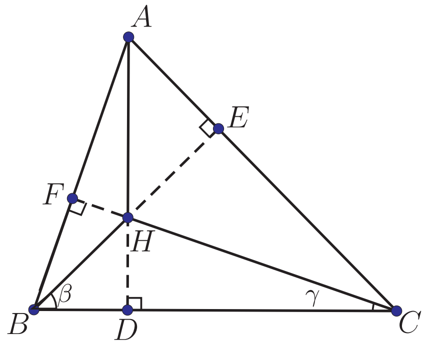
**註**1：此公式不限於銳角三角形, 對於直角三角形與鈍角三角形皆適用。

**註**2：$h_a=\dfrac{a}{\cot B+\cot C}$ 此一公式, 出現在高中數學的「三角測量」中, 可將空中的高度轉化爲地面上的長度。

**註**3 : $h_a=\dfrac{a}{\cot B+\cot C}$ 也可寫成等價的 $h_a=a\cdot\dfrac{\tan B\cdot\tan C}{\tan B+\tan C}$ , 但須注意直角三角形時不適用。

**註**4 : $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{\cot B+\cot C}$ 此一公式的使用時機, 主要是已知條件爲「兩角夾一邊」(即所謂的 A.S.A.) 時。觀察此公式的分子與分母, 正好也呈現「兩角夾一邊」的型態, 妙哉!

## (二) 再解「垂心面積比 123 問題」:




**題目**: 設 $H$ 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=1:2:3$, 求 $\triangle ABC$ 三邊長的比例值, 即 $a:b:c=?$ ([1, 2])

**解**: 令 $\angle HBC=\beta$, $\angle HCB=\gamma$, 由「三角形的 A.S.A. 面積公式」, 得

$$\triangle BCH=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\cot\beta+\cot\gamma}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\tan C+\tan B}\quad 與\quad \triangle BCA=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\cot B+\cot C}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+2+3}=\frac{\triangle BCH}{\triangle BCA}=\frac{\dfrac{1}{\tan C+\tan B}}{\dfrac{1}{\cot B+\cot C}}=\frac{\dfrac{1}{\tan B+\tan C}}{\dfrac{\tan B\cdot\tan C}{\tan B+\tan C}},$$

即 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{\tan B\cdot\tan C}$, 於是可得 $\tan B\cdot\tan C=3$。
同理, 有

$$\frac{3}{1+2+3}=\frac{\triangle ACH}{\triangle ACB}=\frac{1}{\tan A\cdot\tan C},\ 可得\ \tan A\cdot\tan C=2$$

以及

$$\frac{1}{1+2+3}=\frac{\triangle ABH}{\triangle ABC}=\frac{1}{\tan A\cdot\tan B},\ 可得\ \tan A\cdot\tan B=6$$

接著, 有

$$(\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C)^2=(\tan B\cdot\tan C)\cdot(\tan A\cdot\tan C)\cdot(\tan A\cdot\tan B)=3\cdot 2\cdot 6=36$$

$$\Rightarrow \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C=6\qquad (\because\ \triangle ABC\ 爲銳角三角形)。$$

所以有 $\tan A=2$, $\tan B=3$ 與 $\tan C=1$

再來,

$$\begin{aligned}\text{由 } 1:2:3 &= \triangle ABH : \triangle BCH : \triangle CAH\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{\tan A+\tan B} : \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\tan B+\tan C} : \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{\tan A+\tan C}\\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{2+3}\right) : \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{3+1}\right) : \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{2+1}\right) = \frac{c^2}{5} : \frac{a^2}{4} : \frac{b^2}{3},\end{aligned}$$

即得 $a^2 : b^2 : c^2 = 8 : 9 : 5$, 所以可得 $a : b : c = \sqrt{8} : 3 : \sqrt{5}$, 再一次求得三邊長的比。

## (三) 解題之後

注意到在上述的解題過程中, 可看到

$\tan A : \tan B : \tan C = 2 : 3 : 1 = \triangle BCH : \triangle CAH : \triangle ABH$, 這是個巧合嗎?

這個問題, 可以用以下的事實來回答：

**定理**：設 $H$ 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 則 $\triangle BCH : \triangle CAH : \triangle ABH = \tan A : \tan B : \tan C$。

**證明**：令 $A, B, C$ 在邊 $BC, CA, AB$ 上的垂足分別爲 $D, E, F$, 則有

$$\begin{aligned}\triangle BCH : \triangle CAH &= \left(\frac{1}{2}\overline{CH}\cdot\overline{BF}\right) : \left(\frac{1}{2}\overline{CH}\cdot\overline{AF}\right) = \overline{BF} : \overline{AF}\\ &= (\overline{CF}\cdot\cot B) : (\overline{CF}\cdot\cot A) = \tan A : \tan B.\end{aligned}$$

同理, 有 $\triangle CAH : \triangle ABH = \tan B : \tan C$, 所以有 $\triangle BCH : \triangle CAH : \triangle ABH = \tan A : \tan B : \tan C$。

**註**：亦即「銳角 $\triangle ABC$ 被垂心所分成三個三角形的面積比, 恰等於相對應三內角正切值的比」, 不妨將此一事實, 稱爲「垂心面積比的正切定理」。

有了以上的事實, 再回頭將原問題一般化：

**定理**：設 $H$ 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle BCH : \triangle CAH : \triangle ABH = p : q : r$, 則 $a : b : c = \sqrt{p(q+r)} : \sqrt{q(r+p)} : \sqrt{r(p+q)}$。

**證明**：先由「垂心面積比的正切定理」, 有

$$\tan A : \tan B : \tan C = \triangle BCH : \triangle CAH : \triangle ABH = p : q : r,$$

由此可令 $\tan A=pk$, $\tan B=qk$, $\tan C=rk$, 再由「三角形面積的 A.S.A. 公式」, 有

$$\begin{aligned}
&\triangle BCH:\triangle CAH:\triangle ABH\\
&\quad=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\cot HCB+\cot HBC}:\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{\cot HAC+\cot HCA}:\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{\cot HAB+\cot HBA}\\
&\quad=\frac{a^2}{\tan B+\tan C}:\frac{b^2}{\tan C+\tan A}:\frac{c^2}{\tan A+\tan B}\\
&\quad=\frac{a^2}{qk+rk}:\frac{b^2}{rk+pk}:\frac{c^2}{pk+qk}\\
&\quad=\frac{a^2}{q+r}:\frac{b^2}{r+p}:\frac{c^2}{p+q}.
\end{aligned}$$

至此, 可得 $p:q:r=\triangle BCH:\triangle CAH:\triangle ABH=\dfrac{a^2}{q+r}:\dfrac{b^2}{r+p}:\dfrac{c^2}{p+q}$, 所以可得 $a:b:c=\sqrt{p(q+r)}:\sqrt{q(r+p)}:\sqrt{r(p+q)}$。

**註**1： 此定理將三邊長的比用垂心所分成的三個三角形的面積比表示, 故將之稱爲「垂心面積比的邊長逆向公式」。

**註**2： 再回到「垂心面積比123問題」, 其中 $p:q:r=\triangle BCH:\triangle CAH:\triangle ABH=2:3:1$, 由以上的「垂心面積比的邊長逆向公式」, 可得

$$\begin{aligned}
a:b:c&=\sqrt{p(q+r)}:\sqrt{q(r+p)}:\sqrt{r(p+q)}\\
&=\sqrt{2\cdot(3+1)}:\sqrt{3\cdot(1+2)}:\sqrt{1\cdot(2+3)}=\sqrt{8}:3:\sqrt{5}
\end{aligned}$$

再一次印證了原問題的答案。

## (四) 邊與角

注意到

$$\begin{aligned}
&\tan A:\tan B:\tan C=\frac{\sin A}{\cos A}:\frac{\sin B}{\cos B}:\frac{\sin C}{\cos C}\\
&=\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}:\frac{\frac{b}{2R}}{\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}:\frac{\frac{c}{2R}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}\\
&\quad\text{(由正弦與餘弦定理, 其中 } R \text{ 爲 } \triangle ABC \text{ 的外接圓半徑)}\\
&=\frac{1}{b^2+c^2-a^2}:\frac{1}{c^2+a^2-b^2}:\frac{1}{a^2+b^2-c^2}\\
&=(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2):(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2):(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)\\
&=[(a^2)^2-(b^2-c^2)^2]:[(b^2)^2-(a^2-c^2)^2]:[(c^2)^2-(a^2-b^2)^2]\\
&=(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4):(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)
\end{aligned}$$

以上的算式, 說明了「垂心面積比的邊長公式」與「垂心面積比的正切定理」是互相等價的。

## 三、結語

相對於文 [1] 與文 [2], 本文可說以「角」爲主, 整體上使用了較多的三角函數。在高中三角函數的教學中, 主要的三角形面積公式有 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ 與「海龍公式：$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, 其中 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$」此兩公式, 分別可視爲「三角形面積的 S.A.S 公式與 S.S.S. 公式」, 而本文所用到的 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{\cot B+\cot C}$, 可視爲「三角形面積的 A.S.A. 公式」, 補上了一塊拼圖, 在處理已知角較多的幾何或三角問題時, 增加了一個可考慮的方向。

## 參考資料


1. 連威翔。一道面積比公式的另證。數學傳播季刊, 42(1), 80-84, 2018。
2. 劉俊傑。換個觀點看三角形的四心。數學傳播季刊, 30(2), 28-39, 2006。


—本文作者任教台北市立第一女子高級中學—