數學傳播 43卷1期, pp. 55-73

# 平面凸六邊形中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式

李輝濱

## 壹、前言

圓內接四邊形兩對角線長度乘積公式就是 2000 年來遠古迄今歐幾里得幾何學中著名的托勒密定理 (Ptolemy theorem), 其內容型式如下; 見下圖 1 一個圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$,

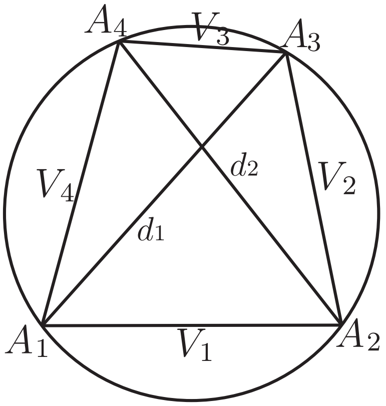



圖 1

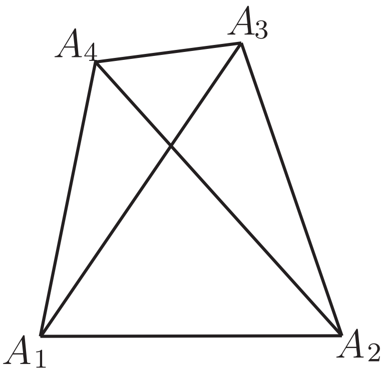



圖 2

令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\overline{A_4A_1}=V_4$, 對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_1$, $\overline{A_2A_4}=d_2$, 則托勒密定理公式型式爲

$$d_1d_2=V_1V_3+V_2V_4. \tag{1}$$

(一)、現在要將此特例方程式 (1) 推展成平面凸四邊形一般化方程式; 請看上圖 2 是一個凸四邊形, 由圓內接四邊形圖形特徵, 先將方程式 (1) 等號兩側完全平方, 之後再作一個轉換, 即得下式;

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+2V_1V_2V_3V_4=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4).$$

因 $\cos\pi=-1$ 且圓內接四邊形的兩個對角互爲補角關係, 故得下式;

$$(d_1d_2)^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4). \tag{2}$$

現在來證明平面凸四邊形一般化方程式 (2); 請看下圖 2a 的作圖解說與證明;

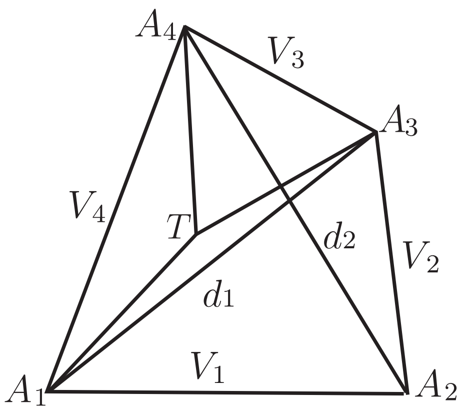



圖 2a

(1) 對於四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 在頂點 $A_4$ 處對圖形內側作一射線 $A_4T$, 使 $\angle A_1A_4T=\angle A_2A_4A_3$, 又在頂點 $A_1$ 處對圖形內側作另一射線 $A_1T$, 使 $\angle A_4A_1T=\angle A_4A_2A_3$, 此兩射線交在 $T$ 點; 則 $\triangle A_1A_4T\approx\triangle A_2A_4A_3$ (互爲相似形) 且 $\angle A_4TA_1=\angle A_4A_3A_2$。並繼續連接 $T$ 與 $A_3$ 兩點, 使形成線段 $TA_3$。

(2) 由兩相似三角形對應邊長必成正比例關係, 得 $V_4:d_2=\overline{A_1T}:V_2=\overline{A_4T}:V_3\Rightarrow$ 可得 $V_4:\overline{A_4T}=d_2:V_3$, 再由 $\angle A_1A_4A_2=\angle TA_4A_3$ 及兩對應邊長成正比例與其夾角相等的相似形性質, 可得知兩相似形關係 $\triangle A_1A_4A_2\approx\triangle TA_4A_3$, 因此可得 $\angle A_4A_1A_2=\angle A_4TA_3$, 且有另一組正比例關係爲 $V_4:\overline{A_4T}=d_2:V_3=V_1:\overline{A_3T}$。

(3) 對作圖 2a 中的 $\triangle TA_1A_3$ 言, 由餘弦定理知

$$d_1^2=(\overline{A_1T})^2+(\overline{A_3T})^2-2(\overline{A_1T})(\overline{A_3T})\cos(\angle A_1TA_3),$$

而在上述 (2) 的兩組正比例關係式中可求得 $\overline{A_1T}=(V_2V_4)/d_2$ 及 $\overline{A_3T}=(V_1V_3)/d_2$, 將此兩者代入餘弦定理公式內並化簡、移項, 可得下列新方程式 (2-a);

$$d_1^2d_2^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2-2V_1V_2V_3V_4\cos(\angle A_1TA_3). \tag{2-a}$$

(4) 在頂點 $T$ 處四周圍角度關係可知

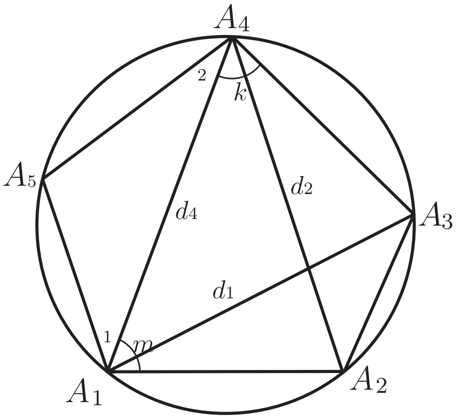
$\angle A_1TA_3=2\pi-\angle A_4TA_3-\angle A_1TA_4=2\pi-\angle A_4A_1A_2-\angle A_4A_3A_2=A_2$(頂角)$+A_4$(頂角),

此處對四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 言, 其四個頂角總和爲 $2\pi$, 所以將 $\angle A_1TA_3 = A_2 + A_4$ 代入方程式 (2-a), 即得證出平面凸四邊形兩交叉對角線長度乘積一般化方程式爲下方程式 (2);

$$d_1^2 d_2^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2 + A_4). \tag{2}$$

就圓內接四邊形而言, 方程式 (2) 是從特例方程式 (1) 推演而來; 方程式 (1) 與方程式 (2) 是等價方程式! 事實上, 方程式 (2) 就是托勒密定理的推廣, 它也完整美妙地被證明出是圖 2 的平面凸四邊形兩交叉對角線長度乘積一般化方程式! 所以, 似乎從圓內接四邊形兩對角線長度乘積公式的等價方程式裡可以推測出平面凸四邊形兩對角線長度乘積一般化方程式!

(二)、再看下圖 3 一個圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 令線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$, $\overline{A_2A_3} = V_2$, $\overline{A_3A_4} = V_3$, $\overline{A_4A_5} = V_4$, $\overline{A_5A_1} = V_5$, 對角線 $\overline{A_1A_3} = d_1$, $\overline{A_2A_4} = d_2$, $\overline{A_4A_1} = d_4$, 同樣地; 要應用到托勒密定理公式來推導出這個圓內接五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積公式, 尤有甚者並藉此獲得之公式再予以擴充推廣成平面凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式!




角度 $1 = \angle A_5A_1A_4$

角度 $2 = \angle A_5A_4A_1$

角度 $m = \angle A_4A_1A_2$

角度 $k = \angle A_1A_4A_3$

圖 3

(a) 觀察圖形中的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 必存在有托勒密定理公式爲

$$d_1d_2 = V_1V_3 + V_2d_4. \tag{1-1}$$

(b) 對 $\triangle A_1A_5A_4$ 言, 邊長線段

$$\begin{aligned} d_4 &= V_4\cos(\angle 2) + V_5\cos(\angle 1) \\ &= V_4\cos(A_4 - k) + V_5\cos(A_1 - m) \\ &= V_4\cos(A_4 + A_2 - \pi) + V_5\cos(A_1 + A_3 - \pi) \\ &= -V_4\cos(A_4 + A_2) - V_5\cos(A_1 + A_3), \end{aligned}$$

將此 $d_4$ 代入 (1-1) 式中, 得

$$d_1 d_2 = V_1 V_3 - V_2 V_4 \cos(A_2 + A_4) - V_2 V_5 \cos(A_1 + A_3). \tag{3}$$

方程式 (3) 即為圓內接五邊形的兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式!

又在 $\triangle A_1 A_5 A_4$ 中, $V_4 \sin(\angle 2) - V_5 \sin(\angle 1) = 0$, 再經過同樣的角度轉換, 可得

$$0 = V_4 \sin(A_4 + A_2) - V_5 \sin(A_1 + A_3). \tag{4}$$

將 (4) 式乘上 $V_2$, 即得

$$0 = V_2 V_4 \sin(A_4 + A_2) - V_2 V_5 \sin(A_1 + A_3). \tag{5}$$

(c) 由方程式 (3) 的獨自平方再加上方程式 (5) 的獨自平方, 得

$$\begin{aligned}(d_1 d_2)^2 = {} & [V_1 V_3 - V_2 V_4 \cos(A_2 + A_4) - V_2 V_5 \cos(A_1 + A_3)]^2 \\ & + [V_2 V_4 \sin(A_2 + A_4) - V_2 V_5 \sin(A_1 + A_3)]^2.\end{aligned}$$

展開平方項, 運算後再化簡, 並變換角度, 最後得下式;

$$\begin{aligned}(d_1 d_2)^2 = {} & (V_1 V_3)^2 + (V_2 V_4)^2 + (V_2 V_5)^2 - 2V_1 V_2 V_3 V_4 \cos(A_2 + A_4) \\ & - 2V_5 V_1 V_2 V_3 \cos(A_1 + A_3) - 2V_2^2 V_4 V_5 \cos A_5.\end{aligned} \tag{6}$$

方程式 (6) 也是圓內接五邊形的兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式, 方程式 (6) 與方程式 (3) 同是等價的關係式!

因為圓內接五邊形的任意兩內角的和並無特定關係值, 所以推測這個方程式 (6) 必定也是一般形平面凸五邊形的兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式!

(d) 對方程式 (6) 與方程式 (3), 若令 $V_5 = 0$, 使頂點 $A_5$ 趨近至 $A_1$, 則圓內接五邊形退化成圓內接四邊形, $d_4 = V_4$, 而方程式 (6) 與方程式 (3) 也退化縮減成圓內接四邊形兩對角線長度乘積公式的方程式 (1) 與方程式 (2) !

(e) 仔細觀察方程式 (6) 的內容結構型態, 可見到五邊形圖形中所有邊長與頂角都很有秩序規律地呈現在公式中。

接下來, 要參考上述圓內接五邊形的兩相鄰交叉對角線長度乘積方程式 (6), 輔以作者獨自鑽研出的多邊形角度組合修正參數法, 及輔助線幾何作圖法, 逐步有序地來推證出平面凸六邊形中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式。

# 貳、本文

在導證廣義的平面凸六邊形中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式之前, 爲了要完整且有條理地推論出應得的型態關係式, 則必在下列撰文推理演繹的運算過程中, 需應用或對照到下述已知的數個基本數學性質;

## 一、數學基本性質 — 引理

**引理** 1: 平面凸多邊形的向量性質

任給一個平面凸 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3A_4\dots A_{n-1}A_n$, 令邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 的向量爲 $\vec{V}_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$ 的向量爲 $\vec{V}_2,\dots,\overline{A_nA_1}=V_n$ 的向量爲 $\vec{V}_n$, 則此平面凸 $n$ 邊形即爲此 $n$ 個向量按順序箭頭接箭尾 相加而成的封閉凸 $n$ 邊形。

依向量加法性質知;

$$\sum_{m=1}^{n}\vec{V}_m=\vec{0}=\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)\,\vec{i}+\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)\,\vec{j}=0;$$

此處 $\theta_m$ 爲 $V_m$在直角坐標平面上的方位角。$\vec{i}$ 爲正 $X$ 軸方向的單位向量, $\vec{j}$ 爲正 $Y$ 軸方向的單位向量, 再由平面正交坐標系性質知;

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0\quad 且\quad \sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0.$$

現在, 將頂點 $A_1$ 置於直角坐標平面上的原點 $O$, 如下圖 4 使 $\overline{A_1A_2}$ 邊完全重疊並貼置於 $X$ 軸, 以使此 $n$ 邊形完全落在第 1 及第 2 象限區域內 (含 $X$ 軸), 則

$$V_1+\sum_{m=2}^{n}V_m\cos\left[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k\right]=0, \tag{7}$$

且

$$\sum_{m=2}^{n}V_m\sin\left[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k\right]=0. \tag{8}$$

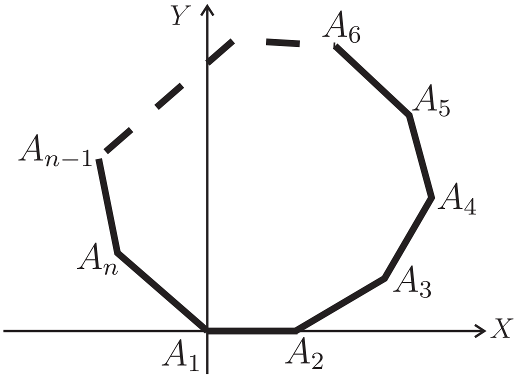



圖 4: 凸 $n$ 邊形

**證明**: 由圖 4 知凸 $n$ 邊形的內角依次爲 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, 而 $V_1$ 的方位角 $\theta_1$ 爲零, $V_2$ 的方位角 $\theta_2$ 爲 $\pi - A_2$, $V_3$ 的方位角 $\theta_3$ 爲 $(\pi - A_2) + (\pi - A_3)$, $V_4$ 的方位角 $\theta_4$ 爲 $(\pi-A_2)+(\pi-A_3)+(\pi-A_4), \ldots, V_n$ 的方位角 $\theta_n$ 爲 $(n-1)\pi-(A_2+A_3+A_4+\cdots+A_n)$。將這 $n$ 個方位角全部代入以下方程式中:

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0 \quad 且 \quad \sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0,\ 則 \quad \sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0$$

$$=V_1+V_2\cos(\pi-A_2)+V_3\cos(2\pi-A_2-A_3)+\cdots+V_n\cos\left[(n-1)\pi-\sum_{k=2}^{n}A_k\right]=0$$

將上列等式改寫成下式; 得

$$V_1+\sum_{m=2}^{n}V_m\cos\left[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k\right]=0$$

同理, 再得

$$\sum_{m=2}^{n}V_m\sin\left[(m-1)\pi-\sum_{k=2}^{m}A_k\right]=0$$

證明完成。

引理 1 的一組方程式 (7) 與 (8) 所顯示的幾何意義是; 方程式 (7) 代表此凸多邊形各邊長在 $X$ 軸方向的投影向量總和爲零, 方程式 (8) 則表示凸多邊形各邊長在 $Y$ 軸方向的投影向量總和爲零。

引理 1 的一組方程式 (7) 與 (8) 是因以線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$ 爲底, 疊置在水平方向 $X$ 軸所求得的結果, 若換成以 $\overline{A_2A_3}=V_2$ 爲底, 將求得類似的另一組方程式 ; 以此類推, 總共會得出 $n$ 組。這 $n$ 組方程式是非常好應用的, 尤其用在多邊形尋找邊長與內角之間的組合關係式時至爲有效!

**引理** 2: 在平面上給定一個凸 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}A_n$, 則此凸多邊形所有內角

$$總和爲 \qquad A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots+A_{n-1}+A_n=(n-2)\pi$$

**證明**: 略。

**引理** 3: 任給一圓內接偶數邊 $n$ 邊形 $A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}A_n$, $n=2k+2$, $k$ 爲自然數, 則此多邊形的頂角組合

$$\begin{aligned}A_1+A_3+A_5+A_7+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1}&=A_2+A_4+A_6+A_8+\cdots+A_{n-2}+A_n,\\&=\frac{1}{2}(n-2)\pi.\end{aligned}$$

**證明**: 略。

**引理** 4: 三角函數角度的和差轉換公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

**引理** 5: 在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 如圖 5

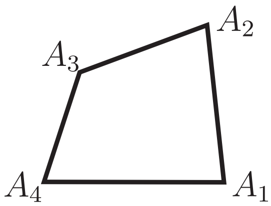



圖 5

令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $A_2A_3=V_2$, $A_3A_4=V_3$, $A_4A_1=V_4$, 則此凸四邊形的面積型餘弦公式爲

$$V_4^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 - 2V_1V_2\cos A_2 - 2V_2V_3\cos A_3 + 2V_1V_3\cos(A_2 + A_3).$$

因上列公式中各項的量綱都是邊長的平方, 故稱爲面積型餘弦公式。

**證明**: 略。(請參閱本文末參考文獻之第 1 列資料。)

## 二、平面凸六邊形中央兩相鄰交叉對角線長度乘積一般化方程式

(一)、現在先證明平面凸五邊形一般化公式; 請看下圖 7a 給定任意一個平面凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2} = V_1$, $\overline{A_2A_3} = V_2$, $\overline{A_3A_4} = V_3$, $\overline{A_4A_5} = V_4$, $\overline{A_5A_1} = V_5$ 三個對角線長 $\overline{A_1A_3} = d_1$, $\overline{A_2A_4} = d_2$, $\overline{A_4A_1} = d_4$

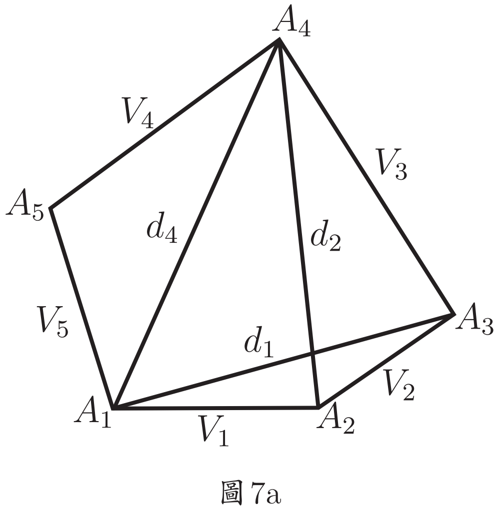



圖 7a

今令 $\angle A_1A_4A_3=\theta$, 由上圖 7a 的部份圖形中有一般形凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 再參照方程式 (2) 式, 這凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 必存在有下列托勒密定理推廣關係式;

$$d_1^2d_2^2=(V_1V_3)^2+(V_2d_4)^2-2V_1V_2V_3d_4\cos(A_2+\theta). \tag{2-1}$$

另圖中的三角形 $\triangle A_1A_4A_5$ 有餘弦定理關係; $d_4^2=V_4^2+V_5^2-2V_4V_5\cos A_5$, 將此式代入方程式 (2-1) 式中即得出下列方程式 (2-2) 式;

$$d_1^2d_2^2=(V_1V_3)^2+(V_2V_4)^2+(V_2V_5)^2-2V_2^2V_4V_5\cos A_5-2V_1V_2V_3d_4\cos(A_2+\theta). \tag{2-2}$$

(a) 接著要將方程式 (2-2) 內的最後一項有 $d_4\cos(A_2+\theta)$ 的成份項代換成原來五邊形的某些邊長與頂角的適當組合。而這整個代換過程中需要應用到引理1. 與角度修正參數法及幾何作圖分析法。

(a-1) 應用引理 1 取 $n=5$ 代入一組方程式 (7) 與 (8), 並化簡可得

$$V_1=V_2\cos A_2-V_3\cos(A_2+A_3)+V_4\cos(A_2+A_3+A_4)+V_5\cos A_1, \tag{7-p}$$

$$V_2\sin A_2-V_3\sin(A_2+A_3)+V_4\sin(A_2+A_3+A_4)-V_5\sin A_1=0. \tag{8-p}$$

(a-2) 將此五邊形的內角分成兩組; $A_1$, $A_4$ 爲一組, 而 $A_2$, $A_3$, $A_5$ 爲另一組! 將平面凸多邊形所有內角分成兩組的組合情形有很多種, 需要詳盡觀察比對才能找到最適合的兩組組合。

****角度修正參數法****: 以下即爲角度修正參數法的應用; 見下圖 7b.

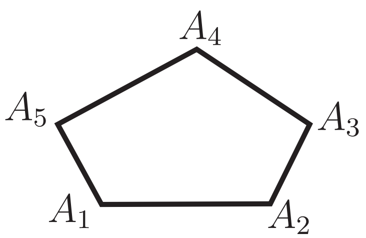



圖7b

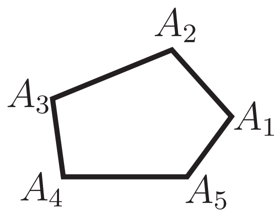



圖7c

平面凸五邊形內角總和爲 $3\pi$, 令 $\phi$ 爲角度修正參數, 並設定 $A_1+A_4=\dfrac{3}{2}\pi-\phi$ 且 $A_2+A_3+A_5=\dfrac{3}{2}\pi+\phi$, 將這 2 個組合代入方程式 (7-p) 及 (8-p) 中; 得

$$V_1=V_2\cos A_2-V_3\cos(A_2+A_3)+V_4\cos(A_2+A_3+A_4)+V_5\cos A_1, \tag{7-p}$$

$$\begin{aligned}V_1=&V_2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\phi-A_3-A_5\right)-V_3\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\phi-A_5\right)\\&+V_4\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\phi+A_4-A_5\right)+V_5\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\phi-A_4\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= V_2\sin(\phi - A_3 - A_5) - V_3\sin(\phi - A_5) + V_4\sin(\phi + A_4 - A_5) - V_5\sin(\phi + A_4)\\
&= \sin\phi\cdot[V_2\cos(A_3 + A_5) - V_3\cos A_5 + V_4\cos(A_4 - A_5) - V_5\cos A_4]\\
&\quad + \cos\phi\cdot[-V_2\sin(A_3 + A_5) + V_3\sin A_5 + V_4\sin(A_4 - A_5) - V_5\sin A_4]. \quad \text{(7-p-a)}
\end{aligned}
$$

另

$$V_2\sin A_2 - V_3\sin(A_2 + A_3) + V_4\sin(A_2 + A_3 + A_4) - V_5\sin A_1 = 0, \quad \text{(8-p)}$$

$$
\begin{aligned}
&V_2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \phi - A_3 - A_5\right) - V_3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \phi - A_5\right)\\
&+ V_4\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \phi + A_4 - A_5\right) - V_5\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \phi - A_4\right) = 0,
\end{aligned}
$$

展開此等式, 得

$$
\begin{aligned}
0 &= -V_2\cos(\phi - A_3 - A_5) + V_3\cos(\phi - A_5) - V_4\cos(\phi + A_4 - A_5) + V_5\cos(\phi + A_4)\\
&= \cos\phi\cdot[-V_2\cos(A_3 + A_5) + V_3\cos A_5 - V_4\cos(A_4 - A_5) + V_5\cos A_4]\\
&\quad + \sin\phi\cdot[-V_2\sin(A_3 + A_5) + V_3\sin A_5 + V_4\sin(A_4 - A_5) - V_5\sin A_4]. \quad \text{(8-p-a)}
\end{aligned}
$$

現在令

$$
\begin{aligned}
P_5 &= V_2\cos(A_3 + A_5) - V_3\cos A_5 + V_4\cos(A_4 - A_5) - V_5\cos A_4,\\
Q_5 &= -V_2\sin(A_3 + A_5) + V_3\sin A_5 + V_4\sin(A_4 - A_5) - V_5\sin A_4,
\end{aligned}
$$

則 (7-p-a) 式 變成

$$V_1 = \sin\phi\cdot P_5 + \cos\phi\cdot Q_5, \quad \text{(7-p-b)}$$

(8-p-a) 式變成

$$0 = \cos\phi\cdot(-P_5) + \sin\phi\cdot Q_5. \quad \text{(8-p-b)}$$

聯立解 (7-p-b) 式與 (8-p-b) 式, 得 $V_1\cos\phi = Q_5$ 且 $V_1\sin\phi = P_5$.

而 $\cos(A_1 + A_4) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \phi\right) = -\sin\phi$, 代入 $V_1\sin\phi = P_5$ 中, 得

$$-V_1\cos(A_1 + A_4) = V_2\cos(A_3 + A_5) - V_3\cos A_5 + V_4\cos(A_4 - A_5) - V_5\cos A_4,$$

移項整理後即得到下述方程式 (6-1) 了;

$$V_3\cos A_5 - V_4\cos(A_4 - A_5) + V_5\cos A_4 = V_1\cos(A_1 + A_4) + V_2\cos(A_3 + A_5). \quad \text{(6-1)}$$

(a-3) 同理, 現在將方程式 (7) 與 (8) 式換成以 $\overline{A_4A_5} = V_4$ 爲底, 見上圖 7c, 再仿效這上述第 (a-2) 節的運算即可得到同類型的下列方程式 (6-2) 了;

$$V_1\cos A_3 - V_2\cos(A_2 - A_3) + V_3\cos A_2 = V_4\cos(A_4 + A_2) + V_5\cos(A_1 + A_3). \quad \text{(6-2)}$$

觀察此方程式 (6-2) 的右側兩項 $V_4\cos(A_4+A_2)+V_5\cos(A_1+A_3)$, 再根據 $\triangle A_1A_4A_5$ 圖形關係即可推測 (6-2) 式的右側兩項必與 $d_4\cos(A_2 + \theta)$ 具有相等關係!

(b) 幾何作圖; 利用輔助線作圖法以理解方程式 (6-2) 的圖形意義! 請看下圖 7d.

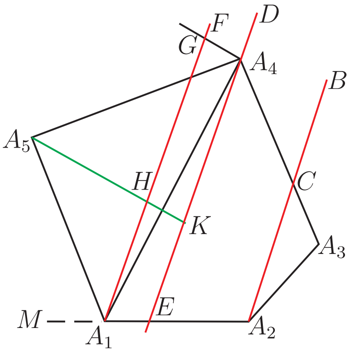



圖 7d

(b-1) 在方程式 (6-2) 的左側第 2 項裡出現 $A_2-A_3$ 的角度差, 令頂角角度 $A_2$ 大於 $A_3$, 這不失爲作圖的一般性。由圖 7d 中自頂點 $A_2$ 處作一直線 $A_2B$, 使 $\angle A_1A_2B = A_3$ 頂角角度, 並令 $\alpha = \angle CA_2A_3 = A_2 - A_3$。

(b-2) 通過頂點 $A_4$ 處作一直線 $DE$ 平行於直線 $A_2B$, 連接對角線 $A_4A_1 = d_4$。

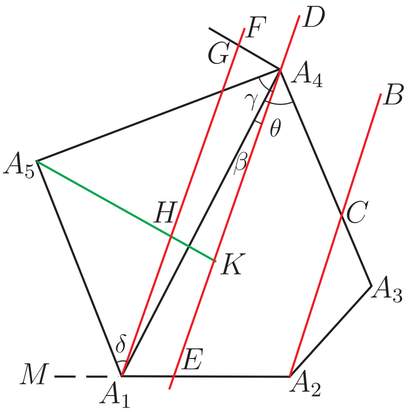
(b-3) 通過頂點 $A_1$ 處作一直線 $A_1F$ 平行於直線 $A_2B$ 與 $DE$。

(b-4) 自頂點 $A_4$ 處對直線 $A_1F$ 作一垂直線 $A_4G$, 使 $G$ 點爲垂直交點。

(b-5) 自頂點 $A_5$ 處對直線 $A_1F$ 與直線 $DE$ 作一垂直線 $A_5HK$, 使 $H$ 點與 $K$ 點各爲相異的兩垂直交點。

以上作圖完成。這經過規劃設計完工的圖形中共有兩組平行輔助線; 紅色的一組有3條平行線, 綠色的另一組有 2 條平行線, 且這兩組平行線是互爲垂直的。

(c) 現在要分析所有作出的圖形輔助線及方程式 (6-2) 的圖形意義, 及其與重要的一項 $d_4\cos(A_2+\theta)$ 之間的相連結關係; 請見下圖 8




$\theta = \angle A_1A_4A_3$

$\alpha = A_2 - A_3$

$\beta = \angle A_1A_4E$

$\gamma = \angle A_5A_4E$

$\delta = \angle A_5A_1H$

圖 8

(c-1) 對 $\triangle CA_2A_3$ 言, 因 $\alpha = \angle CA_2A_3 = A_2 - A_3$, 故得 $\angle A_4CA_2 = A_2$ 頂角角度。

(c-2) 由平行線內側角性質知 $\angle DA_4C = \angle A_4CA_2 = A_2$ 頂角。

(c-3) 令 $\beta = \angle A_1A_4E = \angle A_4A_1G$, 在頂點 $A_4$ 處周圍可知 $\angle DA_4C + \theta = A_2 + \theta = \pi + \beta$, 故 $d_4\cos(A_2+\theta) = d_4\cos(\pi+\beta) = -d_4\cos\beta = -d_4\cos(\angle A_4A_1G)$, 得 $d_4\cos(A_2+\theta)$ 在圖形上的值等於線段 $A_1G$ 長度的負值, 因 $\triangle A_4A_1G$ 是直角三角形。

(c-4) 又在頂點 $A_4$ 處周圍, 頂角角度的和 $A_2 + A_4 = \pi + \gamma$, 此處 $\gamma = \angle A_5A_4E$。由 $V_4\cos(A_2+A_4) = V_4\cos(\pi+\gamma) = -V_4\cos\gamma$, 得 $V_4\cos(A_2+A_4)$ 在圖形上的值等於線段 $A_4K$ =線段 $GH$長度的負值, 因 $\triangle A_4A_5K$ 是直角三角形。

(c-5) 在頂點 $A_1$ 處周圍, 由平行線同位角性質知 $\angle MA_1H = \angle A_1A_2B = A_3$ 頂角, 故頂角角度的和 $A_1 + A_3 = \pi + \delta$, 此處 $\delta = \angle A_5A_1H$。由 $V_5\cos(A_1+A_3) = V_5\cos(\pi+\delta) = -V_5\cos\delta$, 得 $V_5\cos(A_1+A_3)$ 在圖形上的值等於線段 $A_1H$ 長度的負值, 因 $\triangle A_1A_5H$ 是直角三角形。

(c-6) 現在由 (c-3)、(c-4)、(c-5) 的敘述分析, 可比較出 $d_4\cos(A_2+\theta)$ 在圖形上的值恰等於 $V_4\cos(A_2+A_4) + V_5\cos(A_1+A_3)$ 在圖形上的值, 故下式必成立;

$$d_4\cos(A_2+\theta) = V_4\cos(A_2+A_4) + V_5\cos(A_1+A_3). \tag{6-3}$$

(d) 現在要將等式 (6-3) 式代入 (一) 的方程式 (2-2) 中, 整理後即得方程式 (6T) 如下; 得證平面凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式爲

$$\begin{aligned}(d_1d_2)^2 = (V_1V_3)^2 + (V_2V_4)^2 + (V_2V_5)^2 - 2V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)\\ - 2V_5V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3) - 2V_2^2V_4V_5\cos A_5.\end{aligned} \tag{6T}$$

現在可看到方程式 (6T) 與前言 (二) 裡的方程式 (6) 完全相等! 真的可以由圓內接五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的特例方程式 (6) 去推測出平面凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式 (6T), 且兩者的結構內涵形態完全相等!

接著要繼續來推證期待已久的廣義型平面凸六邊形中央兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式。

(二)、平面凸六邊形中央兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式

在平面上給定一個凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, 令線段長 $\overline{A_1A_2} = V_1$, $\overline{A_2A_3} = V_2$, $\overline{A_3A_4} = V_3$, $\overline{A_4A_5} = V_4$, $\overline{A_5A_6} = V_5$, $\overline{A_6A_1} = V_6$, 對角線長 $\overline{A_1A_4} = d_{14}$, $\overline{A_2A_4} = d_2$, $\overline{A_2A_5} = d_{25}$, $\angle A_5A_4A_2 = m$, $\angle A_1A_2A_4 = k$, 請參閱下圖 9 的一般平面凸六邊形中央兩相鄰交叉對角線長 $d_{14}$ 與 $d_{25}$ 及下圖 10

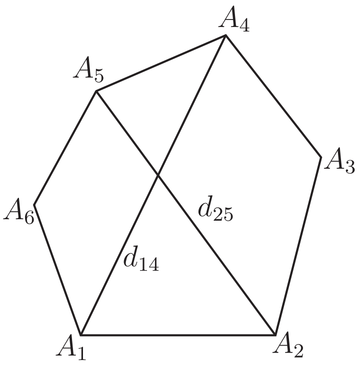
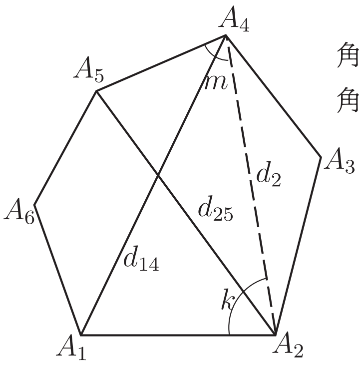



圖 9




角度 $k = \angle A_1A_2A_4$
角度 $m = \angle A_5A_4A_2$

圖 10

(2a) 圖 10 中的部份圖形凸五邊形 $A_1A_2A_4A_5A_6$ 與圖 7a 的凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 相比較後, 再參考方程式 (6T) 式, 則對比這兩圖形之邊長及角度相對應位置關係, 得其兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式爲下式 (9) 式;

$$\begin{aligned}(d_{14}d_{25})^2 = {} & (V_1V_4)^2 + (d_2V_5)^2 + (d_2V_6)^2 - 2V_1d_2V_4V_5\cos(k+A_5) \\ & - V_6V_1d_2V_4\cos(A_1+m) - 2d_2^2V_5V_6\cos A_6. \end{aligned} \tag{9}$$

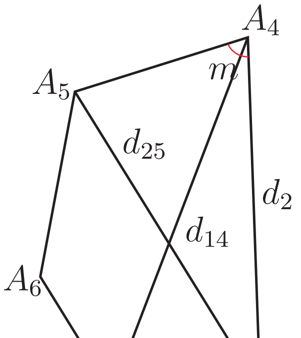
(2b) 方程式 (9) 中有 3 項的 $d_2^2$ 成份, 由圖 10 的 $\triangle A_2A_3A_4$ 餘弦定理得下式;

$$d_2^2 = V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3\cos A_3. \tag{9-1}$$

(2c) 方程式 (9) 中等號右側第 4 項內出現 $d_2\cos(k+A_5)$ 的未知成份, 必須將此未知成份轉換成已知量; 由引理 1 取 $n=5$, 代入方程式 (7) 與 (8), 化簡, 得

$$V_1 = V_2\cos A_2 - V_3\cos(A_2+A_3) - V_4\cos(A_5+A_1) + V_5\cos A_1,$$

及
$$0 = V_2\sin A_2 - V_3\sin(A_2+A_3) + V_4\sin(A_5+A_1) - V_5\sin A_1.$$




$\angle A_5A_4A_2 =$角度 $m$
$\angle A_1A_2A_4 =$角度 $k$

圖 11

將這組以 $V_1$ 爲底的兩方程式再轉換成以圖 11 的 $d_2$ 爲底之兩方程式, 得下一組;

$$d_2 = V_4 \cos m - V_5 \cos(m + A_5) - V_6 \cos(A_1 + k) + V_1 \cos k, \tag{7-1}$$

及
$$0 = V_4 \sin m - V_5 \sin(m + A_5) + V_6 \sin(A_1 + k) - V_1 \sin k. \tag{8-1}$$

緊接著要以角度組合修正參數法來找出 $d_2 \cos(k + A_5)$ 的轉換關係式; 對圖 11 的五邊形 $A_1A_2A_4A_5A_6$ 言, 選取適當角度組合如下: 令 $k+A_5 = \pi+\phi$ 且 $A_1+A_6+m = 2\pi-\phi$, $\phi$ 爲角度修正參數, 則 $m = 2\pi - \phi - A_1 - A_6$ 且 $k = \pi + \phi - A_5$, 分別代入上述 (7-1) 式與 (8-1) 式中, 運算、化簡, 得

$$\begin{aligned}
d_2 &= V_4 \cos(\phi + A_1 + A_6) - V_5 \cos(A_5 - A_1 - A_6 - \phi) + V_6 \cos(\phi + A_1 - A_5) \\
&\quad - V_1 \cos(\phi - A_5) \\
&= \cos\phi \cdot [V_4 \cos(A_1 + A_6) - V_5 \cos(A_5 - A_1 - A_6) + V_6 \cos(A_1 - A_5) \\
&\quad - V_1 \cos A_5] + \sin\phi \cdot [-V_4 \sin(A_1 + A_6) - V_5 \cos(A_5 - A_1 - A_6) \\
&\quad - V_6 \sin(A_1 - A_5) - V_1 \sin A_5], \qquad \text{(p-1)} \\
0 &= -V_4 \sin(\phi + A_1 + A_6) - V_5 \sin(A_5 - A_1 - A_6 - \phi) - V_6 \sin(\phi + A_1 - A_5) \\
&\quad + V_1 \sin(\phi - A_5) \\
&= \sin\phi \cdot [-V_4 \cos(A_1 + A_6) + V_5 \cos(A_5 - A_1 - A_6) - V_6 \cos(A_1 - A_5) \\
&\quad + V_1 \cos A_5] + \cos\phi \cdot [-V_4 \sin(A_1 + A_6) - V_5 \sin(A_5 - A_1 - A_6) \\
&\quad - V_6 \sin(A_1 - A_5) - V_1 \sin A_5]. \qquad \text{(p-2)}
\end{aligned}$$

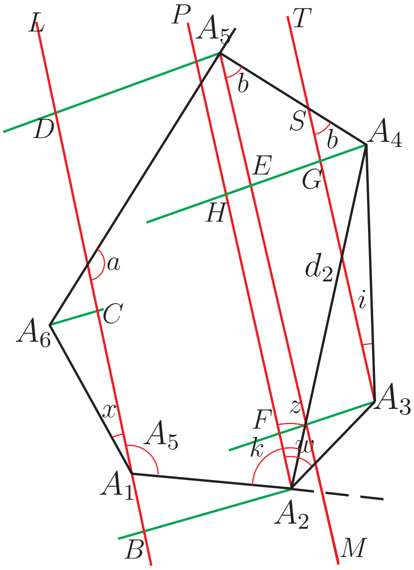
聯立解出 (p-1) 式與 (p-2) 式, 將 (p-1) 式等號兩側同乘以 $\cos\phi$ 再減去 (p-2) 式等號兩側同乘以 $\sin\phi$, 最後得到下式;

$$\begin{aligned}
d_2 \cos\phi &= V_4 \cos(A_1 + A_6) - V_5 \cos(A_5 - A_1 - A_6) + V_6 \cos(A_1 - A_5) - V_1 \cos A_5 \\
&= V_4 \cos(A_1 + A_6) - V_5 \cos(A_6 + A_1 - A_5) + V_6 \cos(A_1 - A_5) - V_1 \cos A_5 \\
&= -d_2 \cos(k + A_5). \qquad \text{(t-1)}
\end{aligned}$$

(2d) 在 (t-1) 式中出現了複雜又麻煩的 4 個項, 希望將這 4 個項數化簡並且使每一項內的角度組合都要呈顯加法性, 可再使用六邊形的角度組合修正參數法, 參考仿效上述 (2c) 的運算步驟即可得到結果, 但此處以研究心得要另外採取輔助線幾何作圖法來實現這樣的期望!

請看下圖 12 的平面凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, 輔助線幾何作圖法的要領是需先選取作圖的關鍵項; 由 (t-1) 式中的關鍵項是 $V_6 \cos(A_1 - A_5)$, 兩個角度差出現的項就是領頭

項, 只要多作數次分析即能掌握到這個特徵思維。以下詳盡明列出輔助線幾何作圖的思維解析過程; 圖 12 中有清楚明晰的顯示出各角度符號位置。




角度 $x = A_1 - A_5$

角度 $a = A_6 + A_1 - A_5$

角度 $b = A_6 + A_1 - \pi$

角度 $i = 2\pi - A_1 - A_4 - A_6$

角度 $z = k + A_5 - \pi$

角度 $w = A_2 + A_5 - \pi$

圖 12

(2d-1) 在 (t-1) 式中的 $V_6\cos(A_1 - A_5)$ 項裡注意到兩角差 $(A_1 - A_5)$, 故令 $A_1 > A_5$, 這不失爲作圖的一般性。因此, 通過頂點 $A_1$ 作一直線 $A_1L$, 使 $\angle LA_1A_2 =$頂角 $A_5$, 得角度 $x = (A_1 - A_5) = \angle A_6A_1L$。再通過頂點 $A_2$ 作一直線 $A_2P$ 平行於直線 $A_1L$。同樣, 通過頂點 $A_5$ 作一直線 $A_5M$ 平行於直線 $A_1L$, 再通過頂點 $A_3$ 作一直線 $A_3T$ 平行於直線 $A_1L$。此 4 紅色直線都相互平行。

(2d-2) 通過頂點 $A_2$ 對直線 $A_1L$ 作一垂直線 $A_2B$, 使 $B$ 點爲垂直交點。再通過頂點 $A_6$ 對直線 $A_1L$ 作一垂直線 $A_6C$, 使 $C$ 點爲垂直交點。再通過頂點 $A_5$ 對直線 $A_1L$ 作一垂直線 $A_5D$, 使 $D$ 點爲垂直交點。再通過頂點 $A_3$ 對直線 $A_2P$ 作一垂直線 $A_3F$, 使 $F$ 點爲垂直交點。再通過頂點 $A_4$ 對直線 $A_2P$ 作一垂直線 $A_4H$, 使 $H$ 點爲垂直交點。同時, 垂直線 $A_4H$ 與直線 $A_3T$ 相交於垂直點 $G$ 且垂直線 $A_4H$又與直線 $A_5M$ 相交於垂直點 $E$。輔助線作圖完成, 接著進行幾何分析。

(2d-3) (a) 對直角 $\triangle A_2BA_1$ 言, 直線段 $A_1B$ 恰等於 $V_1\cos(\pi - A_5) = -V_1\cos A_5$。

(b) 對直角 $\triangle A_6CA_1$, 直線段 $A_1C$ 恰等於 $V_6\cos(A_1 - A_5)$。

(c) 角度 $a = A_6 + A_1 - A_5$, 由圖形分析知 $V_5$ 邊長在直線 $A_1L$ 上的垂直投影必爲直線段 $CD$ 的長度恰等於 $-V_5\cos(A_6 + A_1 - A_5)$。

(d) 在頂點 $A_5$ 處, 角度 $a + A_5 = \pi + b = A_6 + A_1$, 對直角 $\triangle A_4EA_5$ 言, $V_4\cos(A_1 + A_6) = -V_4\cos b = A_5E$ 線段的負值。

(e) 在頂點 $A_2$ 處, 角度 $k + A_5 = \pi + z$, $\cos(k + A_5) = -\cos(z)$, 對直角

$\triangle A_4HA_2$言, 直線段 $A_2H$ 恰等於 $-d_2\cos(k+A_5)=V_4\cos(A_1+A_6)-V_5\cos(A_6+A_1-A_5)+V_6\cos(A_1-A_5)-V_1\cos A_5$。

(2d-4) (a) 在 $\triangle A_4GA_3$ 中, 角度 $b+A_4+i=\pi$, 得角度 $i=2\pi-A_1-A_4-A_6$, 對直角 $\triangle A_4GA_3$ 言, $V_3\cos(i)=V_3\cos(A_1+A_4+A_6)=A_3G$ 直線段的值。

(b) 在頂點 $A_2$ 處, 角度 $A_2+A_5=\pi+w$, $\cos(A_2+A_5)=-\cos(w)$, 對直角 $\triangle A_3FA_2$ 言, 直線段 $A_2F$ 長度恰等於 $-V_2\cos(A_2+A_5)=V_2\cos(w)$, 由分析圖中可清楚地得到; 直線段長 $A_2H$ 恰等於直線段長 $A_2F$ 加上直線段長 $A_3G$! 因此推證出化簡的關係式如下;

$$-d_2\cos(k+A_5)=-V_2\cos(A_2+A_5)+V_3\cos(A_1+A_4+A_6). \quad \text{(t-2)}$$

這 (t-1) 式與 (t-2) 式的兩等價類型即爲 $-d_2\cos(k+A_5)$ 的轉換關係式已知量。

(2e) 方程式 (9) 中等號右側第 5 項內出現 $d_2\cos(A_1+m)$ 的未知成份, 必須將此未知成份轉換成已知量; 再應用角度組合修正參數法, 令 $A_1+m=\pi+\varphi$ 且 $A_5+A_6+k=2\pi-\varphi$, $\varphi$ 爲角度修正參數, 則 $k=2\pi-\varphi-A_5-A_6$ 且 $m=\pi+\varphi-A_1$, 分別代入上述 (7-1) 式與 (8-1) 式中, 運算、化簡, 再仿效上述 (2c) 的方法, 聯立方程式解出, 最後獲得下式;

$$\begin{aligned} d_2\cos\varphi &= -V_4\cos A_1+V_5\cos(A_5-A_1)-V_6\cos(A_1-A_5-A_6)+V_1\cos(A_5+A_6)\\ &= -d_2\cos(A_1+m). \end{aligned} \quad \text{(t-3)}$$

再應用六邊形的角度組合修正參數法將 (t-3) 式的 4 個項化簡; 取 $n=6$, 代入引理 1 一組方程式 (7) 式與 (8) 式中, 並將 $V_1$ 的底改換成 $V_2$ 的底, 因而得出下列兩式;

$$V_2=V_3\cos A_3-V_4\cos(A_3+A_4)+V_5\cos(A_6+A_1+A_2)-V_6\cos(A_1+A_2)+V_1\cos A_2,$$

及

$$0=V_3\sin A_3-V_4\sin(A_3+A_4)-V_5\sin(A_6+A_1+A_2)+V_6\sin(A_1+A_2)-V_1\sin A_2.$$

比對 (t-3) 式裡的 $V_1\cos(A_5+A_6)$ 與上述的 $V_1\cos A_2$, 看出 $A_2$ 要被轉換成 $(A_5+A_6)$; 現在令角度組合 $A_2+A_5+A_6=2\pi+\delta$, $A_1+A_3+A_4=2\pi-\delta$, $\delta$ 爲角度組合修正參數, 代入上兩式中運算, 得

$$\begin{aligned} V_2 &= V_3\cos A_3-V_4\cos(A_3+A_4)+V_5\cos(A_6+A_1+A_2)-V_6\cos(A_1+A_2)+V_1\cos A_2\\ &= V_3\cos(2\pi-\delta-A_1-A_4)-V_4\cos(2\pi-\delta-A_1)+V_5\cos(A_1+2\pi+\delta-A_5)\\ &\quad -V_6\cos(A_1+2\pi+\delta-A_5-A_6)+V_1\cos(2\pi+\delta-A_5-A_6)\\ &= V_3\cos(\delta+A_1+A_4)-V_4\cos(\delta+A_1)+V_5\cos(A_1+\delta-A_5) \end{aligned}$$

$$-V_6\cos(A_1+\delta-A_5-A_6)+V_1\cos(\delta-A_5-A_6),$$

$$\begin{aligned}V_2=&\cos\delta\cdot[V_3\cos(A_1+A_4)-V_4\cos A_1+V_5\cos(A_1-A_5)-V_6\cos(A_1-A_5-A_6)\\&+V_1\cos(A_5+A_6)]+\sin\delta\cdot[-V_3\sin(A_1+A_4)+V_4\sin A_1-V_5\sin(A_1-A_5)\\&+V_6\sin(A_1-A_5-A_6)+V_1\sin(A_5+A_6)],\end{aligned}\tag{p-3}$$

及

$$\begin{aligned}0=&V_3\sin A_3-V_4\sin(A_3+A_4)-V_5\sin(A_6+A_1+A_2)+V_6\sin(A_1+A_2)-V_1\sin A_2\\=&V_3\sin(2\pi-\delta-A_1-A_4)-V_4\sin(2\pi-\delta-A_1)-V_5\sin(A_1+2\pi+\delta-A_5)\\&+V_6\sin(A_1+2\pi+\delta-A_5-A_6)-V_1\sin(2\pi+\delta-A_5-A_6)\\=&-V_3\sin(\delta+A_1+A_4)+V_4\sin(\delta+A_1)-V_5\sin(A_1+\delta-A_5)\\&+V_6\sin(A_1+\delta-A_5-A_6)-V_1\sin(\delta-A_5-A_6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0=&\sin\delta\cdot[-V_3\cos(A_1+A_4)+V_4\cos A_1-V_5\cos(A_1-A_5)+V_6\cos(A_1-A_5-A_6)\\&-V_1\cos(A_5+A_6)]+\cos\delta\cdot[-V_3\sin(A_1+A_4)+V_4\sin A_1-V_5\sin(A_1-A_5)\\&+V_6\sin(A_1-A_5-A_6)+V_1\sin(A_5+A_6)].\end{aligned}\tag{p-4}$$

聯立解出 (p-3) 式與 (p-4) 式, 將 (p-3) 式等號兩側同乘以 $\cos\delta$ 再減去 (p-4) 式等號兩側同乘以 $\sin\delta$, 最後得到下式;

$$\begin{aligned}V_2\cos\delta=&V_3\cos(A_1+A_4)-V_4\cos A_1+V_5\cos(A_1-A_5)-V_6\cos(A_1-A_5-A_6)\\&+V_1\cos(A_5+A_6)\\=&V_2\cos(A_2+A_5+A_6),\end{aligned}$$

再移項後, 得

$$\begin{aligned}&-V_4\cos A_1+V_5\cos(A_1-A_5)-V_6\cos(A_1-A_5-A_6)+V_1\cos(A_5+A_6)\\&=V_2\cos(A_2+A_5+A_6)-V_3\cos(A_1+A_4).\end{aligned}\tag{p-5}$$

比較 (t-3) 式與 (p-5) 式, 得到 $-d_2\cos(A_1+m)$ 的精簡關係式如下;

$$-d_2\cos(A_1+m)=V_2\cos(A_2+A_5+A_6)-V_3\cos(A_1+A_4).\tag{t-4}$$

(2f) 再將上述推導完成的 (9-1) 式、(t-2) 式、(t-4) 式一起代入方程式 (9) 式中, 展開運算後再整理排列, 最後獲得精緻規律類型的下式;

$$\begin{aligned}(d_{14}d_{25})^2=&(V_1V_4)^2+[(V_2V_5)^2+(V_3V_5)^2-2V_2V_3V_5^2\cos A_3]\\&+[(V_2V_6)^2+(V_3V_6)^2-2V_2V_3V_6^2\cos A_3]-2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)\end{aligned}$$

$$+ 2V_3V_4V_5V_1\cos(A_4 + A_6 + A_1) + 2V_1V_2V_4V_6\cos(A_2 + A_5 + A_6)$$
$$- 2V_6V_1V_3V_4\cos(A_1 + A_4) - 2V_2^2V_5V_6\cos A_6 - 2V_3^2V_5V_6\cos A_6$$
$$+ 4V_2V_3V_5V_6\cos A_3\cos A_6. \tag{10}$$

方程式 (10) 式即爲被論證出的平面凸六邊形中央兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式!

(2g) 再由引理 3 性質得 $A_1 + A_3 + A_5 = 2\pi = A_2 + A_4 + A_6$, 代入 (10) 式, 化簡, 得圓內接六邊形等價類型簡約公式 (11) 式;

$$\begin{aligned}(d_{14}d_{25})^2 = {} & (V_1V_4)^2 + [(V_2V_5)^2 + (V_3V_5)^2 - 2V_2V_3V_5^2\cos A_3] \\ & + [(V_2V_6)^2 + (V_3V_6)^2 - 2V_2V_3V_6^2\cos A_3] - 2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2 + A_5) \\ & + 2V_3V_4V_5V_1\cos(A_1 - A_2) + 2V_1V_2V_4V_6\cos(A_5 - A_4) \\ & - 2V_6V_1V_3V_4\cos(A_1 + A_4) - 2V_2^2V_5V_6\cos A_6 - 2V_3^2V_5V_6\cos A_6 \\ & + 4V_2V_3V_5V_6\cos A_3\cos A_6.\end{aligned} \tag{11}$$

## 三、檢驗

(3a) 在圖 9 廣義型的六邊形方程式 (10) 中, 由引理 2 的性質知 $\cos(A_4 + A_6 + A_1) = \cos[4\pi - (A_2 + A_3 + A_5)] = \cos(A_2 + A_3 + A_5)$, 若令頂點 $A_6$ 趨近至 $A_1$, 使 $V_6 = 0$, 則六邊形退化成五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 見下圖 13 而使得方程式 (10) 縮減成下式;

$$\begin{aligned}(d_{14}d_{25})^2 &= (V_1V_4)^2 + [(V_2V_5)^2 + (V_3V_5)^2 - 2V_2V_3V_5^2\cos A_3] \\ &\quad - 2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2 + A_5) + 2V_3V_4V_5V_1\cos(A_2 + A_3 + A_5) \\ &= (V_1V_4)^2 + (V_2V_5)^2 + (V_3V_5)^2 - 2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2 + A_5) \\ &\quad - 2V_3V_4V_5V_1\cos(A_1 + A_4) - 2V_2V_3V_5^2\cos A_3.\end{aligned} \tag{12}$$

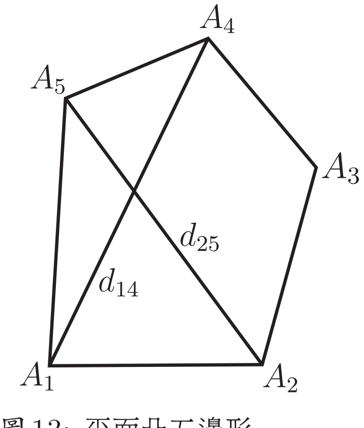


圖 13: 平面凸五邊形

此方程式 (12) 式就是凸五邊形兩相鄰交叉對角線長度乘積的一般化方程式! 方程式 (12) 式與方程式 (6T) 式及方程式 (6) 式類型完全一致相符合!

(3b) 在圖 9 廣義型的六邊形方程式 (10) 中, 若令頂點 $A_6$ 趨近至 $A_1$, 使 $V_6=0$, 同時再令頂點 $A_3$ 趨近至 $A_4$, 使 $V_3=0$, 則六邊形退化成四邊形 $A_1A_2A_4A_5$, 見下圖 14。

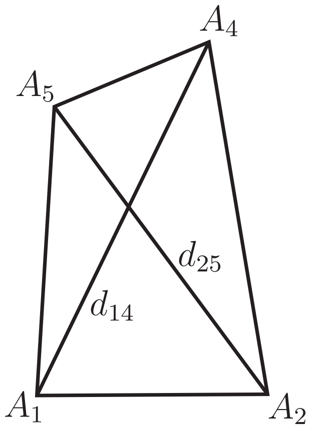



圖 14: 平面凸四邊形

$\overline{A_2A_4}=V_2$, $\overline{A_4A_5}=V_4$, $\overline{A_5A_1}=V_5$, 而使得方程式 (10) 縮減成下式;

$$(d_{14}d_{25})^2=(V_1V_4)^2+(V_2V_5)^2-2V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5). \tag{13}$$

此方程式 (13) 式就是凸四邊形兩交叉對角線長度乘積的一般化方程式!

(3c) 在圖 9 廣義型的六邊形方程式 (10) 中, 若讓此六邊形內接於一圓, 並令頂點 $A_6$ 趨近至 $A_1$, 使 $V_6=0$, 同時再令頂點 $A_3$ 趨近至 $A_4$, 使 $V_3=0$, 則此圓內接六邊形退化成圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_5$, 且因 $A_2+A_5=\pi$, 而使得方程式 (10) 退化縮減成下式;

$$d_{14}d_{25}=V_1V_4+V_2V_5. \tag{14}$$

此方程式 (14) 即爲圓內接四邊形的托勒密公式!

## 參、結論

(1) 先以圓內接多邊形所推論出的方程式爲雛型將能推廣至一般凸多邊形相對應的普遍化方程式, 此情況明顯地在前言與本文的敘述內容中屢見一斑。所以先自圓內接圖形研究分析起, 當能更容易尋找到一般形圖形對應方程式。

(2) 整篇論述中出現2個亮點! 第 1 個亮點是多邊形角度組合修正參數法; 這個寶貴的修正參數法無形中提供了多樣性的組合型態, 使得在找尋適確的邊長與角度組合項時發揮了極大效用! 要常常實作運算, 運用起來才更得心應手。

第 2 個亮點是輔助線幾何作圖法; 應用繪製幾何圖形法在理論推證過程中佔著一席重要且決定性的地位, 藉著其直覺作爲可以巧妙地證明出未知修正量與已知量的相關結合等式關係, 並因此而具體地知悉這些未知量在圖形結構上的實質內涵意義, 它的應用真是非常的實際且高效率。

(3) 方程式 (10) 式是個廣義型公式, 它統一涵蓋了圓內接六邊形、平面凸五邊形、圓內接五邊形、平面凸四邊形及托勒密定理等相對應的方程式。而所有這些方程式的結構內涵在每一項的邊長與角度組合上都呈現有秩序地規律性分佈!

(4) 多邊形領域的主題研究在外觀看起來會覺得相當的繁雜凌亂, 但若經常接觸思考並付之親自探索研創, 則複雜中可轉化成簡潔, 凌亂中可理出規律秩序, 從而必能獲得精美簡約具規律秩序又恆久正確的方程式甜蜜果實!

## 參考文獻


1. 李輝濱。平面凸五邊形面積研究。數學傳播季刊, 36(1), 141期, 37-47, 2012。
2. 李輝濱。圓內接奇數邊數多邊形的正弦定理。數學傳播季刊, 37(4), 148期, 84-93, 2013。
3. 李輝濱。圓內接奇數邊數多邊形正弦定理的推廣。科學教育月刊, 369、370期, 2014年6、7月出版發行。
4. 李輝濱。預測與驗證平面凸多邊形面積公式。科學教育月刊, 398、399期, 2017年5、6月出版發行。
5. 蔡聰明。數學拾貝—星空燦爛的數學。臺北市: 三民書局, 2000。
6. 黃武雄。中西數學簡史。臺北市: 人間文化事業公司, 1980。
7. 世部貞市郎。幾合學辭典。臺北市: 九章出版社, 1988。
8. 林聰源。數學史—古典篇。臺北市: 凡異出版社, 1995。
9. 項武義。基礎幾何學。臺北市: 五南圖書出版公司。
10. 項武義。基礎分析學。臺北市: 五南圖書出版公司。
11. E. W. Hobson, A treatise on plane and Advanced trigonometry, Dover, 1957.
12. Z. A. Melzek, Invitation to Geometry, John Wiley and Sons, 1983.


—本文作者爲嘉義市私立輔仁中學退休教師—