數學傳播 43卷1期, pp. 48-54

# 常均曲率曲面

梁惠禎

考慮 $\mathbb{R}^3$ 中之曲面 $S$, 過 $S$ 上某點之所有曲線中, 有兩曲線分別具最大及最小之之曲率 $\kappa_1$、$\kappa_2$, 稱其平均值 $(\kappa_1+\kappa_2)/2$ 爲 $S$ 在該點之均曲率。若 $S$ 上所有點都具有相同之均曲率, 則稱 $S$ 爲常均曲率曲面; 球面是廣爲人知的例子。常均曲率曲面緣起於等周界問題。本文將分別探討無邊界及有邊界之曲面。有邊界之曲面又分兩類討論: 給定邊界曲線者、給定邊界與支撐面接觸角之毛細曲面。

球面上的點另具重要性質: $\kappa_1=\kappa_2$。一般曲面 $S$ 上具此性質的點稱爲 umbilical point (臍點)。若 $S$ 的每一點都爲 umbilical point, 則稱 $S$ 爲 umbilical。第 3 節中將論及常均曲率曲面與 umbilical 曲面之可能關聯。

## 一、緣起

手執切面爲圓的吸管, 置其一端 $\Gamma_1$ 入肥皂溶液後抽出, 有一平坦之肥皂膜附著於 $\Gamma_1$, 爲一圓盤。於吸管另一端 $\Gamma_2$ 灌入空氣, 則圓盤變形爲附著於 $\Gamma_1$ 之肥皂泡。以一手指底於 $\Gamma_2$ 內部, 使空氣無從逃逸, 則此肥皂泡成形爲 spherical cap。稍事擾動肥皂泡使之變形但仍附著於 $\Gamma_1$, 且擾動過程中一手指始終底於 $\Gamma_2$ 內部, 則停止擾動後, 肥皂泡復爲 spherical cap。

肥皂泡可視爲分隔兩均勻介質之界面。在無重力狀態, 界面之能量與面積成正比, 而肥皂泡取得最小能量。上述肥皂泡的建構, 另受制於兩個因素: 肥皂泡之邊界固定爲 $\Gamma_1$, 且肥皂泡與吸管所包夾的空氣量爲固定。在這兩個限制下擾動曲面, 肥皂泡取得面積的極小值。因此肥皂泡是下述變分問題的解, 其解爲 spherical cap:

**問題** 1: 給定常數 $V$ 及平面 $P$ 上之圓 $\Gamma$。通過 $\Gamma$ 且與 $P$ 包夾體積 $V$ 的所有曲面中, 何者面積最小?

在前述實驗, 如果持續灌空氣入吸管, 肥皂泡終將脫離吸管, 成爲完整球面。此時, 肥皂泡滿足的限制僅剩一個, 在體積限制下要取得面積之最小值。換言之, 球面是下述古典等周界問題

本文原稿刊載於 2017.02.16 中央研究院電子週報第 597 期, 業經擴充修改。

的解:

**問題** 2: 體積固定的所有封閉曲面中, 何者面積最小 ?

將面積視爲曲面之函數, 考慮體積維持恆定之曲面微小變動, 則面積函數針對這些變動之臨界點爲常均曲率曲面。換一觀點來看, 考慮分隔兩介質之界面 $S$, 忽略 S 的厚度, 界面 $S$ 承受之內外壓力差 $P_e - P_i$ 與曲面張力 $\gamma$ 成正比, 而 $S$ 之形狀由 Laplace equation 決定:

$$P_e - P_i = 2H\beta,$$

其中 $H$ 爲 $S$ 之均曲率, $\beta$ 是介質所決定之常數; 當壓力恆定, $S$ 之均曲率爲常數。肥皀膜、肥皀泡及毛細曲面皆屬此型界面。因此, 我們把上述二問題分別轉化如下:

**問題** 1.1: 給定常數 $H$ 及封閉曲線 $\Gamma$, 通過 $\Gamma$ 且均曲率爲常數 $H$ 之曲面是否存在? 是否不只一個?

**問題** 2.1: 封閉的常均曲率曲面一定是球面嗎?

## 二、先看問題 2.1

1853 年 J. H. Jellet 證明球面是唯一的 star-shaped 常均曲率曲面。1900 年 H. Liebermann 證明卵形的常均曲率曲面必爲球面。半個世紀後, H. Hopf 賦與常均曲率曲面一 holomorphic differential 2-form, 於 1951 年證明:

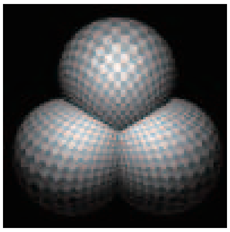
**定理** 1: genus 爲 0 的封閉常均曲率曲面必爲球面。

1956 至 1962 年間, A. D. Alexandrov 證明:

**定理** 2: 嵌入的 (embedded) 封閉常均曲率曲面必爲球面。

Alexandrov 的證明, 結合曲面對平面的反射及橢圓方程的 maximum principle, 至今仍是微分幾何及偏微分方程領域之重要技巧。1984 年 J. L. Barbosa 及 M. do Carmo 證明:

**定理** 3: 穩定的封閉常均曲率曲面必爲球面。



直至八零年代, 球面是唯一爲人所知的封閉常均曲率曲面。1986 年, H. C. Wente [8] 證明某個常均曲率 immersed 環面的存在性, 石破天驚, 激起了後續尋找封閉常均曲率曲面之風潮, 至今未衰。而 Wente 發展的技巧, 建立起常均曲率曲面與可積系統之關聯, 常均曲率環面因之而能被深入探討。

1991~1992年, N. Kapouleas [3, 4] 對任意 genus 構造出封閉的 immersed 常均曲率曲面。Kapouleas 黏合球面及 Delaunay 旋轉曲面[1], 其關鍵是要在黏合處做擾動使其平滑[2]; 此構造方法迄今仍廣被採用。近日, 另有學派結合 loop groups 與可積系統的理論, 發展出 DPM method 以構造常均曲率曲面。諸多網站以電腦繪圖展示相關的豐碩成果, 譬如 `http://www.gang.umass.edu`。

## 三、回到問題1.1

在問題1.1, 給定常數 $H$ 及封閉曲線 $\Gamma$, 要尋找曲面 $M=X(\overline{B_1})$ 滿足下述事項, 其中 $X:\overline{B_1}\to\mathbb{R}^3$, $X=X(u,v)$, $B_1$ 為 $\mathbb{R}^2$ 中之單位圓:

$$\begin{cases}\Delta X = 2H(X_u\times X_v) \quad \text{on } B_1,\\ |X_u|^2-|X_v|^2=\langle X_u,X_v\rangle=0 \quad \text{on } B_1,\\ X:\partial B_1\to\Gamma \quad \text{a homeomorphism.}\end{cases}$$

J. Douglas 及 T. Rado 處理了 $H=0$ 的情況, Douglas 並因此而於 1936 年獲頒費爾茲獎。五零年代, E. Heinz 開始探討 $H\neq 0$ 的情況, 至七零年代, 多位數學家考慮變分問題的解, 而於 $H$ 夠小時, 尋獲曲面 $M=X(\overline{B_1})$: 在 $H=0$ 時, 以 Dirichlet integral

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_{B_1}|\nabla X|^2dudv$$

取代面積 $A(X)=\int_{B_1}|X_u\times X_v|dudv$ (因為 $A(X)\le D(X)$), 在 $H\neq 0$ 時, 考慮

$$D_H(X)=D(X)+\frac{2H}{3}\int_{B_1}\langle X_u\times X_v,X\rangle dudv,$$

並考慮由定義於 $B_1$ 且通過 $\Gamma$ 之 immersions 所組成之族群 $\mathcal{C}(\Gamma)$; 與 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 之成員相較, 曲面 $M=X(\overline{B_1})$ 最小化 $D_H(X)$。$D_H(X)$ 的第二項中, $\frac{1}{3}\int_{B_1}\langle X_u\times X_v,X\rangle dudv$ 是曲面 $X(u,v)$ 相對於原點的 algebraic volume, 而 $2H$ 可視為為 Lagrange multiplier (但未給定 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 成員之體積值)。$M=X(\overline{B_1})$ 藉由變分學之 direct method 尋獲, 是 $D_H(X)$ 之 minimizing sequence 收斂所至之極限; 此中關鍵是要利用 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 的緊緻性及 $D_H(X)$ 之 lower semicontinuity 證明 minimizing sequence 收斂。

八零年代, H. Brezis, J. M. Coron 及 M. Struwe 處理 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 在 mountain pass level 的緊緻性, 確認了問題 1.1 的解若存在必定不唯一: 若 $D_H(X)$ 在 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 能被 $X$ 最小化, 則

[1] 1838 年 C. E. Delaunay 發現一族常均曲率旋轉體, 包括圓柱面、懸垂面、unduloid、nodoid。

[2] 在黏合處, 黏合曲面不平滑。但分析 Jacobi 算子的 kernel, 並利用 Leray-Schauder fixed-point 定理, 可將原黏合曲面微擾動, 得到平滑的常均曲率曲面。

在 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 中必定存在另一不穩定的解; 譬如, 若 $\Gamma$ 是圓, 通過 $\Gamma$ 的常均曲率曲面至少有圓盤 $(H=0)$ 及一大一小兩個 spherical caps $(H \neq 0)$。事實上, 即使 $\Gamma$ 是圓時, 對問題 1.1 的解, 我們所知仍甚少。但有兩個確認的事實:

1. 通過圓的緊緻 umbilical 曲面必爲圓盤或 spherical caps。
2. 通過圓的緊緻旋轉曲面必爲圓盤或 spherical caps。

另外, Kapouleas [3] 於 1991 年證明存在通過圓而不具旋轉對稱之緊緻常均曲率曲面; 此曲面有自相交 (self-intersections), genus 大於 1, 坐落於邊界平面所決定的某半空間。迄今未有該曲面之電腦繪圖, 此與封閉常均曲率曲面電腦繪圖量之豐沛景況大相逕庭。衡諸這些事實, 對照前述三定裡, 我們做以下三猜測:

**猜測**1: 通過圓的 immersed 常均曲率曲面, 若 genus 爲 0, 必爲 umbilical。

**猜測**2: 通過圓的常均曲率曲面, 若爲嵌入的, 必是 umbilical。

**猜測**3: 通過圓的常均曲率曲面, 若爲穩定, 必是 umbilical。

## 四、將問題1.1考慮的曲面限制為平面區域上的函數圖形

改述問題如下:

**問題**1.2: 給定常數 $H$ 及空間中之封閉曲線 $\Gamma$, 是否存在函數圖形通過 $\Gamma$ 且均曲率爲 $H$ ?

此問題中之 $\Gamma$ 必爲某平面曲線上之函數圖形, 因此可重新陳述問題如下:

**問題**1.3: 給定常數 $H$, 定義域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, 尋找平滑函數 $u$ 使得

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 2H \text{ on } \Omega \tag{1}$$

$$u = \varphi \quad \text{along } \partial\Omega \tag{2}$$

其中 $\nabla$ 及 div 分別爲 $\mathbb{R}^2$ 中之梯度及 divergence 算子。(2)

用 divergence theorem 積分 (1), 得到此問題有解之必要條件: $|H| = \dfrac{|\partial\Omega|}{2|\Omega|}$, 其中 $|\partial\Omega|$ 及 $|\Omega|$ 分別爲 $\partial\Omega$ 的長度及 $\Omega$ 的面積。當 $\Omega$ 爲半徑 $r$ 的圓, 此必要條件是 $|H| \leq 1/r$。事實上, R. Finn [2] 於 1965 年證明:

**定理**4: 若 $H \neq 0$ 且 $\Omega$ 包含半徑 $1/|H|$ 的圓, 此問題的解必爲半球。

R. Finn [2] 同時證明了下述結果:

**定理**5: 當 $H=0$, 問題 1.3 對任意連續邊界值 $\varphi$ 都有解之充要條件是 $\Omega$ 爲凸。

對一般 H, J. Serrin [7] 於 1969 年證明:

**定理**6: 設 $\Omega$ 爲有界凸域。問題 1.3 對任意連續邊界值 $\varphi$ 都有解之充要條件是平面曲線 $\partial\Omega$ 之曲率 $\kappa \geq 2H$。

在偏微分方程領域, 問題 1.3 因其邊界條件 (2) 而被歸類爲 Dirichlet problem。因 (1) 爲擬線性 (quasilinear) 二階橢圓方程, 通常運用 Leray-Schauder theory 求解: 先假設解 $u$ 存在, 估計 $|u|$ 及 $|\nabla u|$, 若兩者皆存在與 $u$ 無關的上界, 則解存在。

## 五、毛細曲面

無重力狀態下, 將水平切面爲 $\Omega$ 的試管鉛直插入溶液槽, 溶液因毛細作用而附著於試管壁上升, 形成毛細曲面 $S$, 具常均曲率, 與試管壁相交於一曲線, 沿此曲線 $S$ 與管壁之交角恆常不變。因此, 有別於 (2), 我們考慮如下之邊界條件

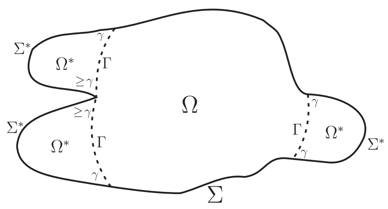
$$\left\langle \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, v \right\rangle = \cos\gamma \quad \text{along } \partial\Omega, \tag{3}$$

其中 $\nu$ 是 $\partial\Omega$ 指向 $\Omega$ 內部之單位法向量。設 (1)-(3) 有解 $u$, 則在試管 $\Omega\times\mathbb{R}$ 內, 溶液於 $(x,y)\in\Omega$ 點升起的高度是 $z=u(x,y)$, 而由 (3) 知 $u$ 的函數圖形與管壁 $\partial\Omega\times\mathbb{R}$ 之交角恆爲 $\gamma$。

處理 (1)-(3) 解的存在性, 端賴 E. de Giorgi 及其同儕發展出的 BV theory。對子區域 $\Omega^*\subset\Omega$, 邊界 $\partial\Omega^*=\Gamma\bigcup\Sigma^*$, 其中 $\Sigma^*\subset\partial\Omega=\sigma$, $\Gamma\subset\Omega$, 考慮函數

$$\Phi(\Omega^*;\gamma) := |\Gamma| - |\Sigma^*|\cos\gamma + |\Sigma|\cos\gamma\frac{|\Omega^*|}{|\Omega|},$$

其中 $|\Gamma|$, $|\Sigma^*|$ 分別爲 $\Gamma$ 及 $\Sigma^*$ 的長度, $|\Omega|$, $|\Omega^*|$ 分別爲 $\Omega$ 及 $\Omega^*$ 的面積。用 divergence theorem 積分 (1), 得到解存在之必要條件 $\Phi(\Omega^*;\gamma)>0$。而要得到



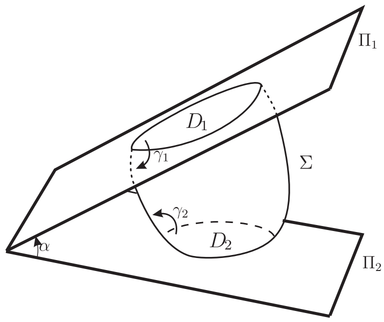

解存在之充分條件, 觀察: 當 $\Phi(\Omega^*;\gamma)$ 之最小值發生時, $\Gamma$ 是半徑 $\frac{|\Omega|}{|\Sigma|}\cos\gamma$ 的圓弧, 在 $\Sigma$ 的平滑點與 $\Sigma$ 之交角爲 $\gamma$, 而在 $\Sigma$ 的凹角與 $\Sigma$ 之交角 $\geq\gamma$。針對此型讓 $\Phi(\Omega^*;\gamma)$ 最小值發生的子區域 $\Omega^*$, 七零年代 Giusti 及 Finn 證得:

**定理**7: (1)-(3) 解存在之充要條件是此型子區域 $\Omega^*$ 都滿足$\Phi(\Omega^*;\gamma) > 0$。

在一般 $\Omega$, 此型子區域 $\Omega^*$ 爲數有限, 甚或不存在。若 $\Omega^*$ 不存在, 上述充要條件成立, 因此解存在; 而若 $\Omega^*$ 有數個, 則一一計算其 $\Phi$ 值。P. Concus 及 Finn 循此策略證得:

**定理**8: 若 $\partial\Omega$ 包含某突出的角, 角弧度 $2\alpha$, $\alpha+\gamma < \pi/2$, 則 (1)-(3) 無解。

廣義來說, 與某支撐面交角恆定的常均曲率曲面都被稱爲毛細曲面, 而稱該交角爲接觸角 (contact angle)。考慮兩個平面包夾的楔形區域,




McCuan [5] 及 Park [6] 分別於 1997 及 2005 年證明

**定理**9: 楔形區域內, 嵌入之環形毛細曲面必爲球面的一部分。

我們可考慮下述三問題;

**問題** A: 楔形區域或半空間內, 是否存在緊緻、immersed 且不是部分球面的的毛細曲面?

**問題** B: 楔形區域或半空間內, 是否存在緊緻、嵌入且 genus$\geq 1$ 的毛細曲面?

**問題** C: 楔形區域或半空間內, 穩定之毛細曲面是否必爲部分球面?

相關於問題 A, Wente [9] 於 1995 年建構了楔形區域內非緊緻的毛細曲面。關於問題 B, 在接觸角 $\leq \pi/2$ 的情況, McCuan [5] 於 1997 年證明問題所述之毛細曲面不存在。關於問題 C, 在接觸角 $\geq \pi/2$ 且毛細面邊界爲嵌入曲線的情況, J. Choe 及 M. Koiso [1] 於 2016 年證明穩定之毛細面必爲球的一部分。三個問題都尚待更完整的解答。

## 參考資料

1. J. Choe and M. Koiso, Stable capillary hypersurfaces in a wedge, *Pacific J. Math.*, 280: 1, 2016.
2. R. Finn, Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of prescribed mean

curvature, *J. Anal. Math.*, 14, 139-160, 1965.
3. N. Kapouleas, Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space, *J. Diff. Geom.*, 33, 683-715, 1991.
4. N. Kapouleas, Constant mean curvature surfaces constructed by fusing Wente tori, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 89, 5695-5698, 1992.
5. J. McCuan, Symmetry via spherical reflection and spanning drops in a wedge, *Pacific J. Math.*, 180:2, 1997.
6. S. Park, Every ring type spanner in a wedge is spherical, *Math. Ann.*, 332:3, 2005
7. J. Serrin, The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic equations with many independent variables, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A*, 264, 413-496, 1969
8. H. C. Wente, Counterexample to a conjecture of H. Hopf, *Pacific J. Math.*, 121:1, 193-243, 1986
9. H. C. Wente, The capillary problem for an infinite trough, *Calc. Var. PDEs*, 3:2, 155-192, 1995

—本文作者任職中央研究院數學研究所—